УДК 517.946

Б.М.Філь

ПОВНА ІНТЕГРОВАНІСТЬ СИСТЕМИ ТИПУ ТЮРІНГА-БОГОЛЮБОВА /МОЛ./

Доведемо бігамільтоновість та повну інтегрованість нелінійної моделі типу Тюрінга-Боголюбова /мол./ [4, 5, 8]

$$\psi_{xt} = 2i\psi\psi^*\psi_x - \psi \qquad /1/$$

на періодичному нескінченомірному гладкому многовиді $M = C_\ell^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^2)$, де $\mathbb{R}_+^1 \ni \ell < \infty$ – період. Це рівняння є нетривіальною нелінійною моделлю теорії поля та фізики елементарних частинок.

Перепишемо його у зручнішому вигляді $(u=\psi,\ v=\psi^*)$:

$$u_{xt} = 2iuvu_x - u,$$
$$v_{xt} = -2iuvv_x - v. \qquad /2/$$

У праці [6] показано, що /1/ має представлення типу Лакса з операторами

$$L = \partial_x + F, \qquad A = \partial_t + G,$$

$$F = i\begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{2} & -\lambda\psi_x^* \\ \lambda\psi_x & -\frac{\lambda^2}{2} \end{bmatrix}, \qquad G = i\begin{bmatrix} |\psi|^2 + \frac{1}{2\lambda^2} & -\frac{i}{\lambda}\psi^* \\ -\frac{i}{\lambda}\psi & -(|\psi|^2 + \frac{1}{2\lambda^2}) \end{bmatrix}.$$

Використовуючи форму оператора L, можна отримати асимптотичний розклад при $\lambda \to \infty$ для функції $\sigma = \partial_x \ln f_1(x,\lambda)$ / $f_1(x,\lambda)$ – перша компонента нормованої в точці x_0 блохівської власної функції оператора L /. З допомогою рівняння Ріката для σ

$$\sigma_x + \sigma^2 - \sigma\frac{u_{xx}}{u_x} + \left(\frac{\lambda^4}{4} - \lambda^2\left(\frac{i}{2}\frac{u_{xx}}{u_x} + u_x v_x\right)\right) = 0$$

легко показати, що функція σ при $\lambda \to \infty$ має асимптотичний розклад:

$$\sigma = \frac{i}{2}\lambda^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \lambda^{-2j},$$

де $\sigma_0 = -iu_x v_x + \frac{u_{xx}}{u_x}$; $\sigma_1 = -iu_x^2 v_x^2 + u_{xx}v_x + (u_x v_x)_x - i\partial^2 \ln u_x$

і т.д.

Величини $T_j = \int\limits_{x_0}^{x_0+\ell} \omega_j \, dx$ – це закони збереження динамічної системи /2/ [1]. Для доведення повної інтегрованості моделі /2/, знайдемо рекурсійний оператор Λ. Використаємо відомі факти [2, 3]: $\Delta(\lambda) = \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22})$,

$$\operatorname{grad}\Delta(\lambda) = tr\left(\frac{1}{2} S([F, F_i] - \partial_x F_i)\right), \left(i = 1,2 \quad F_1 = \frac{\partial F}{\partial u_x}, \; F_2 = \frac{\partial F}{\partial v_x}\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = [F, S], \qquad \operatorname{grad}\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\delta \Delta(\lambda)}{\delta u} \\ \frac{\delta \Delta(\lambda)}{\delta v} \end{pmatrix}.$$

Виключаючи коефіцієнти матриці монодромії $S_{i,j}$, $i,j = 1,2$, отримуємо

$$\Lambda \operatorname{grad}\Delta(\lambda) = \lambda^2 \operatorname{grad}\Delta(\lambda), \tag{3}$$

де

$$\Lambda = \begin{bmatrix} i\partial + 2\partial v_x \partial^{-1} u_x & 2\partial v_x \partial^{-1} v_x \\ 2\partial u_x \partial^{-1} u_x & -i\partial + 2\partial u_x \partial^{-1} v_x \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що $\Lambda \operatorname{grad} T_j = \operatorname{grad} T_{j+1}$.
Отже, можна виходячи з інваріанту T_0 побудувати всю систему інваріантів T_j : $\operatorname{grad} T_j = \Lambda^j \operatorname{grad} T_0$.

Оскільки існує Λ^{-1}, то можна отримати систему законів збереження і в "другий бік":

$$\operatorname{grad} T_0 \xrightarrow{\Lambda^{-1}} \operatorname{grad} H_1 \xrightarrow{\Lambda^{-1}} \operatorname{grad} H_2 \longrightarrow \dots$$

Випишемо тільки перші три закони збереження та їх градієнти /для зручності запишемо тільки градієнт для H_3 /

$$H_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+\ell}(u v_x - u_x v)\,dx, \quad \operatorname{grad} H_1 = \begin{pmatrix} v_x \\ -u_x \end{pmatrix}, \; \operatorname{grad} H_2 = \begin{pmatrix} -iv + 2uvv_x \\ -iu - 2uvu_x \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \int\limits_{x_0}^{x_0+\ell}\left(-iuv + \frac{1}{2}(uv^2 u_x - u^2 v v_x)\right)dx,$$

$$\operatorname{grad} H_3 = \begin{pmatrix} -\partial^{-1} v - 2i\partial^{-1} uvv_x - 2iv_x \partial^{-1} u_x \partial^{-1} v + 2iv_x \partial^{-1} v_x \partial^{-1} u + 4v_x \partial^{-1} u_x \partial^{-1} uvv_x + \\ + 4v_x \partial^{-1} v_x \partial^{-1} uvu_x \\ \partial^{-1} u - 2i\partial^{-1} uvu_x - 2iu_x \partial^{-1} v_x \partial^{-1} u + 2iu_x \partial^{-1} u_x \partial^{-1} v - 4u_x \partial^{-1} u_x \partial^{-1} uvv_x - \\ - 4u_x \partial^{-1} v_x \partial^{-1} uvu_x \end{pmatrix}.$$

