УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.В.Ковальчук, А.І.Пилипович

ТЕМПЕРАТУРНІ ДЕФОРМАЦІЇ У ПЛАСТИНЦІ ПРИ ЗАЛЕЖНОМУ ВІД КООРДИНАТИ КОЕФІЦІЄНТІ ТЕПЛОВІДДАЧІ З КРАЙОВОЇ ПОВЕРХНІ

Розглянемо вільну від зовнішнього навантаження півбезмежну пластинку товщини 2δ, яка нагрівається по вузькій області $|y-v_y\tau| \le h<\delta$, $x=0$ зовнішнім середовищем температури $t_0=const$, що рухається з постійною швидкістю v_y у додатному напрямку осі ординат. Через поверхні $z=\pm\delta$ і $x=0$ здійснюється конвективний теплообмін із зовнішніми середовищами відповідно нульової температури і температури $t_c=t_1+(t_0-t_1)N(y_1)$. Тут τ – час; t_1 – температура середовища, яка омиває частини поверхні $x=0$ за межами області нагріву;

$$N(y_1)=S_-(y_1+h)-S_+(y_1-h);\ y_1=y-v_y\tau;\ x_1=x;$$

$S_\pm(\xi)$ – асиметричні одиничні функції [1].

Температурні деформації у пластинці, які одержані за відомими формулами [2] при допомозі знайдених у праці [3] виразів температурного поля і напружень, мають вигляд

$$e_{xx}=\alpha_t\{m_0 f_5(x_1,y_1)+m_1[\exp(-\varkappa x_1)+\mu\varkappa^{-1}]\},$$

$$e_{yy}=\alpha_t\{m_0 f_4(x_1,y_1)+m_1[\exp(-\varkappa x_1)-\varkappa^{-1}]\},$$

$$e_{xy}=\alpha_t(1+\mu)m_0 f_2(x_1,y_1), \qquad (1)$$

де $m_0=2[h_0t_0-m_1(\varkappa+h_0)]/\pi[1+(h_0-h_1)I]$;

$\varkappa=\alpha_z/\lambda\delta$; $m_1=h_1t_1/(\varkappa+h_1)$; $h_i=\alpha_i/\lambda$ $(i=0,1)$;

$$I = \frac{2}{\pi\lambda}\int_0^\infty \frac{(h_1+\gamma_+)\sin^2 h\eta}{\eta^2[(h_1+\gamma_+)^2+\gamma_-^2]}\,d\eta;\ \omega = v_y/2a;$$

$$\gamma_\pm^2 = \left[\sqrt{(\varkappa^2+\eta^2)^2+4\omega^2\eta^2} \pm (\varkappa^2+\eta^2)\right]/2;$$

α_z - коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $z=\pm\delta$; α_0 - коефіцієнт тепловіддачі з області нагріву поверхні $x=0$;
α_1 - з іншої частини цієї поверхні; a - коефіцієнт температуропровідності; λ - коефіцієнт теплопровідності; α_t - температурний коефіцієнт лінійного розширення; μ - коефіцієнт Пуассона;

$$f_3(x_1,y_1) = \int_0^\infty g(\eta)\sin h\eta\{\exp(-\gamma_+x_1)[\ell^-\sin(\gamma_-x_1+\eta y_1)+$$
$$+\ell^+\cos(\gamma_-x_1+\eta y_1)] - \exp(-\eta x_1)[(\ell^-(1-\eta x_1)+$$
$$+n^-\eta^2x_1)\sin\eta y_1 + (\ell^+(1-\eta x_1)+n^+\eta^2x_1)\cos\eta y_1]\}\,d\eta;$$

