УДК 519

І.М.Колодій, І.І.Верба

РІЗНИЦЕВИЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМИ ВКЛАДАННЯ СОБОЛЄВА ДЛЯ ПРОСТОРУ $\overset{\circ}{W}{}_p^1$

Наведено елементарне доведення відомого різницевого аналогу теореми С.Л.Соболєва [2] про вкладання простору $\overset{\circ}{W}{}_p^1(K_\tau)$ в $L_q(K_\tau)$, де $q=\frac{np}{n-p}$, $p<n$, $K_\tau=\{(x_1,\dots,x_n)\in E^n : 0\le x_i\le \tau,\ i=1,\dots,n\}$. Для доведення використовуємо різницевий аналог з праці [1].

Сторони n -мірного куба K_τ розіб"ємо точками $0, \frac{\tau}{N}, \frac{2\tau}{N},\dots,\frac{(N-1)\tau}{N}, \tau$ на N частин кроком $h=\frac{\tau}{N}$ і побудуємо сітку з вузлами $\left(\frac{i_1\tau}{N},\frac{i_2\tau}{N},\dots,\frac{i_n\tau}{N}\right)$, де $i_1,i_2,\dots,i_n$ змінюється від 0 до N, яку позначимо $K_{\tau,h}$. Вважаємо, що функція $u(x_1,\dots,x_n)$ задана на вузлах сітки. Її значення на вузлах $\left(\frac{i_1\tau}{N},\dots,\frac{i_n\tau}{N}\right)$ позначимо через $u(i_1,\dots,i_n)$. Введемо різницеву похідну

$$u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)=\frac{u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)-u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)}{h}$$

і градієнт $u_x(i_1,\dots,i_n)=(u_{x_1}(i_1,\dots,i_n),\dots,u_{x_n}(i_1,\dots,i_n))$. Зрозуміло, що

$$|u_x(i_1,\dots,i_n)|=\left(\sum_{i=1}^{n}(u_{x_k}(i_1,\dots,i_n))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Дамо означення різницевих аналогів просторів $L_q(K_\tau)$ і $\overset{\circ}{W}{}_p^1(K_\tau)$, які позначимо $L_{q,h}(K_{\tau,h})$ і $\overset{\circ}{W}{}_{p,h}^1(K_{\tau,h})$.

Означення 1. Функція $u(i_1,\dots i_n)\in L_{q,h}(K_{\tau,h})$, якщо

$$\|u\|_{L_{q,h}(K_{\tau,h})}=\left(\tau^{-n}\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^q h^n\right)^{\frac{1}{q}}\le C=const$$

рівномірно по h.

Означення 2. Функція $u(i_1,\dots,i_n)$, яка обертається в нуль на границі K_τ, належить простору $\overset{\circ}{W}{}_{p,h}^1(K_{\tau,h})$, коли

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_{p,h}^1(K_{\tau,h})}=\left(\tau^{-n+p}\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_x(i_1,\dots,i_n)|^p h^n\right)^{\frac{1}{p}}\le C=const$$

рівномірно по h.

Теорема. Якщо $u(i_1,\ldots,i_n)\in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,h}(K_{\tau,h})$ при $p<n$, то $u(i_1,\ldots,i_n)\in L_{q,h}(K_{\tau,h})$, де $q=\frac{np}{n-p}$, і має місце оцінка

$$\|u\|_{L_{q,h}(K_{\tau,h})}\le C\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,h}(K_{\tau,h})}.$$

Доведення. Теорему достатньо довести для куба K_1. Для функції однієї змінної на відрізку $[0,1]$, що обертається в нуль на кінцях відрізка, виконується очевидна рівність

$$y(i)=\sum_{k=0}^{i-1}\frac{y(k+1)-y(k)}{h}h=\sum_{k=0}^{i-1}y_x(k)h.$$

Тоді

$$|y(i)|\le\sum_{k=0}^{i-1}|y_x(k)|h\le\sum_{k=0}^{N-1}|y_x(k)|h=\sum_{i=0}^{N-1}|y_x(i)|h.$$

Аналогічно, для функції n змінних, що обертається в нуль на границі куба K_1, маємо

$$|y(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|\le\sum_{i_k=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|h$$

для будь-якого $k=1,2,\ldots,n$, тобто по будь-якому напрямку $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Перемножимо ці оцінки і піднесемо до степеня $\frac{1}{n-1}$:

$$|y(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^{\frac{n}{n-1}}\le\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_k=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad /1/$$

Помножимо тепер нерівність /1/ на h. Просумуємо результат по першій змінній, тобто по i_1 від 0 до $N-1$ і застосуємо нерівність Гельдера для сум:

$$\sum_{i_1=0}^{N-1}|y(i_1,\ldots,i_n)|^{\frac{n}{n-1}}h\le\sum_{i_1=0}^{N-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_k=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\ldots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}h=$$

$$=\left(\sum_{i_1=0}^{N-1}|y_{x_1}(i_1,\ldots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}\sum_{i_1=0}^{N-1}\prod_{k=2}^{n}\left(\sum_{i_k=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\ldots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}h\le$$

$$\le\left(\sum_{i_1=0}^{N-1}|y_{x_1}(i_1,\ldots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{k=2}^{n}\left(\sum_{i_1=0}^{N-1}\sum_{i_2=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\ldots,i_n)|h^2\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Повторивши процедуру по решті змінних $i_2, \dots, i_n$, одержимо

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} |y(i_1,\dots,i_n)|^{\frac{n}{n-1}} h^n \le \prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} |y_{x_k}(i_1,\dots,i_n)| h^n\Big)^{\frac{1}{n-1}},$$

