С. 723-729. 4. Войтович Н.Н., Савенко П.А. Об одном интегральном уравнении теории синтеза антенн // Мат.методы и физ.-мех. поля. 1975. Вып. 2. С. 161-163. 5. Насыров Н.С. Построение малых решений нелинейного интегрального уравнения методом разветвляющихся итераций // Нелинейные колебания и теория упругости. 1981. Т. 8. С. 89-97.

Стаття надійшла до редколегії 21.01.86

УДК 539.014

О.І.Васюник

# ПОБУДОВА РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЗВАРЮВАНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК

Розглянемо дві вільні на краях, тонкі, постійної товщини $2h$ однорідні, ізотропні, пружні конічні оболонки, віднесені до однієї і тієї ж канонічної ортогональної системи координат $S, \beta, \gamma$ /($S_1 \leq S \leq S_0$) - оболонка 1, $S_0 < S \leq S_2$ - оболонка 2, які зварені стиковим кільцевим швом вздовж поверхні $S = S_0$ контактною зваркою/. Тут $S$ - координата, що змінюється вздовж твірної; $\beta$ - кут, утворений довільною і початковою меридіональними площинами $(0 \leq \beta \leq \beta_2)$; $\gamma$ - координата, яка визначає положення точки вздовж нормалі до серединної поверхні оболонок $/-h \leq \gamma \leq h)$.

У процесі зварювання додатково підігріваються області оболонок $S_0 \leq S_2 \leq S \leq S_{22} < S_2$, $S_1 \leq S_{11} \leq S \leq S_{12} \leq S_0$. Позначимо температурне поле зварювання $t_0 (S, \gamma, \tau)$, а додаткового підігріву - $t_1 (S, \gamma, \tau)$. Тоді

$$t = t_0 + t_1 . \qquad /1/$$

Обмежимось розглядом задачі для моментів часу, коли зварювані оболонки не взаємодіють між собою вздовж перерізу $S = S_0$, а на краях виконуються умови вільних країв. У зв"язку з цим розглянемо побудову розв"язку задачі лише для області $S_1 < S \leq S_0$.

При заданому осесиметричному температурному полі задача про визначення напружень і деформацій у конічній оболонці зводиться до розв"язання двох ключових рівнянь [1, 3]

$$\ddot{V} + \frac{1}{S}\dot{V} - \frac{1}{S^2}V - \frac{m \operatorname{ctg} \mu}{S}\theta = \alpha_t m \dot{T}_1 ,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{S}\dot{\theta} - \frac{1}{S^2}\theta + \frac{ctg\,\mu}{S}V = -\alpha_t\frac{1+\nu}{h}\dot{T}_2, \qquad /2/$$

де $\theta$ - кут повороту елемента серединної поверхні; $V$ - функція напружень; $m = \frac{D_0}{D_1}$; $D_0 = 2Eh$; $D_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, $T_1$, $T_2$ - усереднені по товщині характеристики температурного поля $t(S,\tau)$, $2\mu$ - кут при вершині конуса.

Функції $\theta(S)$ і $V(S)$ задовольняють умови вільних країв;

$$V(S_1)=0, \quad V(S_{01})=0,$$

$$\dot{\theta} + \nu\frac{1}{S}\theta + \frac{\alpha_t}{h}(1+\nu)T_2 = 0\Big|_{S=S_1,\,S_{01}}. \qquad /3/$$

Припустимо, що зміну температури по товщині оболонки можна апроксимувати лінійним законом

$$t = T_1 + \frac{\gamma}{h}T_2. \qquad /4/$$

Розглянемо задачу про визначення додаткового до $t_0$ температурного поля $t_1$, локального підігріву області $S_{11} \leq S \leq S_{12}$ зварюваної оболонки, при якому для заданих умов підігріву та обмежень на напруження забезпечувались би умови утворення низького рівня залишкових напружень і деформацій. Тому за функціональний критерій оптимальності напружено-деформованого стану приймаємо енергію формозміни оболонки [1, 4], яку запишемо

$$U[\theta,V,T_1,T_2] = \frac{2\pi D_1 \sin\mu}{3(1-\nu)}\int_{S_{11}}^{S_{01}} F(S,\theta,\dot{\theta},V,\dot{V},T_1,T_2)\,dS, \qquad /5/$$

де

$$F = S\Big\{(1+\nu+\nu^2)\Big(\frac{1}{S}V-\dot{V}\Big)^2 + (1-\nu)^2\frac{1}{S}V\dot{V} + \frac{h^2m^2}{3}\Big[\Big(\frac{1}{S}\theta\Big)^2 - \frac{1}{S}\theta\dot{\theta} +$$

$$+\dot{\theta}^2 + 2\frac{\alpha_t}{h}T_2\Big(\frac{1}{S}\theta + \dot{\theta} + \frac{\alpha_t}{h}T_2\Big)\Big]\Big\}. \qquad /6/$$