$$f_4(x_1,y_1) = \int_0^\infty g(\eta)\sin h\eta\{\eta^{-1}\exp(-\gamma_+x_1)[((h_1+\gamma_+)(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)-$$
$$-\mu n^-\eta^2-K^-)\cos(\gamma_-x_1+\eta y_1) - (\gamma_-(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)-\mu n^+\eta^2-K^+)\times$$
$$\times\sin(\gamma_-x_1+\eta y_1)] - \exp(-\eta x_1)[(\mu\eta(n^+-m^+x_1)+\ell^+(2-\eta x_1)-$$
$$-n^+(1-\eta x_1)\eta)\sin\eta y_1 - (\mu\eta(n^-+m^-x_1)+\ell^-(2-\eta x_1)-$$
$$-n^-(1-\eta x_1)\eta)\cos\eta y_1]\}\,d\eta;$$

$$f_5(x_1,y_1) = \int_0^\infty g(\eta)\sin h\eta\{\eta^{-1}\exp(-\gamma_+x_1)[((h_1+\gamma_+)(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)+$$
$$+n^-\eta^2+\mu K^-)\cos(\gamma_-x_1+\eta y_1) - (\gamma_-(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)+n^+\eta^2+$$

$$+\mu k^{+})\sin(\gamma_- x_1+\eta y_1)]+\exp(-\eta x_1)[(\eta(n^{+}-m^{+}x_1)+$$

$$+\mu(\ell^{+}(2-\eta x_1)-n^{+}(1-\eta x_1)\eta))\sin\eta y_1-\eta(n^{-}+m^{-}x_1)+$$

$$+\mu(\ell^{-}(2-\eta x_1)-n^{-}(1-\eta x_1)\eta))\cos\eta y_1]\}d\eta;$$

$$g(\eta)=[(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)((h_1+\gamma_+)^2+\gamma_-^2)]^{-1};$$

$$n^{+}=\varkappa^2\gamma_-+2\omega(h_1+\gamma_+)\eta;\ \ell^{+}=2\omega\gamma\eta-h_1\varkappa^2\gamma_-;$$

$$n^{-}=\varkappa^2(h_1+\gamma_+)-2\omega\gamma_-\eta;\ \ell^{-}=2\omega h_1\gamma_-\eta+\varkappa^2\gamma;$$

$$k^{+}=b\gamma_-+2\omega(h_1+\gamma_+)\eta^3;\ b=\varkappa^4+(\varkappa^2+4\omega^2)\eta^2;$$

$$k^{-}=b(h_1+\gamma_+)-2\omega\gamma_-\eta^3;\quad \gamma=(h_1+\gamma_+)\gamma_++\gamma_-^2;$$

$$m^{+}=(h_1-\eta)[2\omega(\eta-\gamma_+)\eta-\varkappa^2\gamma_-]-4\varkappa^2\omega\eta;$$

$$m^{-}=(h_1-\eta)[2\omega\gamma_-\eta+\varkappa^2(\eta-\gamma_+)]+4\omega^2\eta^2-\varkappa^4.$$

Якщо в області $|y_1|\leq h$ поверхні $x=0$ задається температура $t_0=const$, а поза нею виконується умова теплообміну Ньютона, то розв"язок задачі одержуємо з формул /1/ при $h_0\longrightarrow\infty$ у вигляді

$$\square\quad e_{xx}=\alpha_t\{Q_1 f_5(x_1,y_1)+m_1[\exp(-\varkappa x_1)+\mu\varkappa^{-1}]\};$$

$$e_{yy} = \alpha_t \left\{ Q_1 f_4(x_1, y_1) + m_1 [\exp(-\varkappa x_1) - \varkappa^{-1}] \right\};$$

$$e_{xy} = \alpha_t (1+\mu) Q_1 f_3 (x_1, y_1), \qquad /2/$$

де $Q_1 = 2(t_0 - m_1)/\pi I$.

