к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
4. П о р т е н к о Н.И. Обобщенные диффузионные процессы. К., 1982.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 517.518.235

І.М.Колодій

ТЕОРЕМА ВКЛАДАННЯ ПРОСТОРУ $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$

Нехай $\overset{0}{K}_r = \{x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n_1 \,/\, |x_i|<r,\ i=1,\dots,n\}$. Визначимо простори $\overset{0}{W}{}^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ та $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ як замикання просторів $\overset{0}{C}{}^\infty(K_r)$ та $C^\infty(K_r)$ відповідно, за нормою

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(r^{-n+p_i}\int_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}} + r^{-n}\int_{K_r}|u|dx.$$

У праці [1] дається елементарне доведення теореми про вкладання анізотропного простору $\overset{0}{W}{}^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$, коли $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$. Вперше цей результат наведено в праці [4], проте там помилково стверджувалось, що простір $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ при $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$ вкладається у той самий простір $L_p(K_r)$, що і простір $\overset{0}{W}{}^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$. Помилковість цього доведено в праці [2].

Простір $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ вкладається в простір $L_p(K_r)$, де $p=n\big(-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\big)^{-1}$ при додатковій умові $\max_{i=1,\dots,n} p_i \le p$ [3]. Вибір області K_r не випадковий. А.Г.Корольов [3] на прикладі показав, що цей результат не існує для будь-яких областей з кусково-гладкою границею навіть при додатковій умові $\max_{1\le i\le n} p_i < p$.

Покажемо елементарне доведення вкладання простору $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ в $L_p(K_r)$ за умов $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$, $\max_{1\le i\le n} p_i < p$. Ідею цього доведення можна використати при доведенні різницевих аналогів теорем вкладання С.Л.Соболєва, що ми зробимо в наступній роботі.

Теорема. Нехай $U(x)\in W^{1}_{p_1,\dots,p_n}(K_\tau)$. Тоді якщо

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1\ ,\quad \max_{1\le i\le n} p_i<p=n\Big(-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\Big)^{-1},$$

то $U(x)\in L_{p}(K_\tau)$ і наявна оцінка

$$\Big(\tau^{-n}\int_{K_\tau}|U|^{p}dx\Big)^{\frac{1}{p}}\le C\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\tau^{-n+p_i}\int_{K_\tau}|U_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}+\tau^{-n}\int_{K_\tau}|U|dx\Big) \qquad /1/$$

з константою C, що залежить від $n,p_1,\dots,p_n$.

Доведення. Теорему достатньо довести для функцій із $C^{\infty}(K_\tau)$. Якщо $v(t)\in C^{\infty}[0,1]$, то $v(t)=\int_{\tau}^{t}v'(t)dt+v(\tau)$ для будь-яких $t,\tau\in[0,1]$. Використовуючи теорему про середнє значення, підберемо τ_1 так, щоб $v(\tau)=\int_{0}^{1}v(t)\,dt$, тоді

$$|v(t)|\le\int_{0}^{1}|v'(t)|\,dt+\int_{0}^{1}|v(t)|\,dt,\ t\in[0,1]. \qquad /2/$$

Приймемо $v=|U(x)|^{\alpha_i}\operatorname{sign}U(x),\ \alpha_i>1,\ i=1,\dots,n,\ x=(x_1,\dots,x_n)$.

Тоді

$$|U(x)|^{\alpha_i}\le\alpha_i\int_{0}^{1}|U(x)|^{\alpha_i-1}|U_{x_i}|dx_i+\int_{0}^{1}|U(x)|dx_i\ ,\ i=1,\dots,n.$$

Перемножимо ці нерівності та піднесемо до степеня $\frac{1}{n-1}$:

$$U(x)^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n-1}}\le C\Big(\prod_{i=1}^{n}\Big(\int_{0}^{1}|U|^{\alpha_i-1}|U_{x_i}|dx_i\Big)^{\frac{1}{n-1}}+\prod_{i=1}^{n}\Big(\int_{0}^{1}|U|^{\alpha_i}dx_i\Big)^{\frac{1}{n-1}}+\Sigma_1\Big).$$

Знаком Σ_1 позначено суму добутків виду

$$\Big(\int_{0}^{1}|U|^{\alpha_{i_1}-1}|U_{x_{i_1}}|dx_{i_1}\dots\int_{0}^{1}|U|^{\alpha_{i_k}-1}|U_{x_{i_k}}|dx_{i_k}\int_{0}^{1}|U|^{\alpha_{j_1}}dx_{j_1}\dots\int_{0}^{1}|U|^{\alpha_{j_{n-k}}}dx_{j_{n-k}}\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Проінтегруємо останню оцінку послідовно по $x_1,x_2,\dots,x_n$ використовуючи на кожному кроці нерівність Гельдера:

$$\int_{K_1}|U(x)|^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n-1}}dx\le C\Big(\prod_{i=1}^{n}\int_{K_1}|U|^{\alpha_i-1}|U_{x_i}|dx\Big)^{\frac{1}{n-1}}+\prod_{i=1}^{n}\Big(\int_{K_1}|U|^{\alpha_i}dx\Big)^{\frac{1}{n-1}}+\Sigma_2\Big),$$

