УДК 519.21

Б. І. Копитко

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКЛЕЮВАННЯ ДВОХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В R^m

Нехай в областях $\mathcal{D}_1 = \{x : x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m, x_m < 0\}$ і $\mathcal{D}_2 = \{x : x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m, x_m > 0\}$ скінченномірного евклідового простору R^m $(m \geq 2)$ задані відповідно два дифузійні процеси з нульовими векторами переносу та постійними матрицями дифузії $B_1 = (b_{kj}^{(1)})$ і $B_2 = (b_{kj}^{(2)})$, елементи яких задовольняють умову

$$a) \ \lambda_1^{(i)} \sum_{j=1}^{m} x_j^2 \leq \sum_{k,j=1}^{m} b_{kj}^{(i)} x_k x_j \leq \lambda_2^{(i)} \sum_{j=1}^{m} x_j^2, \quad 0 < \lambda_1^{(i)} \leq \lambda_2^{(i)},$$

$$i = 1,2, \ \forall x \in R^m, \ b_{kj}^{(i)} = b_{jk}^{(i)}.$$

Нас цікавитимуть неперервні процеси Феллера в R^m такі, що в області $\mathcal{D}_i$, $i = 1,2$ вони суміщаються із заданим дифузійним процесом.

Для розв"язування сформульованої задачі використаємо методи теорії параболічних рівнянь з розривними коефіцієнтами. Шуканий клас процесів будуємо за допомогою півгрупи операторів T_t, $t > 0$, дія яких на довільну дійсну обмежену вимірну функцію $\varphi(x)$, $x \in R^m$ визначається формулою

$$T_t \varphi(x) = \int_{R^m} g_i(t, x-y) \varphi(y) dy + \int_0^t d\tau \int_{R^{m-1}} g_i(t-\tau, x'-y', x_m) V_i(\tau, y', \varphi) dy',$$

$$x = (x', x_m) \in \mathcal{D}_i, \ i = 1,2, \qquad /1/$$

де $(t > 0, x, y \in R^m)$

$$g_i(t, x, y) = g_i(t, x-y) = (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} (\det B_i)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}(B_i^{-1}(y-x), y-x)\right\} -$$

фундаментальний розв"язок параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m} b_{kj}^{(i)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} = 0, \qquad /2/$$

а V_1 і V_2 - невідомі функції, які визначаються з умов спряження на поверхні $R^{m-1} = \{x : x \in R^m, x_m = 0\}$:

$$\begin{cases} T_t\,\varphi(x',-0) = T_t\,\varphi(x',+0), \\ q_1\dfrac{\partial T_t\,\varphi(x',-0)}{\partial N_1} + q_2\dfrac{\partial T_t\,\varphi(x',+0)}{\partial N_2} = 0,\ t>0,\ x'\in R^{m-1}. \end{cases} \qquad /3/$$

Тут q_1 і q_2 – задані дійсні числа; N_i, $i=1,2$ – вектор конормалі. У нашому випадку $N_i = B_i\cdot\nu_{R^{m-1}}$, де $\nu=(0,\ldots,0,1)$ – одиничний вектор нормалі до поверхні R^{m-1}.

З теорії параболічних рівнянь відомо, що у випадку, коли $\varphi(x)$ обмежена і неперервна на R^m, а $V_i(t,x',\varphi)$ обмежена при $t\geqslant 0$, $x'\in R^{m-1}$, то функція $T_t\,\varphi(x)$ задовольнятиме в області $t>0,\ x\in D_i$, $i=1,2$ рівняння /2/ і початкову умову

$$\lim_{t\downarrow 0} T_t\,\varphi(x) = \varphi(x).$$

Враховуючи співвідношення для $\dfrac{\partial T_t\,\varphi(x',\mp 0)}{\partial N_i}$, що випливають з формули про скачок конормальної похідної від потенціалу простого шару [3], із умов /3/ одержуємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду відносно невідомих V_1 і V_2:

$$\int_0^t d\tau \int_{R^{m-1}} [q_1 g_2(t-\tau,x'-y',0) - q_2 g_1(t-\tau,x'-y',0)]\,V_i(\tau,y',\varphi)\,dy' = f_i(t,x'),$$
$$i=1,2, \qquad /4/$$

