УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ВИПАДКОВА КОНТИНУАЛЬНА АМПЛІФІКАЦІЯ

Нехай додатна випадкова змінна ξ з густиною $f(t)$ має відбиття $\varphi(z)$, що є аналітичною функцією у деякій смузі

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}f(t)dt,\ 1-\alpha<Re z<1+\beta,\ (\alpha>0,\ \beta>0). \qquad /1/$$

Тоді за зворотною формулою для відбиття [1]

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z}\varphi(z)dz,\ t>0,\ c\in(1-\alpha,1+\beta). \qquad /2/$$

Добуток $\xi\eta$ двох незалежних додатних випадкових змінних ξ та η відповідно з густинами $f(t)$ і $g(t)$, що характеризуються відбиттям $\varphi(z)$, $1-\alpha<Re z<1+\beta$ та $\psi(z)$, $1-A<Re z<1+B$, / $A>0$, $B>0$ / має густину

$$f(t)\boxdot g(t)=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{\tau}\right)g(\tau)\frac{d\tau}{\tau},\ t>0 \qquad /3/$$

і відбиття $\varphi(z)\psi(z)$ у спільній смузі аналітичності $1-min(\alpha,A)<Re z<1+min(\beta,B)$. Густина /3/ називається амліфікацією /підсиленням/ густин $f(t)$ і $g(t)$. Амліфікацію двох однакових густин позначимо символом

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{2},\quad f(t)\Big|_{\boxdot}^{2}=f(t)\boxdot f(t),\ t>0. \qquad /4/$$

Покажемо, що бувають випадки, коли символи

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell},\quad f(t)\Big|_{\boxdot}^{\varkappa},\quad f(t)\Big|_{\boxdot}^{\lambda},$$

де ℓ - додатна стала; $\varkappa$ - невід"ємна цілочисельна випадкова змінна; λ - невід"ємна абсолютно неперервна випадкова змінна, мають сенс і представляють густину розподілу ймовірностей.

1. Континуальна амліфікація. Нехай відбиття /1/ не має нулів у смузі аналітичності. Тоді для довільної додатної сталої ℓ вираз $\varphi^{\ell}(z)$ розуміємо як $e^{\ell \ln\varphi(z)}$, де $\ln\varphi(z)$ - головне значення логарифму. Густину, відповідну відбиттю $\varphi^{\ell}(z)$,

$\ell > 0$ назвемо континуальною ампліфікацією порядку ℓ густини $f(t)$ та позначимо через $f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell}$. Зауважимо, що при $\ell = n$, $(n=2,3,\dots)$ вираз $\varphi^n(z)$ має сенс без ніяких обмежень на $\varphi(z)$ та $f(t)\Big|_{\boxdot}^{n}$ є густиною добутку n незалежних однаково розподілених випадкових змінних з густиною $f(t)$. Очевидно, що континуальна ампліфікація при довільних ℓ_1 та ℓ_2 задовольняє співвідношення

$$\left(f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell_1}\right) \boxdot \left(f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell_2}\right) = f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell_1+\ell_2}.$$

Густина $f(t)$ з відбиттям $\varphi(z)$ називається твірною.

2. <u>Випадкова ампліфікація</u>. Нехай $\{\xi_K\}$, $(K=1,2,\dots)$ - послідовність взаємнонезалежних абсолютно неперервних додатних і однаково розподілених випадкових змінних з густиною $f(t)$ і відбиттям /1/, а $\varkappa$ - невід"ємна цілочисельна випадкова змінна, незалежна від усіх ξ_K, $(K=1,2,\dots)$, що має генератрису

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{\varkappa = n\} z^n, \quad |z| < 1+\gamma, \; \gamma > 0.$$

Утворимо добуток випадкового числа $\varkappa$ випадкових змінних ξ_K

$$\eta_{\varkappa} = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_{\varkappa}, \quad (\varkappa = 1,2,\dots), \quad \eta_0 = 1.$$

Згідно з формулою повної ймовірності функцію розподілу випадкової змінної $\eta_{\varkappa}$ записуємо як

$$\mathcal{P}\{\eta_{\varkappa} \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{\varkappa = n\} \mathcal{P}\{\eta_n \le t\}, \quad t > 0.$$

Звідси, упохіднюючи по t, одержуємо густину

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{\varkappa} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{\varkappa = n\} f(t)\Big|_{\boxdot}^{n}, \quad f(t)\Big|_{\boxdot}^{1} = f(t), \quad f(t)\Big|_{\boxdot}^{0} = \delta(t-1), \qquad /5/$$

де $\delta(t)$ - імпульсна функція Дірака. Відбиття випадкової ампліфікації /5/ набирає вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{\varkappa = n\} \varphi^n(z) = G(\varphi(z)), \quad \begin{cases} 1-\alpha < \operatorname{Re} z < 1+\beta \\ |\varphi(z)| < 1+\gamma, \; \gamma > 0. \end{cases} \qquad /6/$$

Густина $f(t)$ з відбиттям $\varphi(z)$ називається твірною, а розподіл $\mathscr{H}$ з генератрисою $G(z)$ – керуючим.