де $\sum\limits_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}$ означає n -кратне сумування $\sum\limits_{i_1=0}^{N-1}\sum\limits_{i_2=0}^{N-1}\dots\sum\limits_{i_n=0}^{N-1}$, тобто аналог n -кратного інтегрування. Піднесемо обидві частини останньої нерівності до степеня $\frac{n-1}{n}$:

$$\Big(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} |y(i_1,\dots,i_n)|^{\frac{n}{n-1}} h^n\Big)^{\frac{n-1}{n}} \le \prod_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} |y_{x_k}(i_1,\dots,i_n)| h^n\Big)^{\frac{1}{n}} \qquad /2/$$

Підставимо тепер в /2/ степеневу функцію $y=|u|^\alpha$. Для цього потрібно вміти обчислювати різницеву похідну від функції $|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|$ по x_k. Нехай $f(S)$ – диференційована по S функція. За теоремою Лагранжа

$$f(S)-f(0)=f'(\theta S)S, \quad 0<\theta<1.$$

Приймемо $f(S)=(S+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^\alpha$. Тоді

$$(S+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^\alpha-(|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^\alpha=\alpha(\theta S+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha-1}S.$$

Виберемо $S=|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|$. Тоді з останньої рівності матимемо

$$|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^\alpha-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^\alpha=\alpha(\theta|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|+$$
$$+(1-\theta)|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha-1}(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|).$$

Розділимо обидві частини цієї рівності на h і результат оцінимо по модулю:

$$\left|(|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^\alpha)_{x_k}\right|=\alpha\big(\theta|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|+(1-\theta)|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|\big)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\left|\frac{|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|}{h}\right|\le\alpha\big(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|+$$
$$+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|\big)^{\alpha-1}\cdot\frac{|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)-u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|}{h}\le$$

$$\leq C\left(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha-1}\right)|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|.$$

Таким чином,

$$\left(|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha}\right)_{x_k}\leq C\left(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha-1}\right)\times$$
$$\times|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|. \qquad /3/$$

Підставимо тепер в /2/ функцію $y=|u|^{\alpha}=|u(i_1,\dots,i_n)|^{\alpha}$, $\alpha\geq 1$, де $u(i_1,\dots,i_n)$ дорівнює нулю на границі K_1, і скористаємось оцінкою /3/ та нерівністю Гельдера. Тоді

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^{\alpha\frac{n}{n-1}}h^n\right)^{\frac{n-1}{n}}\leq\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|(|u|^{\alpha})_{x_k}|h^n\right)^{\frac{1}{n}}\leq$$

$$\leq C\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\left(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha-1}\right)|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|h^n\right)^{\frac{1}{n}}\leq$$

$$\leq C\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\left(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}h^n\right)^{\frac{p-1}{p}\frac{1}{n}}\times$$

$$\times\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_{x_k}(i_1,\dots,i_n)|^p h^n\right)^{\frac{1}{p}\frac{1}{n}}\leq C\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\left(|u(i_1,\dots,i_{k}+1,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}\right)h^n\right)^{\frac{p-1}{p}\frac{1}{n}}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^p h^n\right)^{\frac{1}{p}\frac{1}{n}}.$$

$$/4/$$

Враховуючи, що функція $u(i_1,\dots,i_n)$ обертається в нуль на границі куба K_1, маємо

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}=\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}.$$

Тоді з нерівності /4/ випливає оцінка

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^{\alpha\frac{n}{n-1}}h^n)^{\frac{n-1}{n}}\leq C\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}h^n\right)^{\frac{p-1}{p}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\Bigl(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^p h^n\Bigr)^{\frac{1}{p}\frac{1}{n}}.$$

Підберемо число α так, щоб $\alpha\frac{n}{n-1}=(\alpha-1)\frac{p}{p-1}$. Тоді

$$\alpha=\frac{n-1}{n-p}\cdot p\,,\quad \alpha\frac{n}{n-1}=\frac{np}{n-p}.$$

Зауважимо, що $p<n$. Врахувавши це в останній нерівності, одержуємо

$$\Bigl(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^{\frac{np}{n-p}}h^n\Bigr)^{\frac{n-p}{np}}\le C\prod_{k=1}^{n}\Bigl(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^p h^n\Bigr)^{\frac{1}{p}\frac{1}{n}}\le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^p h^n\Bigr)^{\frac{1}{p}}\le C\Bigl(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_x(i_1,\dots,i_n)|^p h^n\Bigr)^{\frac{1}{p}},$$

де $|u_x(i_1,\dots,i_n)|=\Bigl(\sum_{k=1}^{n}|u_{x_k}(i_1,\dots,i_n)|^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}$.

Таким чином, при $p<n$ для функції $u(i_1,\dots,i_n)$, що обертається в нуль на границі куба K_1, доведено оцінку

$$\Bigl(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^{\frac{np}{n-p}}h^n\Bigr)^{\frac{n-p}{np}}\le C\Bigl(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_x(i_1,\dots,i_n)|^p h^n\Bigr)^{\frac{1}{p}}$$

Для куба K_τ ця оцінка матиме вигляд

$$\Bigl(\tau^{-n}\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^{\frac{np}{n-p}}h^n\Bigr)^{\frac{n-p}{np}}\le C\Bigl(\tau^{-n+p}\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_x(i_1,\dots,i_n)|^p h^n\Bigr)^{\frac{1}{p}},$$

якщо зробити перетворення подібності $x=\tau y$.

1. К о л о д і й І.М. Теорема вкладання простору $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_\tau)$. У цьому ж Віснику. 2. С о б о л е в С.Л. Об оценках некоторых сумм для функций, заданных на сетке // Изв. АН СССР. Сер.мат. 1940. Т. 4. № 1. С. 5-16.

Стаття надійшла до редколегії 09.08.86