де

$$f_i(t,x') = q_{3-i}\,\Phi(t,x',\varphi) - \int_0^t d\tau \int_{R^{m-1}} g_{3-i}(t-\tau,x'-y',0)\,\Psi(\tau,y',\varphi)\,dy';$$

$$\Phi(t,x',\varphi) = \int_{R^m} [g_1(t,x'-y',y_m) - g_2(t,x'-y',y_m)]\,\varphi(y)\,dy;$$

$$\Psi(t,x',\varphi) = \int_{R^m} \left[q_1\frac{\partial g_1(t,x'-y',y_m)}{\partial N_1} + q_2\frac{\partial g_2(t,x'-y',y_m)}{\partial N_2}\right]\varphi(y)\,dy.$$

Далі, ввівши позначення $\gamma_i = \dfrac{q_i}{(B_{mm}^{(3-i)})^{1/2}}$, $i=1,2$, припускаємо, що завжди виконується умова

$$\gamma_1^2 > \max\left(\gamma_2^2, \frac{\lambda_2^{(2)}}{\lambda_1^{(1)}}\gamma_2^2\right) \text{ або } \gamma_1^2 < \min\left(\gamma_2^2, \frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_2^{(1)}}\gamma_2^2\right). \qquad /5/$$

Для перетворення системи рівнянь /4/ введемо оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(x',t)f = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\sum_{\ell=1}^{2}\gamma_\ell\,\mu_\ell(x',t)\int_0^t d\tau\int_{R^{m-1}} G(t-\tau,x'-y')\times$$
$$\times\left(\mathcal{E}_{3-\ell}(y',\tau)f\right)dy',\quad x'\in R^{m-1},\ t>0,$$

де μ_ℓ - рівномірно параболічний оператор,

$$\mu_\ell = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1} C_{kj}^{(\ell)}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}$$

з коефіцієнтами

$$C_{kj}^{(\ell)} = \left(b_{kj}^{(\ell)} - \frac{b_{km}^{(\ell)}\,b_{jm}^{(\ell)}}{b_{mm}^{(\ell)}}\right),\quad k,j=1,2,\ldots,m-1;\ \ell=1,2;$$

$$\mathcal{E}_\ell(x',t)f = \mu_\ell(x',t)\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau\int_{R^{m-1}} G_\ell(t-\tau,x'-y')f(\tau,y')dy';$$

$G_\ell(t,x'-y')$ - фундаментальний розв"язок оператора μ_ℓ, $\ell=1,2$;
$G(t,x'-y')$ - фундаментальний розв"язок рівномірно параболічного оператора μ,

$$\mu = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m-1} C_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j},\quad C_{kj} = \frac{1}{\gamma_1^2-\gamma_2^2}\left(\gamma_1^2 C_{kj}^{(1)} - \gamma_2^2 C_{kj}^{(2)}\right),\ k,j=1,\ldots,m-1.$$

Зауважимо, що рівномірна параболічність оператора μ випливає з умов /5/.

Застосовуючи $\mathcal{E}$ до обох частин системи /4/, одержуємо єдиний розв"язок в явному вигляді

$$V_i(t,x',\varphi) = \mathcal{E}(x',t)f_i,\quad i=1,2. \qquad /6/$$

Доведемо, якщо $\varphi(x)\in\mathcal{B}(R^m)$, де $\mathcal{B}(R^m)$ - банахів простір дійсних обмежених вимірних функцій з нормою $\|\varphi\| = \sup_{x\in R^m}|\varphi(x)|$, то функція $V_i(t,x',\varphi)$, $i=1,2$ неперервна для $t>0$, $x'\in R^{m-1}$ і допускає оцінку

