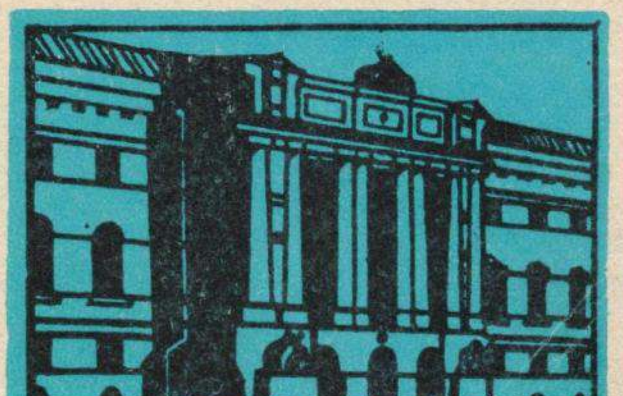
ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
28
1987



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ ТА СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Виходить з 1965 року

ВИПУСК 28

ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1987

УДК 513

В Вестнике помещены статьи по теории функций, функциональному анализу, алгебре, топологии, теории вероятностей, дифференциальным и интегральным уравнениям и их приложениям.
Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.
Библиогр. в конце статей.

Адреса редколегії:
290000 Львів-центр, вул.Університетська, 1.
Університет, кафедра диференціальних рівнянь.

Редакція науково-технічної літератури

Зав.редакцією М.П.П а р ц е й

В $\frac{1702050000-031}{М225/04/ - 87}$ Замовне

УДК 539.377

М.І.Бугрій

ПРО ОПТИМІЗАЦІЮ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ МОМЕНТНИХ ОБМЕЖЕННЯХ НА ТЕМПЕРАТУРУ

Розглянемо віднесену до змішаної ортогональної криволінійної системи координат (α, β, γ) [3] вільну від зовнішнього силового навантаження тонкостінну ізотропну оболонку постійної товщини $2h$, яка знаходиться під дією стаціонарного температурного поля $t(\alpha, \beta, \gamma)$, що задовольняє інтегральні обмеження

$$\int_{(V)} t(\alpha,\beta,\gamma)\,\psi_m(\alpha,\beta,\gamma)\,dV = P_m^*, \quad (m=\overline{0,m_0}), \qquad /1/$$

де (V) - область, яку займає оболонка; ψ_m утворюють повну ортонормовану систему функцій; P_m^* - задані параметри.

Ставимо задачу про відшукання такого температурного поля t, що задовольняє умови /1/, яке викликає оптимально низький рівень напружень в оболонці.

За критерій оптимізації вибираємо функціонал енергії пружної деформації оболонки [1]

$$\mathcal{W}[\vec{U},t] = \int_{(V)} \mathcal{W}_0(\vec{U},t)\,dV, \qquad /2/$$

де $\vec{U}$ - вектор переміщень, викликаних температурним полем t, з компонентами $U_k(\alpha,\beta,\gamma)$, $(k=\overline{1,3})$;

$$\mathcal{W}_0 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_{\alpha\alpha}^2+\sigma_{\beta\beta}^2+\sigma_{\gamma\gamma}^2-2\nu(\sigma_{\alpha\alpha}\sigma_{\beta\beta}+\sigma_{\beta\beta}\sigma_{\gamma\gamma}+\sigma_{\gamma\gamma}\sigma_{\alpha\alpha})+2(1+\nu)(\sigma_{\alpha\beta}^2+\sigma_{\beta\gamma}^2+\sigma_{\gamma\alpha}^2)\right] -$$

питома енергія пружної деформації; σ_{pq} $(p,q=\alpha,\beta,\gamma)$ - компоненти симетричного тензора напружень, представлені через компоненти вектора переміщень $\vec{U}$ і температуру t; E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона.

Зауважимо, що $\mathcal{W}_0$ - додатно визначена квадратична форма змінних σ_{pq}, тому функціонал /2/ - строго опуклий.

Відомо, що вектор переміщень $\vec{U}$ і стаціонарне температурне поле t у випадку відсутності масових сил задовольняють векторне рівняння Ляме в області (V) [1]

$$\Delta\vec{U} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{U} = \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,t \qquad /3/$$

і умови

$$\vec{\sigma}_n\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0} \qquad /4/$$

на поверхні (Σ) оболонки. Тут $\vec{\sigma}_n$ – вектор напружень, який діє на довільно орієнтованій у просторі поверхні з зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ [3]; α_t – коефіцієнт лінійного теплового розширення; умова /4/ записана з врахуванням відсутності зовнішнього силового навантаження оболонки.

Таким чином, поставлену задачу оптимізації термопружного стану оболонки можна сформулювати так: в класі $C^2(V)\cup C^1(\Sigma)$ двічі неперервно диференційованих в області (V) і один раз неперервно диференційованих на поверхні (Σ) функцій знайти екстремалі функціоналу /2/, що задовольняють рівняння /3/ і умови /1/, /4/.

Використовуючи правило множників Лагранжа [2], можна показати, що оптимальне температурне t і відповідне йому векторне поле переміщень $\vec{U}$ задовольняють наступну систему рівнянь в області (V)

$$\begin{aligned}
&\Delta\vec{U} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{U} = \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,t,\\
&\Delta\vec{\lambda}^* + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{\lambda}^* = \vec{0},\\
&\mathrm{div}\,(\vec{U}-\vec{\lambda}^*) = 3\alpha_t t + f,
\end{aligned} \qquad /5/$$

а також граничні умови на поверхні (Σ) оболонки

$$\vec{\sigma}_n\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0},\quad \vec{\lambda}_n\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0},\quad \vec{\lambda}^*\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /6/$$

Тут $f = \sum\limits_{m=0} \tilde{\lambda}_m \Psi_m$; $\vec{\lambda}^*(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$, $\tilde{\lambda}_m$ – зведені множники Лагранжа; $\vec{\lambda}_n$ – вектор, що виражається через λ_1^*, λ_2^*, λ_3^* так, як вектор $\vec{\sigma}_n$ через переміщення U_1, U_2, U_3 при $t=0$.

Рівняння /5/, умови /1/ і /6/ дають змогу однозначно відшукати оптимальне температурне поле t і відповідне йому $\vec{U}$ при заданій функції $f(\alpha,\beta,\gamma)$.

Справді, покажемо, що розв"язок задачі /5/–/6/ єдиний у класі $C^2(V)\cup C^1(\Sigma)$ при заданих множниках Лагранжа $\tilde{\lambda}_m$.

Розглянемо задачу

$$\Delta\vec{\lambda}^* + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{\lambda}^* = \vec{0}, \qquad /7/$$

$$\vec{\lambda}_n\Big|_{(\Sigma)} = \vec{\lambda}^*\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /8/$$

Граничній задачі /7/-/8/ можна поставити у відповідність варіаційну задачу про знаходження екстремалей функціоналу

$$\mathcal{M}^*[\vec{\lambda}^*] = \mathcal{M}[\vec{\lambda}^*, 0] = \int_{(V)} \mathcal{M}_0(\vec{\lambda}^*, 0)\, dV \qquad /9/$$

при додаткових обмеженнях

$$\vec{\lambda}^*\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /10/$$

Оскільки функціонал /9/ - строго опуклий, умови /10/ - лінійні, то розв"язок задачі /7/-/8/ - єдиний, і це є, як легко бачити, нульовий розв"язок.