3. Випадкова континуальна ампліфікація. Нехай відбиття φ^{ℓ} не має нулів у смузі аналітичності. Згідно з п.I густина $f(t)\Big|_{\square}^{\ell}$ описує деяку випадкову змінну η_ℓ, $\ell>0$. Нехай далі λ незалежна від усіх η_ℓ невід"ємна випадкова змінна з густиною $h(\ell)$ і зображенням

$$\psi(z)=\int_0^\infty e^{-z\ell}h(\ell)d\ell,\ Re\,z>-a,\ a\geq 0. \qquad /7/$$

Утворимо континуальний добуток η_λ випадкового числа λ випадкових змінних η_ℓ. За формулою повної ймовірності функція розподілу η_λ дорівнює

$$\mathcal{P}\{\eta_\lambda\leq t\}=\int_0^\infty h(\ell)\mathcal{P}\{\eta_\ell\leq t\}d\ell.$$

Звідси, упохіднюючи по t, дістаємо густину η_λ

$$f(t)\Big|_{\square}^{\lambda}=\int_0^\infty h(\ell)f(t)\Big|_{\square}^{\ell}d\ell,\ t>0. \qquad /8/$$

Випадкова континуальна λ – ампліфікація /8/ є сумішшю континуальних ампліфікацій $f(t)\Big|_{\square}^{\ell}$ з керуючою густиною $h(\ell)$. Відбиття випадкової континуальної λ – ампліфікації густини $f(t)$ набуває вигляду

$$\int_0^\infty \varphi^{\ell}(z)h(\ell)d\ell=\psi(-\ln\varphi(z)),\ \begin{cases}\max(1-\alpha,-a)<Re\,z<1+\beta,\\ Re(\ln\varphi(z))<a,\ a\geq 0,\end{cases} \qquad /9/$$

де $\ln\varphi(z)$ – головне значення логарифма. Густина $f(t)$ з відбиттям $\varphi(z)$ називається твірною, а розподіл λ зі зображенням $\psi(z)$ – керуючим.

4. Приклади. 1/ Знайти континуальну ампліфікацію порядку ℓ твірної густини

$$f(t)=\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}},\ 1<t,\ (\alpha>0). \qquad /10/$$

Відбиття /4/ випадкової змінної з густиною /I0/

$$\varphi(z)=\frac{\alpha}{1+\alpha-z}, \quad Re\, z<1+\alpha. \qquad /11/$$

Оскільки $\varphi(z)\neq 0$ у півплощині аналітичності, то при довільному $\ell>0$ має сенс відбиття

$$\varphi^{\ell}(z)=\left(\frac{\alpha}{1+\alpha-z}\right)^{\ell}, \quad Re\, z<1+\alpha.$$

Звідси континуальна амплiфiкація порядку ℓ твірної густини /I0/

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell}=\frac{\alpha^{\ell}(\ln t)^{\ell-1}}{\Gamma(\ell)\,t^{1+\alpha}}, \quad 1<t, \ (\alpha>0, \ell>0). \qquad /I2/$$

2. Записати випадкову амплiфiкацію твірної густини /I0/ при пуасонівському керуючому розподілі

$$\mathcal{P}\{\varkappa=n\}=e^{-\mu}\frac{\mu^{n}}{n!}, \quad (n=0,1,2,\ldots). \qquad /I3/$$

За формулами /5/, /I2/ і /I3/

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell}=e^{-\mu}\delta(t-1)+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\mu}\frac{\mu^{n}}{n!}\cdot\frac{\alpha^{n}(\ln t)^{n-1}}{(n-1)!\,t^{1+\alpha}}=$$

$$=e^{-\mu}\left\{\delta(t-1)+\frac{1}{t^{1+\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha\mu}{\ln t}}\,J_1\left(2\sqrt{\alpha\mu\ln t}\right)\right\}, \quad t>1,$$

де

$$J_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!\,(k+1)!}.$$

3. Знайти випадкову континуальну амплiфiкацію при твірній густині

$$f(t)=\frac{1}{t\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}},\quad t>0$$

та керуючій густині

$$h(\ell)=\frac{1}{2}\,e^{-\frac{\ell}{2}},\quad \ell>0.$$

За формулами /1/ і /7/ тут

$$\varphi(z)=e^{\frac{1}{2}(z-1)^2},\ \operatorname{Re} z<\infty;\quad \Psi(z)=\frac{1}{2z+1},\ \operatorname{Re} z>-\frac{1}{2}.$$

Отже, за формулою /9/ відбиття випадкової континуальної ампліфікації

$$\Psi(-\ln\varphi(z))=\frac{1}{1-(z-1)^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2-z},\quad 0<\operatorname{Re} z<2.$$

Звідси за зворотною формулою /2/

$$f(t)\Big|_{\Theta}^{\lambda}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<t\le 1\\ \frac{1}{2t^2}, & 1\le t<\infty.\end{cases}$$

Зазначимо, що впроваджені ампліфікації розширюють клас розподілів ймовірностей. Розглянуті ампліфікації є аналогами відповідних згорток [2, 3].

1. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття // Вісн. Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат. 1978. Вип. 13. С. 47-53. 2. К в і т І.Д. Континуальна згортка // Вісн.Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат. 1972. Вип. 7. С. 10-18. 3. К в і т І.Д. Випадкова континуальна згортка // Вісн.Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат. 1973. Вип. 8. С. 20-29.

Стаття надійшла до редколегії 04.11.86