№ 83.59. 7. Теория солитонов: Метод обратной задачи // Под ред. С.П.Новикова. М., 1980. 8. Dodd R.K., Morris H.C., Eaglton J. Pertubation theory for the nearly integrable nonlinear equations associated with a modified Zakharov-Shabat Scattering problem//Journ. Phys. A: Mathem, General. 1980. v. 13. N8. p. 1455-1465.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 515.12+512.58

М.М.Зарічний

ГРУПИ АВТОМОРФІЗМІВ І ФАКТОРИЗАЦІЯ НОРМАЛЬНИХ ФУНКТОРІВ

Нормальні функтори, що діють у категорії $Comp$ /означення наявне у праці [4] / та їхні природні перетворення утворюють категорію $\mathcal{NF}$ [1, 2]. Законність розгляду категорії $\mathcal{NF}$ грунтується на тому, що природні перетворення нормального функтора F у нормальний функтор G параметризуються підмножиною множини неперервних відображень $C(F(Q), G(Q))$ / Q - гільбертовий куб/ за допомогою відображення $\varphi \mapsto \varphi_Q$ [2].

Позначимо через $Aut(F)$ групу всіх автоморфізмів нормального функтора F . Ототожнюючи φ з φ_Q , $Aut(F)$ розглядаємо як підмножину в $C(F(Q), F(Q))^Q$. Оскільки для кожного $\varphi \in Aut(F)$ відображення φ_Q гомеоморфізм, то $Aut(F)$ є топологічною групою в компактно-відкритій топології [5].

Приклади: а/ $Aut(exp) = Aut(exp_n) = \{*\}$;
б/ $Aut((-)^n) = S_n$ /симетрична група/;
в/ $Aut(P_2)$ топологічно ізоморфна групі зростаючих гомеоморфізмів відрізка.

Через $Homeo(X)$ позначимо топологічну групу гомеоморфізмів компакта X /тут і надалі функціональні простори наділяються компактно-відкритою топологією/.

Теорема 1. Нехай X - компакт, F - нормальний функтор, $deg(F) \leq |X|$, якщо $deg(F) < \infty$, і X - нескінченний, якщо $deg(F) = \infty$.

Тоді відображення $\delta_X : Aut(F) \to Homeo(X)$, $\delta_X(\varphi) = \varphi_X$ є топологічним ізоморфізмом на свій образ.

<u>Доведення</u>. Покажемо неперервність відображення δ_X. Зобразимо тихоновський куб I^τ як границю оберненої системи $\underline{\Psi} = \{I^A, p_{AB}; \mathcal{P}_\omega(\tau)\}$, де $\mathcal{P}_\omega(\tau)$ - множина злічених підмножин кардинала τ; $p_{AB} : I^A \to I^B$ - проекція, якщо $A \supset B$. Тоді за неперервністю функтора F одержимо $F(I^\tau) = \underleftarrow{\lim} F(\underline{\Psi}) = \{F(I^A), F(p_{AB}); \mathcal{P}_\omega(\tau)\}$ і $\varphi_{I^\tau} = \underleftarrow{\lim}\{\varphi_{I^A} : F(I^A) \to F(I^A)\}$. Нескладно переконатись, що відображення $\underleftarrow{\lim}$ неперервно відображає підмножину декартового добутку $\Pi\{C(F(I^A), F(I^A)) \mid A \in \mathcal{P}_\omega(\tau)$ у простір $C(F(I^\tau), F(I^\tau))$. Звідси, а також з $I^A \cong Q$, бачимо, що відображення δ_{I^τ} неперервне.

Зафіксуємо вкладення $i : X \to I^\tau$ для деякого τ. З мономорфності функтора F і комутативності діаграми

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(i)} & F(I^\tau) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_X} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{I^\tau}} \\ F(X) & \xrightarrow{F(i)} & F(I^\tau) \end{array}$$

випливає тепер неперервність відображення δ_X.

Нескладно переконатись, що коли X задовольняє умови теореми, то відображення δ_X є неперервним ізоморфізмом на свій образ. Аналогічно до попереднього можна показати неперервність оберненого відображення $\delta_X^{-1} : \delta_X(Aut(F)) \to Aut(F)$. Теорема доведена.

Нехай $G \subset Aut(F)$ - компактна підгрупа. Використовуючи теорему 1, задамо дію групи G на компакті $F(X)$, прийнявши $\varphi x = \varphi_X(x)$ для кожного $\varphi \in G$ та $x \in F(X)$.

<u>Лема</u>. Для кожного неперервного відображення компактів $f : X \to Y$ відображення $F(f) : F(X) \to F(Y)$ - еквіваріантне.

<u>Доведення</u>. Якщо $x \in F(X)$ і $\varphi \in G$, то $\varphi F(f)(x) = \varphi_Y F(f)(x) = F(f)\varphi_X(x) = F(f)\varphi(x)$. Лема доведена.