Таким чином, гранична задача /5/-/6/ зводиться до вигляду

$$\Delta \vec{U} + \frac{1}{1-2\nu}\, \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{U} = \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{1-2\nu}\, \operatorname{grad} t,$$

$$\operatorname{div} \vec{U} = 3\alpha_t t + f, \qquad /11/$$

$$\vec{\sigma}_n\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /12/$$

Цій задачі можна поставити у відповідність варіаційну задачу про відшукання екстремалей функціоналу

$$\mathcal{M}_2[\vec{U}, t] = \mathcal{M}[\vec{U}, t] + \mathcal{M}_1[t], \qquad /13/$$

де

$$\mathcal{M}_1[t] = \frac{\alpha_t E}{1-2\nu} \int_{(V)} f t\, dV. \qquad /14/$$

Тому що функціонал /2/ - строго опуклий, /14/ - лінійний, то /13/ - строго опуклий. Отже, гранична задача /11/-/12/ має єдиний розв"язок, а тому і розв"язок задачі /5/-/6/ єдиний.

Зауважимо, що побудову розв"язку задачі /11/-/12/ можна провести у два етапи: спочатку визначити вектор $\vec{U}$, а потім - оптимальне температурне поле t. Справді, з другого рівняння /11/ маємо

$$t = \frac{1}{3\alpha_t}\left(\operatorname{div} \vec{U} - f\right). \qquad /15/$$

Тоді перше рівняння /11/ і умову /12/ з врахуванням /15/ запишемо у вигляді

$$\Delta \vec{U} + \frac{1}{3}\, \operatorname{grad}\operatorname{div} \vec{U} + \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\, \operatorname{grad} f = \vec{0}, \qquad /16/$$

$$\vec{\sigma}_n^{(H)}\Big|_{(\Sigma)} = \vec{0}. \qquad /17/$$

Тут $\vec{\sigma}_n^{(H)}$ - вектор, який отримують з $\vec{\sigma}_n$ при врахуванні /15/.

Таким чином, сформульована вище задача оптимізації зводиться до граничної задачі /16/-/17/ відносно вектора переміщень $\vec{U}$

з наступним використанням /15/ для визначення оптимального температурного поля t .

Зауважимо, що граничній задачі /16/-/17/ можна поставити у відповідність варіаційну задачу про відшукання екстремалей функціоналу, який отримується з /13/ шляхом виключення функції t за допомогою /15/.

На закінчення відзначимо, що функціонал /13/ можна використати для отримання двовимірного аналогу задачі /16/-/17/, якщо задати закон зміни переміщень по товщині оболонки у вигляді скінченного розкладу, наприклад, по системі поліномів Лежандра $P_n\left(\frac{\gamma}{h}\right)$

$$U_1 = \sum_{n=0}^{n_0} u_n(\alpha,\beta) P_n\left(\frac{\gamma}{h}\right), \quad U_2 = \sum_{n=0}^{n_0} v_n(\alpha,\beta) P_n\left(\frac{\gamma}{h}\right),$$
$$U_3 = \sum_{n=0}^{n_0} w_n(\alpha,\beta) P_n\left(\frac{\gamma}{h}\right). \qquad /18/$$

З врахуванням /15/, /18/ функціонал /13/ після інтегрування по γ можна звести до вигляду

$$\mathcal{M}_3[u_n, v_n, w_n] = \int_{(\Sigma_0)} F_1(u_n, v_n, w_n)\, d\Sigma, \qquad /19/$$

де (Σ_0) - серединна поверхня оболонки з контуром (Γ_0); F_1 - квадратична функція відносно u_n , v_n , w_n та їх похідних першого порядку.

З необхідної умови екстремуму для функціоналу /19/ отримуємо наближену систему рівнянь в області (Σ_0) і граничні умови на контурі (Γ_0) відносно функцій u_n , v_n , w_n , що відповідає задачі /16/-/17/.

1. Г р и г о л ю к Э.И., П о д с т р и г а ч Я.С., Б у р а к Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. К., 1979. 2. К о л м о г о р о в А.Н., Ф о м и н С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976. 3. П о д с т р и г а ч Я.С., Ш в е ц Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 04.02.86

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ З НЕВІД"ЄМНОЮ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЮ ФОРМОЮ

Розглянемо задачу

$$u_{tt}+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D_x^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(t)D_x^{\beta}u)+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_x^{\alpha}(b_{\alpha\beta}(t)D_x^{\beta}u)+$$

$$+c_0(x,t)u_t+c_1(x,t)u=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \qquad /1/$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in R^n, \qquad /2/$$

де $Q_T=\{x\in R^n,\ 0<t<T\}$.

Позначимо $Q_\tau=\{x\in R^n,\ 0<t<\tau\},\ D_\tau=Q_T\cap\{t=\tau\}$.

Поряд з /1/, /2/ розглянемо задачу

$$u_{tt}+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D_x^{\alpha}(a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t)D_x^{\beta}u)+\varepsilon\Delta^2 u+$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_x^{\alpha}(b^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t)D_x^{\beta}u)+c_0^{\varepsilon}(x,t)u_t+$$

$$+c_1^{\varepsilon}(x,t)u=f^{\varepsilon}(x,t),\ (x,t)\in Q_T^{\varepsilon}, \qquad /3/$$

$$u(x,0)=\varphi^{\varepsilon}(x),\quad u_t(x,0)=\psi^{\varepsilon}(x), \qquad /4/$$

де $Q_T^{\varepsilon}=\{x\in R^n,\ 0<t<T-\varepsilon\},\ 0<\varepsilon\leq\min\{T;1\}$.

Припускаємо, що $a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}=a^{\varepsilon}_{\beta\alpha},\ b^{\varepsilon}_{\alpha\beta}=b^{\varepsilon}_{\beta\alpha}$. Користуючись методикою праці [1], а також результатами праці [2], можемо довести лему.

Лема. Нехай коефіцієнти рівняння /3/ і функції $f^{\varepsilon},\varphi^{\varepsilon},\psi^{\varepsilon}$ нескінченно диференційовані по всіх змінних, функції $c_0^{\varepsilon},c_1^{\varepsilon}$, $f^{\varepsilon},\varphi^{\varepsilon},\psi^{\varepsilon}$ мають компактні носії і існують такі сталі: $p\geq -1$ – ціле, $\delta>0$, $A>0$, що справедлива нерівність

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\left(Aa^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t)+\frac{\partial a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(t)}{\partial t}\right)\xi_\alpha\xi_\beta\geq\delta t\left(\sum_{|\alpha|=2} b^{\varepsilon}_{\alpha}(t)\xi_\alpha\right)^2$$

для всіх $\xi \in R^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $t \in [0, T-\varepsilon]$ і для $\delta > (2p+6)^{-1}$.
Тоді існує нескінченно диференційований розв"язок $u^{\varepsilon}(x,t)$ задачі /3/, /4/, для якого справедлива оцінка

$$\sum_{2m+|\alpha|\le 2l} \int_{D_\tau} (D_x^\alpha D_t^m u^\varepsilon)^2 dx \le C\Big[\sum_{|\alpha|\le 2l+4[\frac{p}{2}]+8} \int_{D_0} (D_x^\alpha \varphi^\varepsilon)^2 dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\le 2l+4[\frac{p+1}{2}]+4} \int_{D_0} (D_x^\alpha \psi^\varepsilon)^2 dx + \sum_{|\alpha|\le 2l-2} \int_{Q_\tau} (D_x^\alpha f^\varepsilon)^2 dx dt +$$

$$+ \sum_{m=0}^{l-2} \sum_{|\alpha|\le 2l-2m-4} \int_{D_\tau} (D_x^\alpha D_t^m f^\varepsilon)^2 dx + \sup_{0\le\xi\le T-\varepsilon} \sum_{|\alpha|\le 2l} \int_{D_\xi} (D_x^\alpha D_t^{p+1} f^\varepsilon)^2 dx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{p} \sum_{|\alpha|\le 2l+4[\frac{p-j}{2}]+4} \int_{D_0} (D_x^\alpha D_t^j f^\varepsilon(x,0))^2 dx \Big], \; l \ge 2, \qquad /5/$$

де стала C не залежить від ε і функції u^ε. /Коли $p = -1$, то останній доданок в /5/ відсутній/.

