УДК 517.535.4

О.Б.Скасків

ПРИПУЩЕННЯ МАКІНТАЙРА ПРО ВІДСУТНІСТЬ СКІНЧЕННИХ АСИМПТОТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ У ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ З ЛАКУНАМИ ФЕЙЄРА

Для цілої функції f, заданої лакунарним степеневим рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \qquad /1/$$

Макінтайр [3] висловив припущення, що умова Фейєра

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty \qquad /2/$$

достатня для відсутності у функції f скінченних асимптотичних значень. Хейман [2] показав, що умова

$$\frac{n}{\lambda_n} \ln \lambda_n (\ln\ln\lambda_n)^{2+q} = o(1)\ (n\to\infty),\ q>0, \qquad /3/$$

забезпечує відсутність скінченних асимптотичних значень у цілої функції виду /1/. Доведено [2], що при виконанні умови /3/

$$\ln M(r) = (1+o(1)) \ln m(r) \qquad /4/$$

при $r\to+\infty$ зовні множини E нульової логарифмічної щільності, тобто такої, що $\int_{E\cap[1,r]} d\ln t = o(\ln r)\ (r\to\infty)$; тут $M(r)=\max\{|f(z)|: |z|=r\}$ і $m(r)=\min\{|f(z)|: |z|=r\}$. Незначне посилення деяких допоміжних результатів із праці [2], а також застосування ідей з праці [1] дає змогу довести таку теорему.

Теорема 1. Якщо для цілої функції f виду /1/ виконується умова $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln^+ \ln\lambda_n)/\lambda_n < \infty$, то співвідношення /4/ виконується при $r\to+\infty$ зовні деякої множини нульової логарифмічної щільності.

Розглядаючи клас цілих функцій виду /1/, який визначається умовою на зростання

$$\ln\ln\ln M(r) = O(\ln r)\ (r\to+\infty), \qquad /5/$$

вдається довести таке твердження.

Теорема 2. Якщо для цілої функції виду /1/ виконуються умови /2/ і /5/, то співвідношення /4/ виконується при $r \to +\infty$ зовні деякої множини нульової логарифмічної щільності.

Із теореми 2 випливає справедливість припущення Макінтайра для цілих функцій з класу, який визначається умовою /5/.

Застосування значно тонкіших, основаних на ідеях праці [4], міркувань, ніж ті, що використовуються при доведенні теорем 1 і 2, дає змогу довести справедливість ще однієї теореми.

Теорема 3. Якщо для цілої функції виду /1/ виконується $\varliminf_{r \to +\infty} (\ln \ln \ln M(r))/\ln r < +\infty$, то із виконання умови /2/ випливає справедливість співвідношення /4/ при $r \to +\infty$ зовні деякої множини E такої, що $\varliminf_{r \to +\infty} \left(\int_{E \cap [1,r]} d \ln t\right)/\ln r = 0$.

1. Шеремета М.Н. Рост в углу целых функций, заданных лакунарными степенными рядами // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 3. С. 558-560. 2. Hayman W.K. Angular value distribution of power series with gaps // Proc. Lond. Math. Soc. 1972. Vol. 24. N 4. P. 590-624. 3. Macintyre A.J. Value distribution and power series with moderate gaps // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1952. Vol. 2. p. 286-296. 4. Fenton P.C. Some results of Wiman-Valyron type for integral functions of finite lower order // Ann. of Math. 1976. Vol. 103. N 2. p. 237-252.

Стаття надійшла до редколегії 04.02.86