Якщо через область $|y_1| \leq h$ поверхні $x=0$ здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем температури $t_0 = const$, а поза нею поверхня $x=0$ теплоізольована, то розв"язок задачі одержуємо з формул /1/ при $h_1 = 0$ у вигляді

$$e_{xx} = \alpha_t Q_0 \varphi_5 (x_1, y_1); \quad e_{yy} = \alpha_t Q_0 \varphi_4 (x_1, y_1);$$

$$e_{xy} = \alpha_t (1+\mu) Q_0 \varphi_3 (x_1, y_1), \qquad /3/$$

де

$$\varphi_3(x_1, y_1) = \int_0^\infty g_1(\eta) \sin h\eta \{ \exp(-\gamma_+ x_1) [l_1^- \sin(\gamma_- x_1 + \eta y_1) +$$

$$+ l_1^+ \cos(\gamma_- x_1 + \eta y_1)] - \exp(-\eta x_1) [(l_1^- (1 - \eta x_1) + n_1^- \eta^2 x_1) \sin \eta y_1 +$$

$$+ (l_1^+ (1 - \eta x_1) + n_1^+ \eta^2 x_1) \cos \eta y_1] \} d\eta;$$

$$\varphi_4 (x_1, y_1) = \int_0^\infty g_1(\eta) \sin h\eta \{ \eta^{-1} \exp(-\gamma_+ x_1) \times$$

$$\times [(\gamma_+ (\varkappa^4 + 4\omega^2 \eta^2) - \mu n_1^- \eta^2 - k_1^-) \cos(\gamma_- x_1 + \eta y_1) -$$

$$- (\gamma_- (\varkappa^4 + 4\omega^2 \eta^2) - \mu n_1^+ \eta^2 - k_1^+) \sin(\gamma_- x_1 + \eta y_1)] -$$

$$- \exp(-\eta x_1) [(\mu\eta (n_1^+ - m_1^+ x_1) + l_1^+ (2 - \eta x_1) -$$

$$- n_1^+ (1 - \eta x_1) \eta) \sin \eta y_1 - (\mu\eta (n_1^- + m_1^- x_1) +$$

$$+\ell_1^-(2-\eta x_1)-n_1^-(1-\eta x_1)\eta)\cos\eta y_1]\}\,d\eta;$$

$$\varphi_5(x_1,y_1)=\int_0^\infty g_1(\eta)\sin h\eta\{\eta^{-1}\exp(-\gamma_+ x_1)\times$$

$$\times[(\gamma_+(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)+n_1^-\eta^2+\mu k_1^-)\cos(\gamma_- x_1+\eta y_1)-$$

$$-(\gamma_-(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)+n_1^+\eta^2+\mu k_1^+)\sin(\gamma_- x_1+\eta y_1)]+$$

$$+\exp(-\eta x_1)[(\eta(n_1^+-m_1^+x_1)+\mu(\ell_1^+(2-\eta x_1)-$$

$$-n_1^+(1-\eta x_1)\eta))\sin\eta y_1-(\eta(n_1^-+m_1^-x_1)+$$

$$+\mu(\ell_1^-(2-\eta x_1)-n_1^-(1-\eta x_1)\eta))\cos\eta y_1]\}\,d\eta;$$

$$Q_0=2h_0t_0/\pi(1+h_0I_0);\quad I_0=\frac{2}{\pi h}\int_0^\infty\frac{\gamma_+\sin^2 h\eta}{\eta^2 p}\,d\eta;$$

$$p=\sqrt{(\varkappa^2+\eta^2)^2+4\omega^2\eta^2};\quad g_1(\eta)=[(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)p]^{-1};$$

$$n_1^+=\varkappa^2\gamma_-+2\omega\eta\gamma_+;\quad n_1^-=\varkappa^2\gamma_+-2\omega\eta\gamma_-;$$

$$k_1^+=b\gamma_-+2\omega\eta^3\gamma_+;\quad k_1^-=b\gamma_+-2\omega\eta^3\gamma_-;$$

$$\ell_1^+=2\omega p\eta;\quad m_1^+=[\varkappa^2\gamma_--2\omega(\eta-\gamma_+)\eta-4\varkappa^2\omega]\eta;$$

$$\ell_1^-=\varkappa^2 p;\quad m_1^-=[2\omega(2\omega-\gamma_-)\eta-\varkappa^2(\eta-\gamma_+)]\eta-\varkappa^4.$$