Якщо тепер у задачі /3/, /4/ взяти в якості коефіцієнтів, вільного члена і початкових умов усереднені коефіцієнти, вільний член і початкові умови задачі /1/, /2/, то можна довести теорему існування розв"язку задачі /1/, /2/.

<u>Теорема</u>. Нехай виконуються умови: 1/ $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$; 2/ функції $D_t^j a_{\alpha\beta}$, $D_t^j b_{\alpha\beta}$, $j = 0, \dots, \max\{p+1; l-1\}$,
$D_t^m D_x^\gamma c_0$, $D_t^m D_x^\gamma c_1$, $m = 0, \dots, p+1$, $|\gamma| \le 2l+6$;
$D_t^k D_x^\gamma c_0$, $D_t^k D_x^\gamma c_1$, $|\gamma| + 2k \le 2l-2$; $D_t D_x^\gamma c_0$, $D_t D_x^\gamma c_1$, $|\gamma| \le 2l$
обмежені в Q_T; 3/ $f \in H_{2(l-1),0}(Q_T) \cap H_{2l-4,l-2}(Q_T)$,
$D_t^{m+1} f \in H_{2l,0}(Q_T)$, $m = 0, \dots, p$; $D_t^m f(x,0) \in H_{2l+4[\frac{p-m}{2}]+4}(D_0)$,

якщо $m=0,\ldots,p;\ p>-1$; 4/ $\varphi\in H_{2\ell+4\left[\frac{p}{2}\right]+8}(\mathcal{D}_0)$, $\psi\in H_{2\ell+4\left[\frac{p+1}{2}\right]+4}(\mathcal{D}_0)$;

5/ $$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\left(Aa_{\alpha\beta}(t)+\frac{\partial a_{\alpha\beta}(t)}{\partial t}\right)\xi_\alpha\xi_\beta\geq\delta t\left(\sum_{|\alpha|=2}b_\alpha(t)\xi_\alpha\right)^2$$

для всіх $\xi\in\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $t\in[0,T]$, де A,δ - додатні сталі, причому $\delta>(2p+6)^{-1}$, $p\geq-1$ - ціле.

Тоді існує єдиний розв"язок задачі /1/, /2/ $u(x,t)\in H_{2\ell\ell}(Q_T)$, $\ell\geq2$, який задовольняє нерівність

$$\|u\|_{H_{2\ell,\ell}(Q_T)}\leq C\Big[\|\varphi\|_{H_{2\ell+4\left[\frac{p}{2}\right]+8}(\mathcal{D}_0)}+\|\psi\|_{H_{2\ell+4\left[\frac{p+1}{2}\right]+4}(\mathcal{D}_0)}+$$

$$+\|f\|_{H_{2\ell-4,\ell-2}(Q_T)}+\|f\|_{H_{2\ell-2,0}(Q_T)}+\|\mathcal{D}_t^{p+1}f\|_{H_{2\ell,0}(Q_T)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{p}\|\mathcal{D}_t^{j}f(x,0)\|_{H_{2\ell+4\left[\frac{p-j}{2}\right]+4}(\mathcal{D}_0)}\Big].\qquad /6/$$

Тут C - додатна стала, що не залежить від u . У випадку, коли $p=-1$, останній доданок у /6/ відсутній.

1. О л е й н и к О.А. О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе // Успехи мат.наук. 1969. Т. 24. Вып. 2. С. 229-230. 2. У р о е в В.М. О гладкости решений нестационарных уравнений типа колебаний пластины // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1835-1842.

Стаття надійшла до редколегії 04.02.86

УДК 517.946

М.І.Іванчов

ПРО СПРЯЖЕННЯ ДВОХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо задачу спряження розв"язків двох параболічних систем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\lambda_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_{ij}u_j\right)+f_i,\quad (i=1,2),\qquad /1/$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=\mu_i\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}+\sum_{j=1}^{2}\left(c_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x}+d_{ij}v_j\right)+g_i,\ (i=1,2),\qquad /2/$$

заданих відповідно в областях $\Omega_1=\{(x,t): x>0, 0<t<T\}$ та $\Omega_2=\{(x,t): x<0,\ 0<t<T\}$. Початкові умови для систем /1/ і /2/ вважаємо нульовими, а умови спряження при $x=0$ задамо у вигляді

$$u_i(0,t)=v_i(0,t),\qquad /3/$$

$$\lambda_i\frac{\partial u_i(0,t)}{\partial x}=\mu_i\frac{\partial v_i(0,t)}{\partial x}.\qquad /4/$$

Припускаємо, що коефіцієнти систем /1/ і /2/ сталі, $\lambda_i>0$ $\mu_i>0$, $f_i(x,t)$ та $g_i(x,t)$ неперервні разом з похідними по x відповідно в областях Ω_1 і Ω_2.

Позначимо

$$u_i(0,t)=v_i(0,t)=\varphi_i(t).\qquad /5/$$

Вважаючи функцію $\varphi_i(t)$ відомою і використовуючи функцію Гріна [2], зведемо задачі /1/, /5/ і /2/, /5/ з нульовими початковими умовами до систем інтегродиференціальних рівнянь:

$$u_i(x,t)=\frac{x}{2\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{\varphi_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}d\tau+\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}\right)\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+b_{ij}u_j(\xi,\tau)\right)d\xi+\mathcal{F}_i(x,t),\ x\geq 0,\qquad /6/$$

$$v_i(x,t)=-\frac{x}{2\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{\varphi_i(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4\mu_i(t-\tau)}}d\tau+\frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^0\Bigl(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}-$$

$$-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}\Bigr)\sum_{j=1}^2\Bigl(c_{ij}\frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+d_{ij}v_j(\xi,\tau)\Bigr)d\xi+G_i(x,t),\ x<0,$$

$$(i=1,2), \qquad /7/$$

де

$$\mathcal{F}_i(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty f_i(\xi,\tau)\Bigl(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}\Bigr)d\xi;$$

$$G_i(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^0 g_i(\xi,\tau)\Bigl(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}\Bigr)d\xi.$$

Задовольнимо умову спряження /4/. Перетворюючи отриману рівність, одержуємо

$$\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{\varphi_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}}\Bigl(\frac{\partial\mathcal{F}_i(0,t)}{\partial x}-\frac{\partial G_i(0,t)}{\partial x}\Bigr)+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_0^\infty\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}\sum_{j=1}^2\Bigl(a_{ij}\frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+b_{ij}u_j(\xi,\tau)\Bigr)d\xi-$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\int_{-\infty}^0\xi e^{-\frac{\xi^2}{4\mu_i(t-\tau)}}\sum_{j=1}^2\Bigl(c_{ij}\frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+d_{ij}v_j(\xi,\tau)\Bigr)d\xi. \qquad /8/$$