Не важко перевірити, що оператор $\mathcal{L}=\begin{bmatrix} 0 & i\partial^{-1} \\ i\partial^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ являється імплектичним і нетеровим відносно динамічної системи /2/ /нагадаємо: $\partial^{-1}\cdot=\frac{1}{2}\left(\int_{x_0}^{x}\cdot\,dx-\int_{x}^{x_0+\ell}\cdot\,dx\right)$ /. Підлягає перевірці також те, що оператор $\mathcal{M}=\mathcal{L}\Lambda$ імплектичний та нетеровий:

$$\mathcal{M}=\begin{bmatrix} 2iu_x\partial^{-1}u_x & 1+2iu_x\partial^{-1}v_x \\ -1+2iv_x\partial^{-1}u_x & 2iv_x\partial^{-1}v_x \end{bmatrix}.$$

Крім того, очевидно, виконується рівність $\lambda^2\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,T=\mathcal{M}\,\mathrm{grad}\,T$, $T=\sum_{j=0}^{\infty}T_j\cdot\lambda^{-2j}$. Її тривіальний наслідок - інволютивність законів збереження відносно двох дужок Пуассона, заданих операторами $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$:

$$\{T_j,T_k\}_{\mathcal{L}}=\{T_j,T_k\}_{\mathcal{M}}=0 \quad \forall j,k\in\mathbb{Z}_+$$

Система /2/ бігамільтонова

$$u_t=-\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,H_2=-\mathcal{M}\,\mathrm{grad}\,H_3.$$

Слід відзначити, що всі розглянуті тут об"єкти отримані також градієнтно-голономним та асимптотичним методами.

Для даної системи шукаються явні розв"язки в термінах рімановых тета-функцій, які становлять інтерес з точки зору фізичного застосування, зокрема, такі їх типи, як солітонні та скінчено-зонні [7].

1. Боголюбов Н.Н. /мл./, Прикарпатский А.К., Курбатов А.М., Самойленко В.Г. Нелинейная модель типа Шредингера: законы сохранения, гамильтонова структура и полная интегрируемость // Теорет. и мат.физика. 1985. Т. 65. № 2. С. 271-285. 2. Боголюбов Н.Н. /мл./, Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Периодическая задача для нелинейных уравнений распространения волнового импульса в двухуровневой среде без диссипации. К., 1983. /Препринт/ Ин-т математики АН УССР. № 83.22. 3. Боголюбов Н.Н. /мл./, Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Классическая и квантовая полная интегрируемость модели типа Шредингера. К., 1984. /Препринт/ Ин-т математики АН УССР. № 84.53. 4. Прикарпатский А.К. Геометрическая структура и Бэклунд-преобразование одной системы нелинейных эволюционных уравнений // Укр.мат.журн. 1980. Т. 32. № 1. С. 124-127. 5. Прикарпатский А.К. Об одной точно решаемой системе нелинейных дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн. 1979. Т. 31. № 5. С. 576-582. 6. Скрипник А.И., Филь Б.Н. Идеалы в алгебрах Грассмана, группы голономий и представление Лакса для динамических систем // Дифференциально-геометрические и алгебраические методы в теории динамических систем. К., 1983. С. 16-31. /Препринт/ Ин-т математики АН УССР.

№ 83.59. 7. Теория солитонов: Метод обратной задачи // Под ред. С.П.Новикова. М., 1980. 8. Dodd R.K., Morris H.C., Eagleton J. Pertubation theory for the nearly integrable nonlinear equations associated with a modified Zakharov-Shabat Scattering problem//Journ. Phys. A: Mathem, General. 1980. v.13. N8. p.1455-1465.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 515.12+512.58

М.М.Зарічний

ГРУПИ АВТОМОРФІЗМІВ І ФАКТОРИЗАЦІЯ НОРМАЛЬНИХ ФУНКТОРІВ

Нормальні функтори, що діють у категорії $Comp$ /означення наявне у праці [4] / та їхні природні перетворення утворюють категорію $\mathcal{NF}$ [1, 2]. Законність розгляду категорії $\mathcal{NF}$ грунтується на тому, що природні перетворення нормального функтора F у нормальний функтор G параметризуються підмножиною множини неперервних відображень $C(F(Q), G(Q))$ / Q - гільбертовий куб/ за допомогою відображення $\varphi \mapsto \varphi_Q$ [2].

Позначимо через $Aut(F)$ групу всіх автоморфізмів нормального функтора F. Ототожнюючи φ з φ_Q, $Aut(F)$ розглядаємо як підмножину в $C(F(Q), F(Q))^Q$. Оскільки для кожного $\varphi \in Aut(F)$ відображення φ_Q гомеоморфізм, то $Aut(F)$ є топологічною групою в компактно-відкритій топології [5].

<u>Приклади</u>: а/ $Aut(exp) = Aut(exp_n) = \{*\}$;

б/ $Aut((-)^n) = S_n$ /симетрична група/;

в/ $Aut(P_2)$ топологічно ізоморфна групі зростаючих гомеоморфізмів відрізка.

Через $Homeo(X)$ позначимо топологічну групу гомеоморфізмів компакта X /тут і надалі функціональні простори наділяються компактно-відкритою топологією/.

<u>Теорема 1</u>. Нехай X - компакт, F - нормальний функтор, $deg(F) \leq |X|$, якщо $deg(F) < \infty$, і X - нескінченний, якщо $deg(F) = \infty$.