Якщо в області $|y_1| \le h$ поверхні $x=0$ задається тепловий потік $q = const$, а частини $|y_1| > h$ поверхні $x=0$ і бічні поверхні $z = \pm\delta$ теплоізольовані, то деформації знаходимо з формул /3/ при $h_0 t_0 = q/\lambda$, $h_0 = 0$, $\varkappa = 0$ у вигляді

$$\square\; e_{xx} = \frac{\alpha_t q}{\pi\lambda\omega}\int_0^\infty \frac{\sin h\eta}{\eta^2\sqrt{\eta^2+4\omega^2}}\Big\{\eta\exp(-\eta x_1)\times$$

$$\times\Big[\big(\eta(\eta-\beta_+)x_1+(1-\mu(1-\eta x_1))\beta_+ + \mu\sqrt{\eta^2+4\omega^2}\times$$

$$\times(2-\eta x_1)\big)\sin\eta y_1 - \big(\eta(2\omega-\beta_-)x_1-(1-\mu(1-\eta x_1))\beta_-\big)\cos\eta y_1\Big] -$$

$$-(1+\mu)\exp(-\beta_+ x_1)\Big[(\eta\beta_+ + 2\omega\beta_-)\sin(\beta_- x_1+\eta y_1)+$$

$$+(\eta\beta_- - 2\omega\beta_+)\cos(\beta_- x_1+\eta y_1)\Big]\Big\}d\eta;$$

$$e_{yy} = \frac{\alpha_t q}{\pi\lambda\omega}\int_0^\infty \frac{\sin h\eta}{\eta\sqrt{\eta^2+4\omega^2}}\Big\{\exp(-\eta x_1)\Big[\big((1-\mu-\eta x_1)\beta_+ -$$

$$-\mu(\eta-\beta_+)\eta x_1 - \sqrt{\eta^2+4\omega^2}(2-\eta x_1)\big)\sin\eta y_1 +$$

$$+\big((1-\mu-\eta x_1)\beta_- + \mu(2\omega-\beta_-)\eta x_1\big)\cos\eta y_1\Big]+$$

$$+(1+\mu)\exp(-\beta_+ x_1)\Big[\beta_+\sin(\beta_- x_1+\eta y_1)+$$

$$+\beta_-\cos(\beta_- x_1+\eta y_1)\Big]\Big\}d\eta;$$

$$e_{xy} = \frac{\alpha_t(1+\mu)q}{\pi\lambda\omega}\int_0^\infty \frac{\sin h\eta}{\eta\sqrt{\eta^2+4\omega^2}}\Big\{\exp(-\eta x_1)\times$$

$$\times\left[\beta_{-}\eta x_1 \sin\eta y_1-\left(\sqrt{\eta^2+4\omega^2}\,(1-\eta x_1)+\beta_{+}\eta x_1\right)\cos\eta y_1\right]+$$

$$+\sqrt{\eta^2+4\omega^2}\exp(-\beta_{+}x_1)\cos(\beta_{-}x_1+\eta y_1)\Big\}d\eta\,,$$

/4/

де $\beta_{\pm}^2=\eta\left(\sqrt{\eta^2+4\omega^2}\pm\eta\right)/2.$

Температурне поле та зумовлені ним температурні напруження для останнього випадку одержані у праці [4].

I. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984. 2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., 1972. 3. Температурные напряжения в пластине при фрикционном упрочнении / Коляно Ю.М., Бабей Ю.И., Дидык В.З. и др. // Физ.-хим. механика материалов. 1982. № 4. С. 75-8I. 4. Температурные напряжения в пластине при заданном тепловом потоке / Бабей Ю.И., Дидык В.З., Кордуба Б.М. и др. // Физ.-хим. механика материалов. 1985. № 3. С. 82-84.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86