Сформульовану задачу розв"язуємо на множині допустимих функцій $\theta$, $V$, $T_1$, $T_2$, які задовольняють ключові рівняння /2/ і додаткові обмеження

$$\Phi(S,T_1,T_2) \equiv T_2 = 0. \qquad /7/$$

Вважаємо, що в крайових перерізах області нагріву $S_{11} \leq S \leq S_{12}$ варіації допустимих функцій та їх похідні задані. За таких умов, використовуючи метод множників Лагранжа, розглядувана варіаційна задача зводиться до мінімізації функціоналу

$$U^* = \frac{2\pi D_1 \sin\mu}{3(1+\nu)m} \int_{S_{11}}^{S_{01}} S\Big\{\Big[(1+\nu+\nu^2)\Big(\frac{1}{S}V-\dot{V}\Big)^2+(1-\nu)^2\frac{1}{S}V\dot{V}+\frac{h^2m^2}{3}\Big[\Big(\frac{1}{S}\theta\Big)^2-\frac{1}{S}\theta\dot{\theta}+$$

$$+\dot{\theta}^2+2\frac{\alpha_t}{h}T_2\Big(\frac{1}{S}\theta+\dot{\theta}+\frac{\alpha_t}{h}T_2\Big)\Big]\Big]\Big\}+\xi_1 S\Big\{\ddot{V}+\frac{1}{S}\dot{V}-\frac{1}{S^2}V-\frac{ctg\mu}{S}m\theta-$$

$$-\alpha_t m\dot{T}_1\Big\}+\xi_2 S\Big\{\ddot{\theta}+\frac{1}{S}\dot{\theta}-\frac{1}{S}\theta+\frac{ctg\mu}{S}V+\alpha_t\frac{(1+\nu)}{h}\dot{T}_2\Big\}+\xi\Phi(S,T_1,T_2). \qquad /8/$$

Із необхідної умови його екстремуму при вказаних обмеженнях /7/ знаходимо рівняння Ейлера-Пуассона

$$L[V]-\frac{1}{2(1+\nu+\nu^2)}\Big[\xi_2\, ctg\mu+L[\xi_1]\Big]=0,$$

$$L[\theta]+\frac{3}{2h^2m^2}\Big[\xi_1\, m\, ctg\mu-L[\xi_2]\Big]=0,$$

$$\xi_1+S\dot{\xi}_1=0,$$

$$\theta+S\theta+\frac{3}{2hm^2\alpha_t}\Big[\xi-\frac{\alpha_t(1+\nu)}{h}\big(\xi_2+S\dot{\xi}_2\big)\Big]=0, \qquad /9/$$

де

$$L=S\frac{d^2}{dS^2}+\frac{1}{dS}-\frac{1}{S}. \qquad /10/$$

Ці рівняння разом із додатковими обмеженнями /7/, а також ключовими рівняннями /2/ утворюють повну систему рівнянь для визначення сімейства екстремальних температурних полів, відповідного їм пружнодеформованого стану оболонки і множників Лагранжа.

Виключаючи з одержаної системи рівнянь /9/ функцію $V$ і множники Лагранжа, приходимо до одного ключового рівняння відносно функції кутів повороту $\theta$ :

$$L[L[L[\theta]]]+\frac{h^2m^2 ctg^2\mu}{3(1+\nu+\nu^2)}L[\theta]=-\frac{cm\, ctg^3\mu}{2S(1+\nu+\nu^2)}. \qquad /11/$$

Загальний розв"язок рівняння /11/ має вигляд

$$\theta=c_1\, ber_2\, u_0+c_2\, bei_2\, u_0+c_3\, ker_2\, u_0+c_4\, kei_2\, u_0+c_5 S+c_6\frac{1}{S}-$$

$$-\frac{c\, ctg\mu^2}{2h^2m}, \qquad /12/$$

де $u_0=\mu_0\sqrt{S}$; $\mu_0=2\sqrt[4]{\frac{h^2m^2ctg^2\mu}{3(1+\nu+\nu^2)}}$; $ber_2 u_0$, $bei_2 u_0$, $ker_2 u_0$, $kei_2 u_0$ – функції Томпсона.