$$|V_i(t,x',\varphi)| \le K_T\,\|\varphi\|\cdot t^{-1/2} \qquad /7/$$

в кожній області виду $t\in(0,T]$, $x'\in R^{m-1}$, K_T - деяка стала. Очевидно, доведення цього факту полягає лише у перевірці виконання нерівності /7/. Як випливає з теорії теплових потенціалів і представлення для функції $\mathcal{E}(x',t)f_i$, оцінку типу /7/ достатньо встановити для $\mathcal{E}_\ell(x',t)f_i$. При $t>0$ можна записати

$$\mathcal{E}_\ell(x',t)f_i=-\frac{1}{t^2}\Big[\int_0^t(t-\tau)^{1/2}d\tau\int_{R^{m-1}}G_\ell(t-\tau,x'-y')f_i(\tau,y')dy'+$$

$$+\int_0^t(t-\tau)^{-1/2}d\tau\int_{R^{m-1}}G_\ell(t-\tau,x'-y')\tau f_i(\tau,y')dy'\Big]+\frac{1}{t}\int_0^t d\tau\times$$

$$\times\int_{R^{m-1}}\mu_\ell(x',t)[(t-\tau)^{1/2}G_\ell(t-\tau,x'-y')]f_i(\tau,y')dy'+$$

$$+\frac{1}{t}\int_0^t(t-\tau)^{-1/2}d\tau\int_{R^{m-1}}G_\ell(t-\tau,x'-y')\mu_\ell(y',\tau)[\tau f_i(\tau,y')]dy'. \qquad /8/$$

Тоді необхідна оцінка для кожного з доданків співвідношення /8/, а отже, і для функції $\mathcal{E}_\ell(x',t)f_i$, випливає з оцінок для фундаментальних розв"язків параболічних рівнянь [3].

Відзначимо, що виконання нерівності /7/ забезпечує існування подвійного інтегралу в правій частині /1/.

Коли послідовність функцій $\varphi_n(x)$ з простору $\mathcal{B}(R^m)$ така, що $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ при кожному $x\in R^m$, коли $n\to\infty$ і $\sup\limits_{n,x}|\varphi_n(x)|<\infty$, то неважко переконатися, що $\lim\limits_{n\to\infty}V_i(t,x',\varphi_n)=V_i(t,x',\varphi)$ для всіх $t>0$, $x'\in R^{m-1}$, $i=1,2$, а отже $\lim\limits_{n\to\infty}T_t\varphi_n(x)=T_t\varphi(x)$. Далі, якщо додатково припустити, що виконується умова

$$q_1\cdot q_2\le 0, \qquad /9/$$

то аналогічно, як і в праці [2], визначаємо, що сім"я операторів T_t, $t>0$ залишає конус невід"ємних функцій $\varphi(x)\in\mathcal{B}(R^m)$ інваріантним.

Врешті, зауваживши, що для функції $\varphi_0(y)\equiv1$, $V_i(t,x',\varphi_0)\equiv0$, $i=1,2$, а отже, $T_t\varphi_0(x)\equiv1$, робимо висновок, що побудована нами півгрупа операторів T_t при виконанні умов /9/ визначає деякий марківський процес. Якщо позначити його ймовірність переходу через $P(t,x,dy)$, то можна записати

$$T_t\varphi(x)=\int_{R^m}P(t,x,dy)\varphi(y).$$

Підрахунок дифузійних коефіцієнтів для побудованого процесу за схемою праці [1] свідчить, що ці характеристики існують лише в узагальненому розумінні [4], тобто для довільної фінітної неперервної функції $\varphi(x)$, $x\in R^m$ з дійсними значеннями справедливі співвідношення