Розглядаючи /8/ як рівняння Абеля, знаходимо [1]

$$\varphi_i(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\int_0^t\Bigl(\frac{\partial\mathcal{F}_i(0,\tau)}{\partial x}-\frac{\partial G_i(0,\tau)}{\partial x}+\frac{1}{4\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^\tau d\sigma\int_0^\infty\frac{\xi}{(\tau-\sigma)^{3/2}}\times$$

$$\times e^{-\frac{\xi^2}{4\lambda_i(\tau-\sigma)}}\sum_{j=1}^2\Bigl(a_{ij}\frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial\xi}+b_{ij}u_j(\xi,\tau)\Bigr)d\xi-\frac{1}{4\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^\tau d\sigma\int_{-\infty}^0\frac{\xi}{(\tau-\sigma)^{3/2}}\times$$

$$\times e^{-\frac{\xi^2}{4\mu_i(\tau-\sigma)}} \sum_{j=1}^{2} \left(c_{ij} \frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial \xi} + d_{ij} v_j(\xi,\tau) \right) d\xi \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} .$$

Підставимо знайдений вираз $\varphi_i(t)$ у системи рівнянь /6/ і /7/. Після нескладних перетворень одержуємо систему інтегродиференціальних рівнянь відносно u_i та v_i :

$$u_i(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_i}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}} - \frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}} \right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} \left(a_{ij} \frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial \xi} + b_{ij} u_j(\xi,\tau) \right) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_i}} - \frac{\xi}{\sqrt{\mu_i}}\right)^2 \frac{1}{4(t-\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} \left(c_{ij} \frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial \xi} + d_{ij} v_j(\xi,\tau) \right) d\xi + \tilde{F}_i(x,t), \quad x \geq 0,$$

$$v_i(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\mu_i}} - \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2 \frac{1}{4(t-\tau)}} \sum_{j=1}^{2} \left(a_{ij} \frac{\partial u_j(\xi,\tau)}{\partial \xi} + \right.$$

$$\left. + b_{ij} u_j(\xi,\tau) \right) d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_i}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{0} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}} - \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}} \right) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{2} \left(c_{ij} \frac{\partial v_j(\xi,\tau)}{\partial \xi} + d_{ij} v_j(\xi,\tau) \right) d\xi + \tilde{G}_i(x,t), \quad x \leq 0, \qquad /9/$$

де

$$\tilde{F}_i(x,t) = F_i(x,t) + \frac{x}{2\pi\sqrt{\lambda_i}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2}(\tau-\sigma)^{1/2}} \times$$

$$e^{-\frac{x^2}{4\lambda_i(t-\tau)}} d\tau \int_0^\tau \left(\frac{\partial F_i(0,\sigma)}{\partial x} - \frac{\partial G_i(0,\sigma)}{\partial x} \right) d\sigma,$$

$$\tilde{G}_i(x,t)=G_i(x,t)-\frac{x}{2\pi\sqrt{\mu_i}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}(\tau-\sigma)^{1/2}}\times$$

$$\times e^{-\frac{x^2}{4\mu_i(t-\tau)}}d\tau\int_0^\tau\left(\frac{\partial\tilde{F}_i(0,\sigma)}{\partial x}-\frac{\partial G_i(0,\sigma)}{\partial x}\right)d\sigma.$$

Систему /9/ розв"язуємо методом послідовних наближень, приймаючи

$$u_i^{(0)}(x,t)=\tilde{\tilde{F}}_i(x,t),\quad v_i^{(0)}(x,t)=\tilde{G}_i(x,t),$$

$$u_i^{(n+1)}(x,t)=\tilde{\tilde{F}}_i(x,t)+\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}-\frac{\sqrt{\mu_i}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\lambda_i(t-\tau)}}\right)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j^{(n)}(\xi,\tau)}{\partial\xi}+b_{ij}u_j^{(n)}(\xi,\tau)\right)d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\times$$

$$\times\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^0 e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_i}}-\frac{\xi}{\sqrt{\mu_i}}\right)^2\frac{1}{4(t-\tau)}}\sum_{j=1}^{2}\left(c_{ij}\frac{\partial v_j^{(n)}(\xi,\tau)}{\partial\xi}+d_{ij}v_j^{(n)}(\xi,\tau)\right)d\xi,\ x\geq 0,$$

$$v_i^{(n+1)}(x,t)=\tilde{G}_i(x,t)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i})}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{\mu_i}}-\frac{\xi}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^2\frac{1}{4(t-\tau)}}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}\frac{\partial u_j^{(n)}(\xi,\tau)}{\partial\xi}+b_{ij}u_j^{(n)}(\xi,\tau)\right)d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi\mu_i}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{-\infty}^0\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\mu_i}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\mu_i(t-\tau)}}\right)\sum_{j=1}^{2}\left(c_{ij}\frac{\partial v_j^{(n)}(\xi,\tau)}{\partial\xi}+d_{ij}v_j^{(n)}(\xi,\tau)\right)d\xi,\ x\leq 0.$$

Збіжність послідовностей $\left\{u_i^{(n)}\right\}$, $\left\{v_i^{(n)}\right\}$, $\left\{\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial v_i^{(n)}}{\partial x}\right\}$ випливає з оцінок

$$|u_i^{(n+1)}(x,t)-u_i^{(n)}(x,t)|\le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},\ |v_i^{(n+1)}(x,t)-v_i^{(n)}(x,t)|\le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},$$

$$|u_{i_x}^{(n+1)}(x,t)-u_{i_x}^{(n)}(x,t)|\le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},\ |v_{i_x}^{(n+1)}(x,t)-v_{i_x}^{(n)}(x,t)|\le AM^n t^{\frac{n+2}{2}},$$

де константи A і M виражаються через відомі величини.

Отже, система інтегродиференціальних рівнянь /9/ має розв"язок при $0\le t\le\delta$, де $\delta< M^{-2}$. Існування розв"язку при $t\geq\delta$ доводиться аналогічно.

Запропонована схема зводить задачу спряження двох параболічних систем до системи інтегродиференціальних рівнянь безпосередньо відносно розв"язку цієї задачі і може бути використана для чисельних розрахунків.

1. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959. 2. Положій Г.М. Рівняння математичної фізики. К., 1959.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.86

УДК 517.946

В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Задачі для сингулярно збурених звичайних диференціальних та інтегродиференціальних рівнянь достатньо добре вивчені [3, 4, 6]. Менше вивчені задачі для сингулярно збурених рівнянь у частинних похідних [9, 11] і найменше – задачі для сингулярно збурених інтегродиференціальних рівнянь у частинних похідних.

Методом примежового шару [4-6] з використанням функцій кутового примежового шару [2] побудуємо повне асимптотичне розвинення в $D_T=\{0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ розв"язку задачі

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)+a(x,t)u+\int_0^t b(x,s)u(x,s)ds=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(x,0)=0, \quad u(0,t)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Побудову і обгрунтування асимптотичного розвинення ведемо за таких умов:

1/ функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$ мають похідні до потрібного порядку в D для вірності побудов, наведених нижче;

2/ виконується умова узгодженості $f(0,0)=0$;

3/ $\lambda>0$, $a(x,t)>0$ в D_T.

Існування і єдиність розв"язку задачі /1/, /2/ випливає з праці [8].

Асимптотичне розвинення розв"язку задачі /1/, /2/ до деякого довільного порядку N шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i(\xi,\tau)+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\tau=t/\varepsilon$, $\xi=x/\varepsilon$ – регуляризуючі перетворення.