Позначимо через $F_G(X)$ простір орбіт G -простору $F(X)$. Нехай $q_X : {}^G F(X) \to F_G(X)$ - фактор-відображення. Попередня лема дає змогу для неперервного відображення

$f: X \to Y$ задати неперервне відображення $F_G(f): F_G(X) \to F_G(Y)$ з властивістю $F_G(f)\, q_X = q_Y\, F(f)$. Таким чином, побудовано функтор $F_G: Comp \to Comp$ і природне перетворення $q = \{q_X\}: F \to F_G$. Функтор F_G називається фактор-функтором функтора F за компактною підгрупою $G \subset Aut(F)$.

<u>Теорема 2</u>. Для нормального функтора F і компактної підгрупи $G \subset Aut(F)$ функтор F_G – нормальний.

<u>Доведення</u>. Перевіримо виконання умов з означення нормального функтора. Зауважимо, безпосередньо з означення випливає, що функтор F_G – епіморфний, зберігає вагу, точку і порожню множину.

Нехай $f: X \to Y$ – мономорфізм у категорії $Comp$, x_1, x_2 належать різним орбітам G-простору $F(X)$. Тоді $\varphi_X(x_1) \neq x_2$ для кожного $\varphi \in G$, а тому $\varphi_Y F(f)(x_1) = F(f)\varphi_X(x_1) \neq F(f)(x_2)$, звідки одержуємо, що точки $F(f)(x_1)$ і $F(f)(x_2)$ належать різним орбітам G-простору $F(Y)$. Тому $F_G(f)$ – вкладення і F_G – мономорфний функтор.

Нехай $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_{\alpha\beta}; A\}$ – обернена система в категорії $Comp$ над напрямленою множиною A і $(X, p_\alpha) = \varprojlim \mathcal{S}$. Тоді $(F(X), F(p_\alpha)) = \varprojlim F(\mathcal{S})$, а $(Y, r_\alpha) = \varprojlim F_G(\mathcal{S})$ і $h: F_G(X) \to Y$ – обернена границя відображень $F_G(p_\alpha): F_G(X) \to F_G(X_\alpha)$, $\alpha \in A$. З неперервності функтора F випливає сюр'єктивність відображення h.

Нехай $x_1, x_2 \in F(X)$ і $G(x_1) \neq G(x_2)$. Тоді $G(x_1) \cap G(x_2) \neq \emptyset$, і з компактності $F(X)$ випливає існування $\alpha \in A$ такого, що $F(p_\alpha)(G(x_1)) \cap F(p_\alpha)(G(x_2)) = \emptyset$. Звідси $F_G(p_\alpha)\, q_X(x_1) \neq F_G(p_\alpha)\, q_X(x_2)$ і h – ін'єктивне відображення, а отже, – гомеоморфізм. Отже, доведена неперервність функтора F_G.

Властивість збереження прообразів функтором, очевидно, полягає в збереженні функтором універсальних квадратів виду

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_2} & A \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

де i - вкладення. Розглянемо діаграму

$$
\begin{tikzcd}
F_G(Z) \arrow[r, "F_G(p_2)"] \arrow[d, tail, "F_G(p_1)"'] & F_G(A) \arrow[d, tail, "F_G(i)"] \\
F_G(X) \arrow[r, "F_G(f)"] & F_G(Y)
\end{tikzcd}
\qquad (*)
$$

Якщо $x \in F_G(X)$ і $a \in F_G(A)$ такі, що $F_G(f)(x) = F_G(i)(a)$, то нехай $b \in F(A)$ - така точка, що $q_A(b) = a$, $y \in F(X)$ - точка, коли $q_X(y) = x$. Тоді $F(i)(G(b)) = F(f)(G(y))$. За властивістю збереження прообразів функтором F існує $z \in F(Z)$ таке, що $F(p_1)(z) \in G(y)$, $F(p_2)(z) \in G(b)$. Одержуємо $F_G(p_1) q_Z(z) = q_X(y) = x$, $F_G(p_2) q_Z(z) = q_X(b) = a$, звідки діаграма $(*)$ - універсальний квадрат. Отже, доведена властивість збереження прообразів функтором F_G. Теорема доведена.

Твердження. Для кожного $x \in F(X)$ $\operatorname{supp}_{F_G} q_X(x) = \operatorname{supp}_F(x)$.

Наслідок. $\deg(F_G) = \deg(F)$.

Частковим випадком наведених вище побудов є конструкція функторів SP^n_G [3].

І. Заричный М.М. О свойствах нормальных функторов // Пятый Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. 1985. С. 96-97. 2. Зарічний М.М. Категорія нормальних функторів // Вісн. Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат. 1986. Вип. 25. С. 52-56. 3. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q -многообразия // Успехи мат.наук. 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 177-195. 4. Щепин Е.В. Функторы инесчетные степени компактов // Успехи мат.наук. 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 3-62. 5. Arens R.F. Topologies for homeomorphism groups // Amer. J. Math. 1946. vol. 68. p. 593-610.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86