де Σ_2 – сума добутків виду

$$\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{i_1}-1}|u_{x_{i_1}}|dx\ldots\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{i_k}-1}|u_{x_{i_k}}|dx\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{j_1}}dx\ldots\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{j_{n-k}}}dx\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Піднесемо останню нерівність до степеня $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}$ і одержимо

$$\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n-1}}dx\Big)^{\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\leq C\Big(\prod_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i-1}|u_{x_i}|dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}+\prod_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i}dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}+\Sigma_3\Big),\quad /3/$$

де Σ_3 – сума добутків /їх 2^n штук/ виду

$$\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{i_1}-1}|u_{x_{i_1}}|dx\ldots\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{i_k}-1}|u_{x_{i_k}}|dx\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{j_1}}dx\ldots\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{j_{n-k}}}dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}.$$

Оцінимо інтеграли, які стоять у правій частині /3/:

a) $$\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i-1}|u_{x_i}|dx\leq\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{(\alpha_i-1)\frac{p_i}{p_i-1}}dx\Big)^{\frac{p_i-1}{p_i}}\Big(\int\limits_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Виберемо α_i так, щоб $(\alpha_i-1)\frac{p_i}{p_i-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n-1}$. Звідси випливає, що

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n-1}=\frac{n}{-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}}=p,\quad \alpha_i=1-\frac{p}{p_i}+p,$$

де $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$, $\max\limits_{1\leq i\leq n}p_i<p$. Тоді

$$\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i-1}|u_{x_i}|dx\leq\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{p}dx\Big)^{\frac{1}{p}(\alpha_i-1)}\Big(\int\limits_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Отже,

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i-1}|u_{x_i}|dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\leq\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{p}dx\Big)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-n}{n}}\prod_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}\cdot\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}=$$

$$=\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{p}dx\Big)^{\frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-n}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\Big(\prod_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}\frac{1}{n}}\Big)^{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\leq\varepsilon\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{p}dx\Big)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+C(\varepsilon)\prod_{i=1}^{n}\Big(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}\frac{1}{n}}\le\varepsilon\Big(\int_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}+C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}};$$

б/ Числа α_i такі, що $1<\alpha_i<p$. Тому, використовуючи інтерполяційну нерівність, одержуємо

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\int_{K_1}|u|^{\alpha_i}dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}=\prod_{i=1}^{n}\Big(\int_{K_1}|u|^{\alpha_i}dx\Big)^{\frac{1}{\alpha_i}\cdot\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\le\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{K_1}|u|^{\alpha_i}dx\Big)^{\frac{1}{\alpha_i}}\le$$

$$\le\varepsilon n\Big(\int_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}+n\cdot C(\varepsilon)\int_{K_1}|u|dx.$$

в/ Оцінюючи Σ_3 , розглянемо для простоти доданок

$$\Big(\int_{K_1}|u|^{\alpha_1-1}|u_{x_1}|dx\ldots\int_{K_1}|u|^{\alpha_k-1}|u_{x_k}|dx\int_{K_1}|u|^{\alpha_{k+1}}dx\ldots\int_{K_1}|u|^{\alpha_n}dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\le$$

$$\le\Big(\Big(\int_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{\alpha_1-1}{p}}\Big(\int_{K_1}|u_{x_1}|^{p_1}dx\Big)^{\frac{1}{p_1}}\ldots\Big(\int_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{\alpha_k-1}{p}}\Big(\int_{K_1}|u_{x_k}|^{p_k}dx\Big)^{\frac{1}{p_k}}\int_{K_1}|u|^{\alpha_{k+1}}dx\ldots\int_{K_1}|u|^{\alpha_n}dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}=$$

$$=\Big(\prod_{i=1}^{k}\Big(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}\Big(\int_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-k\right)}\int_{K_1}|u|^{\alpha_{k+1}}dx\ldots\int_{K_1}|u|^{\alpha_n}dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\le$$

$$\le C\Big(\prod_{i=1}^{k}\Big(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}\Big(\int_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-k\right)}\Big(\int_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{\alpha_{k+1}}{p}}\ldots\Big(\int_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{\alpha_n}{p}}\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}=$$

$$=C\Big(\prod_{i=1}^{k}\Big(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}\Big(\int_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-k\right)}\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}=$$

$$= C\left(\prod_{i=1}^{K}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}\cdot\frac{1}{K}}\right)^{\frac{K}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-K}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}} \leq$$

$$\leq \varepsilon\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} + C(\varepsilon)\prod_{i=1}^{K}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}\cdot\frac{1}{K}} \leq \varepsilon\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{K}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}} \leq \varepsilon\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} + C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Враховуючи а-в і /3/ маємо

$$\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\Bigg(\varepsilon\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} + C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}} + \varepsilon n\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ nC(\varepsilon)\int_{K_1}|u|\,dx + \varepsilon 2^{n}\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} + 2^{n}C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Вибравши $\varepsilon > 0$ достатньо малим, запишемо

$$\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}} + \int_{K_1}|u|\,dx\right).$$

Зробивши перетворення подібності, одержимо оцінку /1/ теореми.

I. К р у ж к о в С.Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Мат.сб. 1968. Т. 77. Вып. 3. С. 299-334. 2. К р у ж к о в С.Н., К о л о д и й И.М. К теоремам вложения анизотропных пространств Соболева // Укр.мат. журн. 1983. Т. 38. Вып. 2/230/. С. 207-208. 3. К р у ж к о в С.Н., К о р о л е в А.Г. К теории вложения анизотропных пространств // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 5. С. 1054-1057. 4. Л у В е н ь - т у а н. К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными показателями // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. 1961. № 7. С. 23-27.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86