Внаслідок підстановки /3/ у /1/ і стандартних міркувань [4, 6] записуємо

$$a(x,t)\bar{u}_i+\int_0^t b(x,s)\bar{u}_i(x,s)ds=f_i(x,s)\ (i=0,\dots,N), \qquad /4/$$

де $f_0(x,t)\equiv f(x,t)$, $f_i(x,t)$ явно виражаються через $\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t}$, $\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x}$ $(j=i-1)$, а також $\int_0^\infty \eta^k\Pi_j(x,\eta)d\eta$ $(j\le i-1,\ k\ge 0)$;

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau}+a(x,0)\Pi_i=\varphi_i(x,\tau) \quad (i=0,\dots,N), \qquad /5/$$

де $\varphi_0(x,\tau)\equiv 0$, $\varphi_i(x,\tau)$ явно виражаються через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j\le i-1)$ і їх похідні, а також вирази $\int_\tau^\infty \eta^k\Pi_j(x,\eta)d\eta$ $(j\le i-1,\ k\ge 0)$;

$$\lambda \frac{\partial Q_i}{\partial \xi} + a(0,t)Q_i + \int_0^t b(0,s)Q_i(\xi,s)ds = \psi_i(\xi,t) \ (i=0,\dots,N), \qquad /6/$$

де $\psi(\xi,t) \equiv 0$, $\psi_i(\xi,t)$ явно виражаються через $Q_j(\xi,t)\ (j \le i-1)$ і їх похідні, а також вирази $\int_0^\infty s^k Q_j(\xi,s)ds\ (j \le i-1,\ k \ge 0)$;

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial P_i}{\partial \xi} + a(0,0)P_i = h_i(\xi,\tau) \quad (i=0,\dots,N), \qquad /7/$$

де $h_0(\xi,\tau) \equiv 0$, $h_i(\xi,\tau)$ явно виражаються через $P_j(\xi,\tau)\ (j \le i-1)$, а також вирази $\int_0^\infty \sigma^k P_j(\xi,\sigma)d\sigma\ (j \le i-1,\ k \ge 0)$.

Використовуючи умову /2/, одержуємо умови, при яких слід розв"язувати /5/-/7/:

$$\Pi_i(x,0) = -\bar{u}_i(x,0) \quad (i=0,\dots N), \qquad /8/$$

$$Q_i(0,t) = -\bar{u}_i(0,t) \quad (i=0,\dots,N), \qquad /9/$$

$$P_i(\xi,0) = -Q_i(\xi,0),\ P_i(0,\tau) = -\Pi_i(0,\tau) \ (i=0,\dots,N). \qquad /10/$$

Аналізуючи наведені вище формули, бачимо, що функції, які входять в /3/, можна визначити рекурентно, коли їх знаходити у такій послідовності: $\bar{u}_0(x,t)$, $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0(\xi,t)$, $P_0(\xi,\tau)$, $\bar{u}_1(x,t)$ і т.д.

З інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду /4/ визначають $\bar{u}_i(x,t)\ (i=0,\dots,N)$, які однозначно розв"язальні при наведених припущеннях, і розв"язки можна знайти методом послідовних наближень.

Функції $\Pi_i(x,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ є розв"язками задач Коші /5/, /8/ для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Аналогічно /6/ легко показати, що $\Pi_i(x,t)$ - функції типу примежового шару в околі $t=0$.

Функції $Q_i(\xi,t)\ (i=0,\dots,N)$ - розв"язки задач Коші /6/, /9/ для інтегродиференціальних рівнянь. Метод послідовних наближень, застосований з аналогічною метою у праці [4], доводить як однозначну розв"язальність цих задач, так і те, що $Q_i(\xi,t)$ - функції типу примежового шару в околі $x=0$.

Функції $P_i(\xi,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ є розв"язками змішаних задач для рівнянь у частинних похідних /7/, /10/, однозначна розв"язальність яких випливає з праці [1]. Розв"язки цих задач легко виписати в явному вигляді /коефіцієнти сталі/, звідки безпосередньо випливає, що $P_i(\xi,\tau)$ - функції типу примежового шару в околі точки $(0,0)$.

Невласні інтеграли, які з"являються вище, збіжні в силу того, що Π, Q, P - функції є функціями типу примежового шару.

Методом інтегралів енергії [7] одержана оцінка залишкового члена

$$\|R_N(x,t,\varepsilon)\|_{L_2(D_T)} \leq C, \qquad /11/$$

де стала C не залежить від ε, що й доводить асимптотичний характер розвинення /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

<u>Теорема</u>. При виконанні умов 1/ - 3/ розв"язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичне представлення /3/, де функції $U_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$ є розв"язки рівнянь /4/; функції примежового шару в околі $t=0$ знаходяться як розв"язки задач /5/, /8/; функції примежового шару в околі $x=0$ є розв"язками задач /6/, /9/; функції кутового примежового шару $P_i(\xi,\tau)\ (i=0,\dots,N)$ - це розв"язки задач /7/, /10/; правильна оцінка /11/.

Зауважимо, що задача Коші для сингулярно збуреної гіперболічної інтегродиференціальної системи розглянута у праці [10].

1. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч.зап. Латв.гос.ун-та. 1958. Т. 20. Вып. 3. С. 87-104. 2. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений // Мат.сб. 1977. Т. 104/146/. № 3. С. 460-485. 3. Б у т у з о в В.Ф., В а с и л ь е в а А.Б., Ф е д о р ю к М.В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки. Мат.анализ. 1976. С. 5-73. 4. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 5. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3-122. 6. И м а н а л и е в М. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем. Фрунзе, 1972. 7. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 8. М е л ь н и к З.О. О разрешимости общих смешанных задач в прямом цилиндре для аналитических гиперболических интегродифференциальных уравнений // Докл.

3-2729

АН СССР. 1965. Т. 163. № 5. С. 38-45. 9. Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника-Вишика // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. № 4. С. 123-156. 10. Цымбал В.Н. Задача Коши для сингулярно возмущенной интегродифференциальной системы // Доклады Всесоюзной школы молодых ученых: Теоретические и прикладные проблемы вычислительной математики. М., 1981. С. 173. 11. Lions I.L. Perturbations singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal. Berlin; Heidelberg; New York.

Стаття надійшла до редколегії 18.03.86

УДК 517.946

В.М.Флюд

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СЛАБО ЗВ"ЯЗАНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq X, 0\leq t\leq T, 0<X, T<\infty\}$ розглянемо задачу Гурса для сингулярно збуреної слабо зв"язаної системи гіперболічного типу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \varepsilon\left(A(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} + B(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + C(x,t)u = f(x,t) & /1/ \\ u(x,0;\varepsilon)=\varphi(x), \quad u(0,t;\varepsilon)=\psi(t), & /2/ \end{cases}$$

де $0<\varepsilon<<1$ – малий параметр; $A(x,t)=\|a(x,t)\delta_i^j\|_{ij=1}^n$, $B(x,t)=\|b(x,t)\delta_i^j\|_{ij=1}^n$ – діагональні матриці; δ_i^j – символ Кронекера; $C(x,t)=\|C_{ij}(x,t)\|_{ij=1}^n$, $u(x,t;\varepsilon)$ – шукана і $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ – задані вектор-функції розмірності n.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1/ дані задачі /1/, /2/ достатньо гладкі в D;

2/ $a(x,t)>0$, $b(x,t)>0$, $C(x,t)$ – симетрична, додатно визначена матриця;

3/ введемо позначення: $a=a(0,0)$, $b=b(0,0)$, $\lambda=\min\limits_i \lambda_i$, λ_i – власні значення матриці $C(0,0)$. Коли $\lambda_i<a^2+b^2-ab$, то a і b такі, що при $a\geq b$ має місце $a<b+\frac{\lambda}{a}$, а при $a\leq b$ – $b<a+\frac{\lambda}{b}$;

4/ $\varphi(0)=\psi(0)$.

Відомо, що при вказаних умовах на дані задачі /1/, /2/ розв"язок існує і єдиний при фіксованому значенні параметра ε .