Використовуючи ключові рівняння /2/, функцію напружень $V$ і температурне поле $t$ записуємо як

$$V=-\frac{1}{2ctg\mu}\Big[C_1\mu_0 S^{-1/2}ber_0' u_0+C_1\frac{1}{2}\mu_0^2 bei_0 u_0+C_2\mu_0 S^{-1/2}bei_0' u_0-$$

$$-C_2\frac{1}{2}\mu_0^2 ber_0 u_0+C_3\mu_0 S^{-1/2}ker_0' u_0+C_3\frac{1}{2}\mu_0^2 kei_0 u_0+C_4\mu_0 S^{-1/2}kei' u_0-$$

$$-C_4\frac{1}{2}\mu_0^2 ker_0 u_0, \qquad /13/$$

$$t=\frac{\mu_0^3}{8\alpha_t m\, ctg\mu}\Big\{S^{-1/2}(C_1 bei_0' u_0-C_2 ber_0' u_0+C_3 kei' u_0+C_4 ker_0' u_0)\Big|_{S_{11}}^{S}\Big\}+$$

$$+\frac{ctg\mu}{\alpha_t}\int_{S_{11}}^{S}\frac{1}{S}\Big(C_1 ber_2 u_0+C_2 bei_2 u_0+C_3 ker_2 u_0+C_4 kei_2 u_0+C_5 S+C_6\frac{1}{S}-\frac{c\,ctg\mu}{2h^2m}\Big)dS. \qquad /14/$$

Для областей оболонки $S_1<S\le S_{11}$ і $S_{12}\le S\le S_{01}$ зовні зони підігріву функцію $\theta$ знаходимо з рівняння

$$S^2\theta^{(4)}+4S\theta^{(3)}+\theta m ctg^2\mu=\alpha_t m s t_0' ctg\mu. \qquad /15/$$

Нехай температурне поле зварювання задане у вигляді

$$t_0(S)=t^* e^{K(S-S_0)}, \qquad /16/$$

де $t^*$ – const $t$ в перетині $S=S_0$, $K=\frac{\sqrt{Bi}}{a}$, $Bi$ – критерій Біо; $a$ – коефіцієнт температуропровідності.

Загальний розв"язок рівняння /16/ має вигляд

$$\theta=b_{11}ber_2 x_0+b_{21}bei_2 x_0+b_{31}ker_2 x_0+b_{41}kei_2 x_0+\theta^*, \qquad /17/$$

де $\theta^*=a_1 ber_2 x_0+a_2 bei_2 x_0+a_3 ker_2 x_0+a_4 kei_2 x_0$ – частковий розв"язок, знайдений методом варіації постійних; $x_0=\nu_0\sqrt{S}$, $\nu_0=2\sqrt[4]{m\,ctg^2\mu}$.

З використанням ключових рівнянь /2/, функцію напружень $V$ записуємо як $V=-\frac{1}{2ctg\mu}\Big[b_{11}\nu_0 S^{-1/2}ber_0' x_0+b_{11}\frac{1}{2}\nu_0^2 bei_0 x_0+$

$$+ b_{21}\nu_0 s^{-1/2} bei'x_0 - b_{21}\frac{1}{2}\nu_0^2 ber_0 x_0 + b_{31}\nu_0 s^{-1/2} ker_0' x_0 +$$

$$+\frac{1}{2} b_{31}\nu_0^2 kei_0 x_0 + b_{41}\nu_0 s^{-1/2} kei' x_0 - b_{41}\frac{1}{2}\nu_0^2 ker_0 x_0 + 2L[\theta^*]]. \qquad /18/$$

Невідомі константи $C, C_i$, $b_{j1}$, $b_{k2}$, де $i=\overline{1,6}$, $j$, $k=\overline{1,4}$ визначаємо з умов вільних країв /3/, умов механічного спряження /19/,

$$\theta(S_{11}-0)=\theta(S_{11}+0), \quad \theta(S_{12}-0)=\theta(S_{12}+0),$$
$$\dot\theta(S_{11}-0)=\dot\theta(S_{11}+0), \quad \dot\theta(S_{12}-0)=\dot\theta(S_{12}+0), \qquad /19/$$
$$\ddot\theta(S_{11}-0)=\ddot\theta(S_{11}+0), \quad \ddot\theta(S_{12}-0)=\ddot\theta(S_{12}+0);$$

умов на температурне поле підігріву /20/,

$$t_1(S_{11})=0,\; t_1(S_{12})=0,\; t_1'(S_{11})=0,\; t_1'(S_{12})=0; \qquad /20/$$

умови на напруження /21/

$$\sigma_2^+(S_m)=K_0\sigma_T, \qquad /21/$$

де $\sigma_T$ - $\sigma$ текучості.

І. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. К., 1978. 2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976. 3. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978. 4. Романчук Я.П. Оптимизация напряженного состояния свариваемых тонких оболочек и пластин при помощи локального подогрева: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат.наук. Львов, 1980.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86