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{R^m}\varphi(x)\left[\frac{1}{t}\int_{R^m}(y-x;\theta)P(t,x,dy)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\left[\left(b^{(1)}_{mm}\right)^{1/2}+\left(b^{(2)}_{mm}\right)^{1/2}\right](q_1N_1+q_2N_2,\theta)}{q_2\left(b^{(2)}_{mm}\right)^{1/2}-q_1\left(b^{(1)}_{mm}\right)^{1/2}}\int_{R^{m-1}}\varphi(x',0)dx',$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{R_m}\varphi(x)\left[\frac{1}{t}\int_{R_m}(y-x,\theta)^2P(t,x,dy)\right]dx=\int_{R^m}\varphi(x)(B(x)\theta,\theta)dx, \qquad /10/$$

яке б не було $\theta\in R^m$; $B(x)=B_i$, $x\in\mathcal{D}_i$, $i=1,2$.

Рівності /10/ означають, що для побудованого процесу з ймовірністю переходу $P(t,x,dy)$ матриця дифузії дорівнює $B(x)$ і вектор переносу

$$\frac{1}{2}\,\frac{\left[\left(b^{(1)}_{mm}\right)^{1/2}+\left(b^{(2)}_{mm}\right)^{1/2}\right](q_1N_1+q_2N_2)}{q_2\left(b^{(2)}_{mm}\right)^{1/2}-q_1\left(b^{(1)}_{mm}\right)^{1/2}}\,\delta_{R^{m-1}}(x),$$

де $\delta_{R^{m-1}}(x)$ – узагальнена функція, зосереджена на поверхні R^{m-1}. Крім цього, доведено, що траєкторії процесу можна вибрати неперервними. Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай в евклідовому просторі R^m задана додатновизначена матричнозначна функція $B(x)=B_i$, $x\in\mathcal{D}_i$, $i=1,2$, а параметри q_1 і q_2 із /2/ задовольняють умови /5/, /9/. Тоді півгрупа /1/, /6/ породжує клас неперервних процесів Феллера в R^m, ймовірність переходу яких задовольняє співвідношення /10/.

1. К о п ы т к о Б.И. Склеивание двух диффузионных процессов на плоскости // Некоторые вопросы теории случайных процессов. К., 1984. С. 48-64. 2. К о п ы т к о Б.И. О склеивании двух диффузионных процессов на прямой // Вероятностные методы бесконечномерного анализа. К., 1980. С. 84-101. 3. Л а д ы ж е н с –

к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
4. П о р т е н к о Н.И. Обобщенные диффузионные процессы. К., 1982.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 517.518.235

І.М.Колодій

ТЕОРЕМА ВКЛАДАННЯ ПРОСТОРУ $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$

Нехай $\overset{\circ}{K}_r=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n;\ |x_i|<r,\ i=1,\dots,n\}$. Визначимо простори $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ та $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ як замикання просторів $\overset{\circ}{C}{}^\infty(K_r)$ та $C^\infty(K_r)$ відповідно, за нормою

$$\sum_{i=1}^n\left(r^{-n+p_i}\int_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}+r^{-n}\int_{K_r}|u|dx.$$

У праці [1] дається елементарне доведення теореми про вкладання анізотропного простору $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$, коли $\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}>1$. Вперше цей результат наведено в праці [4], проте там помилково стверджувалось, що простір $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ при $\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}>1$ вкладається у той самий простір $L_p(K_r)$, що і простір $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$. Помилковість цього доведено в праці [2].

Простір $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ вкладається в простір $L_p(K_r)$, де $p=n\left(-1+\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}\right)^{-1}$ при додатковій умові $\max\limits_{i=1,\dots,n}p_i\le p$ [3]. Вибір області K_r не випадковий. А.Г.Корольов [3] на прикладі показав, що цей результат не існує для будь-яких областей з кусково-гладкою границею навіть при додатковій умові $\max\limits_{1\le i\le n}p_i<p$.

Покажемо елементарне доведення вкладання простору $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ в $L_p(K_r)$ за умов $\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}>1,\ \max\limits_{1\le i\le n}p_i<p$. Ідею цього доведення можна використати при доведенні різницевих аналогів теорем вкладання С.Л.Соболєва, що ми зробимо в наступній роботі.