Зауважимо, що система /1/ повністю вироджується, тобто, коли в /1/ формально прийняти $\varepsilon = 0$, то отримаємо систему алгебраїчних рівнянь, розв"язок якої, взагалі кажучи, умови /2/ не задовольняє. Повне виродження системи диференціальних рівнянь досліджено у праці [6], це розглядається задача Гурса для системи двох рівнянь першого порядку в частинних похідних з малим параметром. У праці [4] - неповне виродження.

Використовуючи метод примежового шару і кутового примежового шару [1-3], будуватимемо асимптотичне розвинення /АР/ довільного порядку N розв"язку задачі /1/, /2/ у вигляді

$$u(x,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\left(V_i(x,t)+\Pi_i(x,\tau)+Q_i(\xi,t)+P_i(\xi,\tau)\right)+R_N(x,t;\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$, $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, $V_i(x,t)$ - функції регулярної частини АР /тут і надалі під словом "функція" розумітимемо "вектор-функція"/; $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$ - функції звичайного примежового шару; $P_i(\xi,\tau)$ - функції кутового примежового шару, $R_N(x,t;\varepsilon)$ залишковий член АР.

Опишемо процес знаходження та призначення кожної функції із /3/.

Регулярна частина АР $V(x,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}V_i(x,t)$ визначається рекурентно зі співвідношень

$$C(x,t)V_i(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & i=0;\\ -\dfrac{\partial^2 V_{i-2}}{\partial t\,\partial x}-A(x,t)\dfrac{\partial V_{i-1}}{\partial t}-B(x,t)\dfrac{\partial V_{i-1}}{\partial x}, & i=1,2,\dots,N. \end{cases} \qquad /4/$$

Тут і надалі вважатимемо, що функція з від"ємним індексом тотожно дорівнює нулеві.

Оскільки $V(x,t;\varepsilon)$ взагалі кажучи, умови /2/ не задовольняє, то в околі сторін границі $t=0$ і $x=0$ області D потрібно будувати функції примежового шару $\Pi(x,\tau;\varepsilon)$ і $Q(\xi,t;\varepsilon)$, кожна з яких у сумі з $V(x,t;\varepsilon)$ задовольняє відповідно першу та другу умови /2/.

Функцію примежового шару в околі $t=0$ будуємо у вигляді $\Pi(x,t;\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\,\Pi_i(x,\tau)$, де τ - регуляризуюче перетворення. Шляхом стандартної процедури теорії сингулярних збурень [3] отримуємо задачі для знаходження

$$A(x,0)\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau}+C(x,0)\Pi_i=\pi_i(x,\tau),\ \Pi_i(x,0)=\begin{cases}\varphi(x)-V_0(x,0),\ i=0;\\ -V_i(x,0),\ i=1,2,\dots,N,\end{cases} \qquad /5/$$

де $\pi_i(x,\tau)$ – відома функція, причому $\pi_0(x,\tau)\equiv 0$; /5/ – задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь / x – параметр/, її розв"язок задовольняє

$$\|\Pi_i(x,\tau)\|\leq M(\tau)\exp\left\{-\frac{\lambda(x)}{a(x,0)}\tau\right\},\ (i=\overline{0,N}). \qquad /6/$$

Тут і надалі під нормою вектор-функції розуміємо суму модулів її компонент, а через $M(x)$ позначаємо многочлен скінченного степеня від x, придатний для тієї чи іншої оцінки; $\lambda(x)=\min\limits_{1\leq i\leq n}\lambda_i(x)$, $\lambda_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ – власні значення матриці $C(x,0)$. Беручи до уваги умови 2 із /6/, бачимо, що $\Pi_i(x,\tau)$ є функціями примежового шару.

Функцію примежового шару в околі $x=0$ будуємо у вигляді $Q(\xi,t;\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)$ / ξ – регуляризуюче перетворення/. Для визначення $Q_i(\xi,t)$ ставимо такі задачі:

$$B(0,t)\frac{\partial Q_i}{\partial \xi}+C(0,t)Q_i=q_i(\xi,t),\ Q_i(0,t)=\begin{cases}\psi(t)-V_0(0,t),\ i=0;\\ -V_i(0,t),\ i=1,2,\dots,N,\end{cases} \qquad /7/$$

де $q_i(\xi,t)$ – деяка лінійна комбінація $Q_s(\xi,t)$ $(s<i)$ і їх похідних, причому $q_0(\xi,t)\equiv 0$. Для $Q_i(\xi,t)$ справедлива оцінка $\|Q_i(\xi,t)\|\leq M(\xi)\exp\left\{-\frac{\lambda(t)}{b(0,t)}\xi\right\}$, з огляду на яку, враховуючи умову 2 , $Q_i(\xi,t)$ – функції примежового шару. Тут $\lambda(t)=\min\limits_{1\leq i\leq n}\lambda_i(t)$; $\lambda_i(t)$ – власні значення матриці $C(0,t)$.

Функція $\Pi(x,\tau;\varepsilon)$, задовольняючи в сумі з $V(x,t;\varepsilon)$ першу умову /2/, вносить нев"язку у виконання другої умови /2/. Аналогічно $Q(\xi,t;\varepsilon)$ вносить нев"язку в першу умову /2/. Щоб ліквідувати ці нев"язки, будуємо функцію кутового примежового шару $P(\xi,\tau;\varepsilon)=\sum\limits_{i=0}^{N}\varepsilon^i P_i(\xi,\tau)$.

Для знаходження $P_i(\xi,\tau)$ ставимо задачі

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 P_i}{\partial\tau\partial\xi}+A(0,0)\dfrac{\partial P_i}{\partial\tau}+B(0,0)\dfrac{\partial P_i}{\partial\xi}+C(0,0)P_i=p_i(\xi,\tau);\\ P_i(\xi,0)=-Q_i(\xi,0),\ P_i(0,\tau)=-\Pi_i(0,\tau),\end{cases} \qquad /8/$$

де $P_i(\xi,\tau)$ лінійно виражається через $P_s(\xi,\tau)$ $(s<i)$ і їх похідні, причому $P_0(\xi,\tau)\equiv 0$; /8/ – задача Гурса для слабо зв"язаної системи гіперболічних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Легко бачити, що з огляду на умови 4 /8/ узгоджені в кутовій точці $(0,0)$, що дає змогу будувати АР розв"язку задачі /1/, /2/ довільного порядку N . Для $P_i(\xi,\tau)$ $(i=\overline{0,N})$, що є розв"язком /8/, доведена лема, аналогічна відповідній лемі у праці [4], в якій показано, що $P_i(\xi,\tau)$ – функції кутового примежового шару. При доведенні леми використовуємо умови 3 нашого припущення.

Для залишкового члена методом інтегралів енергії [5] доведена оцінка

$$\| R_N(x,t;\varepsilon)\|_{L_2(D)} = O(\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}). \qquad /9/$$

Сформулюємо це у вигляді теореми.

<u>Теорема</u>. Нехай виконуються умови 1–4. Тоді розв"язок задачі /1/, /2/ допускає АР у вигляді /3/, де $U_i(x,t)$ $(i=\overline{0,N})$ знаходимо із /4/; $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$ $(i=\overline{0,N})$ – функції звичайного примежового шару, що є відповідно розв"язками задач /5/ і /7/; $P_i(\xi,\tau)$ $(i=\overline{0,N})$ – функції кутового примежового шару, які знаходять із /8/; для залишкового члена АР $R_N(x,t;\varepsilon)$ справедлива оцінка /9/.

1. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений // Мат. сб. 1977. Т. 146. № 3. С. 460-485. 2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973. 3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат.наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3-122. 4. Кадыкенов Б.М. Асимптотические разложения решения задачи типа Гурса для систем линейных гиперболических уравнений с малым параметром // Вопр. прикл.математики и механики. 1975. Вып. 2. С. 84-89. 5. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 6. Цымбал В.Н. Гиперболическая сингулярно возмущенная система первого порядка // Общая теория граничных задач: Сб.науч.тр. К., 1983. С. 301-302.

Стаття надійшла до редколегії 13.05.86

УДК 517.956

В.Г.Костенко, Л.О.Губаль

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ПЕРШОЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

За схемою* знайдено наближений розв"язок першої змішаної задачі для системи двох лінійних параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial u}{\partial x} + Au - f(x,t), \quad 0<x<x_0, \ t>0 \qquad /1/$$

з початковими

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad /2/$$

та крайовими

$$u\Big|_{x=0} = \mu(t), \quad u\Big|_{x=x_0} = \vartheta(t) \qquad /3/$$

умовами.

Тут $D = \| d_{ij} \|$; $B = \| b_{ij} \|$; $A = \| a_{ij} \|$; $i,j = 1,2$; $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\mu(t)$, $\vartheta(t)$ – задані двокомпонентні вектор-функції своїх аргументів.

На відрізках прямих $0<x<x_0$, $t = k\tau$, $k=1,2,\ldots$ наближений розв"язок $u(x,k\tau) = u_k(x)$ задачі /1/ – /3/ зображається формулами

$$u_k(x) = V_k(x) + W_k(x),$$

в яких

$$V_k(x) = \int_0^{x_0} G(x,\xi)\left[F_k(\xi) - \frac{V_{k-1}(\xi)}{\tau}\right] d\xi,$$

$$V_0(x) = \varphi(x) - (\vartheta(0) - \mu(0))\frac{x}{x_0} - \mu(0),$$

---

* К о с т е н к о В.Г., Г у б а л ь Л.О. Наближений розв"язок змішаної задачі для параболічних систем рівнянь // Вісн.Львів. ун-ту. Сер.мех.-мат. 1986. Вип. 25. С. 28-31.

$$W_k(x) = (\vartheta_k - \mu_k)\frac{x}{x_0} + \mu_k,$$

$$F_k(\xi) = f_k(\xi) + (\vartheta_k' - \mu_k')\frac{\xi}{x_0} + \mu_k' - B(\vartheta_k - \mu_k)\frac{1}{x_0} -$$

$$- A[(\vartheta_k - \mu_k)\frac{\xi}{x_0} + \mu_k],$$

елементи $G_{1m}(x,\xi)$, $G_{2m}(x,\xi)$ m -го стовпця $(m=1,2)$ матриці Гріна $G(x,\xi)$ мають вигляд

$$G_{1m}(x,\xi) = \frac{2}{\Delta\Delta^{(m)}}\Big\{(\gamma_{24} - \gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=3,4} e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}[(\gamma_{2j} - \gamma_{22})e^{\alpha_1 x} +$$

$$+ (\gamma_{21} - \gamma_{2j})e^{\alpha_2 x}] + (\Delta_3^{(m)} e^{\alpha_3(x-\xi)} + \Delta_4^{(m)} e^{\alpha_4(x-\xi)})(\gamma_{22} - \gamma_{21})\Big] +$$

$$+ (\gamma_{24} - \gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=2,4} e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}[(\gamma_{23} - \gamma_{2j})e^{\alpha_1 x} + (\gamma_{2j} - \gamma_{21})e^{\alpha_3 x}] +$$

$$+ (\Delta_2^{(m)} e^{\alpha_2(x-\xi)} + \Delta_4^{(m)} e^{\alpha_4(x-\xi)})(\gamma_{21} - \gamma_{23})\Big] +$$

$$+ (\gamma_{23} - \gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)x_0}\Big[\sum_{j=2,3} e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}[(\gamma_{2j} - \gamma_{24})e^{\alpha_1 x} + (\gamma_{21} - \gamma_{2j})e^{\alpha_4 x}] +$$

$$+ (\Delta_2^{(m)} e^{\alpha_2(x-\xi)} + \Delta_3^{(m)} e^{\alpha_3(x-\xi)})(\gamma_{24} - \gamma_{21})\Big] +$$

$$+ (\gamma_{24} - \gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=1,4} e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}[(\gamma_{2j} - \gamma_{23})e^{\alpha_2 x} + (\gamma_{22} - \gamma_{2j})e^{\alpha_3 x}] +$$

$$+ (\Delta_1^{(m)} e^{\alpha_1(x-\xi)} + \Delta_4^{(m)} e^{\alpha_4(x-\xi)})(\gamma_{23} - \gamma_{22})\Big] +$$

$$+ (\gamma_{23} - \gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)x_0}\Big[\sum_{j=1,3} e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}[(\gamma_{24} - \gamma_{2j})e^{\alpha_2 x} + (\gamma_{2j} - \gamma_{22})e^{\alpha_4 x}] +$$

$$+ (\Delta_1^{(m)} e^{\alpha_1(x-\xi)} + \Delta_3^{(m)} e^{\alpha_3(x-\xi)})(\gamma_{22} - \gamma_{24})\Big] +$$

$$+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)x_0}\Big[\sum_{j=1,2} e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}\big[(\gamma_{2j}-\gamma_{24})e^{\alpha_3 x}+(\gamma_{23}-\gamma_{2j})e^{\alpha_4 x}\big]+$$
$$+\big(\Delta_1^{(m)}e^{\alpha_1(x-\xi)}+\Delta_2^{(m)}e^{\alpha_2(x-\xi)}\big)(\gamma_{24}-\gamma_{23})\Big]\Big\}$$

для $0\le x\le\xi$;

$$G_{1m}(x,\xi)=\frac{2}{\Delta\Delta^{(1)}}\Big\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=1,3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{2j}-\gamma_{22})e^{\alpha_1 x}+$$
$$+\sum_{j=2,3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{21}-\gamma_{2j})e^{\alpha_2 x}\Big]+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=1,2,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{23}-\gamma_{2j})e^{\alpha_1 x}+$$
$$+\sum_{j=2,3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{2j}-\gamma_{21})e^{\alpha_3 x}\Big]+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)x_0}\Big[\sum_{j=1,2,3}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{2j}-\gamma_{24})e^{\alpha_1 x}+$$
$$+\sum_{j=2,3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{21}-\gamma_{2j})e^{\alpha_4 x}\Big]+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=1,2,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{2j}-\gamma_{23})e^{\alpha_2 x}+\sum_{j=1,3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{22}-\gamma_{2j})e^{\alpha_3 x}\Big]+$$
$$+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)x_0}\Big[\sum_{j=1,2,3}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{24}-\gamma_{2j})e^{\alpha_2 x}+\sum_{j=1,3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{2j}-\gamma_{22})e^{\alpha_4 x}\Big]+$$
$$+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)x_0}\Big[\sum_{j=1,2,3}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{2j}-\gamma_{24})e^{\alpha_3 x}+\sum_{j=1,2,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{23}-\gamma_{2j})e^{\alpha_4 x}\Big]\Big\}$$

для $\xi\le x\le x_0$;

$$G_{2m}(x,\xi)=\frac{2}{\Delta\Delta^{(1)}}\Big\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}\big[(\gamma_{2j}-\gamma_{22})\gamma_{21}e^{\alpha_1 x}+(\gamma_{21}-\gamma_{2j})\gamma_{22}e^{\alpha_2 x}\big]+$$
$$+\big(\Delta_3^{(m)}e^{\alpha_3(x-\xi)}\gamma_{23}+\Delta_4^{(m)}e^{\alpha_4(x-\xi)}\gamma_{24}\big)(\gamma_{22}-\gamma_{21})\Big]+$$
$$+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=2,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}\big[(\gamma_{23}-\gamma_{2j})\gamma_{21}e^{\alpha_1 x}+(\gamma_{2j}-\gamma_{21})\gamma_{23}e^{\alpha_3 x}\big]+$$
$$+\big(\Delta_2^{(m)}e^{\alpha_2(x-\xi)}\gamma_{22}+\Delta_4^{(m)}e^{\alpha_4(x-\xi)}\gamma_{24}\big)(\gamma_{21}-\gamma_{23})\Big]+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)x_0}\Big[\sum_{j=2,3}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}\big[(\gamma_{2j}-\gamma_{24})\gamma_{21}e^{\alpha_1 x}+(\gamma_{21}-\gamma_{2j})\gamma_{24}e^{\alpha_4 x}\big]+$$

$$+(\Delta_2^{(m)}e^{\alpha_2(x-\xi)}\gamma_{22}+\Delta_3^{(m)}e^{\alpha_3(x-\xi)}\gamma_{23})(\gamma_{24}-\gamma_{21})\Big]+$$

$$+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=1,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}\big[(\gamma_{2j}-\gamma_{23})\gamma_{22}e^{\alpha_2 x}+(\gamma_{22}-\gamma_{2j})\gamma_{23}e^{\alpha_3 x}\big]+$$

$$+(\Delta_1^{(m)}e^{\alpha_1(x-\xi)}\gamma_{21}+\Delta_4^{(m)}e^{\alpha_4(x-\xi)}\gamma_{24})(\gamma_{23}-\gamma_{22})\Big]+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)x_0}\Big[\sum_{j=1,3}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}\big[(\gamma_{24}-\gamma_{2j})\gamma_{22}e^{\alpha_2 x}+(\gamma_{2j}-\gamma_{22})\gamma_{24}e^{\alpha_4 x}\big]+$$

$$+(\Delta_1^{(m)}e^{\alpha_1(x-\xi)}\gamma_{21}+\Delta_3^{(m)}e^{\alpha_3(x-\xi)}\gamma_{23})(\gamma_{22}-\gamma_{24})\Big]+$$

$$+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)x_0}\Big[\sum_{j=1,2}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}\big[(\gamma_{2j}-\gamma_{24})\gamma_{23}e^{\alpha_3 x}+(\gamma_{23}-\gamma_{2j})\gamma_{24}e^{\alpha_4 x}\big]+$$

$$+(\Delta_1^{(m)}e^{\alpha_1(x-\xi)}\gamma_{21}+\Delta_2^{(m)}e^{\alpha_2(x-\xi)}\gamma_{22})(\gamma_{24}-\gamma_{23})\Big]\Big\}$$

для $0\le x\le \xi$;

$$C_{2m}(x,\xi)=\frac{2}{\Delta\Delta^{(1)}}\Big\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=1,3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{2j}-\gamma_{22})\gamma_{21}e^{\alpha_1 x}+$$

$$+\sum_{j=2,3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{21}-\gamma_{2j})\gamma_{22}e^{\alpha_2 x}\Big]+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)x_0}\Big[\sum_{j=1,2,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{23}-\gamma_{2j})\gamma_{21}e^{\alpha_1 x}+$$

$$+\sum_{j=2,3,4}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{2j}-\gamma_{21})\gamma_{23}e^{\alpha_3 x}\Big]+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)x_0}\Big[\sum_{j=1,2,3}e^{-\alpha_j\xi}\Delta_j^{(m)}(\gamma_{2j}-\gamma_{24})\gamma_{21}e^{\alpha_1 x}+$$

$$+\sum_{j=2,3,4} e^{-\alpha_j \xi} \Delta_j^{(m)} (\gamma_{21}-\gamma_{2j})\gamma_{24} e^{\alpha_4 x}] + (\gamma_{24}-\gamma_{21}) e^{(\alpha_1+\alpha_4)x_0} [\sum_{j=1,2,4} e^{-\alpha_j \xi} \Delta_j^{(m)} (\gamma_{2j}-\gamma_{23})\gamma_{22} e^{\alpha_2 x} +$$

$$+\sum_{j=1,3,4} e^{-\alpha_j \xi} \Delta_j^{(m)} (\gamma_{22}-\gamma_{2j})\gamma_{23} e^{\alpha_3 x}] + (\gamma_{23}-\gamma_{21}) e^{(\alpha_1+\alpha_3)x_0} [\sum_{j=1,2,3} e^{-\alpha_j \xi} \Delta_j^{(m)} (\gamma_{24}-\gamma_{2j})\gamma_{22} e^{\alpha_2 x} +$$

$$+\sum_{j=1,3,4} e^{-\alpha_j \xi} \Delta_j^{(m)} (\gamma_{2j}-\gamma_{22})\gamma_{24} e^{\alpha_4 x}] + (\gamma_{22}-\gamma_{21}) e^{(\alpha_1+\alpha_2)x_0} [\sum_{j=1,2,3} e^{-\alpha_j \xi} \Delta_j^{(m)} (\gamma_{2j}-\gamma_{24})\gamma_{23} e^{\alpha_3 x} +$$

$$+\sum_{j=1,2,4} e^{-\alpha_j \xi} \Delta_j^{(m)} (\gamma_{23}-\gamma_{2j})\gamma_{24} e^{\alpha_4 x}]\}$$

для $\xi \le x \le x_0$;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – дійсні прості корені рівняння

$$\det [D\alpha^2 + B\alpha + (A - \frac{1}{\tau}E)] = 0,$$

$$\gamma_{2j} = \frac{d_{11}\alpha_j^2 + b_{11}\alpha_j + a_{11} - \frac{1}{\tau}}{d_{12}\alpha_j^2 + b_{12}\alpha_j + a_{12}}, \quad j = \overline{1,4}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ e^{\alpha_1 x_0} & e^{\alpha_2 x_0} & e^{\alpha_3 x_0} & e^{\alpha_4 x_0} \\ \gamma_{21} e^{\alpha_1 x_0} & \gamma_{22} e^{\alpha_2 x_0} & \gamma_{23} e^{\alpha_3 x_0} & \gamma_{24} e^{\alpha_4 x_0} \end{vmatrix}, \quad \Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1\gamma_{21} & \alpha_2\gamma_{22} & \alpha_3\gamma_{23} & \alpha_4\gamma_{24} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & \gamma_{22}-\gamma_{24} & \gamma_{23}-\gamma_{24} \\ \frac{d_{22}}{2\det D} & \alpha_2-\alpha_4 & \alpha_3-\alpha_4 \\ -\frac{d_{21}}{2\det D} & \alpha_2\gamma_{22}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_4\gamma_{24} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{24} & 0 & \gamma_{23}-\gamma_{24} \\ \alpha_1-\alpha_4 & \frac{d_{22}}{2\det D} & \alpha_3-\alpha_4 \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_4\gamma_{24} & \frac{-d_{21}}{2\det D} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_4\gamma_{24} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{24} & \gamma_{22}-\gamma_{24} & 0 \\ \alpha_1-\alpha_4 & \alpha_2-\alpha_4 & \frac{d_{22}}{2\det D} \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_2\gamma_{22}-\alpha_4\gamma_{24} & \frac{-d_{21}}{2\det D} \end{vmatrix}, \quad \Delta_4^{(1)} = \begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{22} & \gamma_{23}-\gamma_{22} & 0 \\ \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_3-\alpha_2 & \frac{d_{22}}{2\det D} \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_2\gamma_{22} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_2\gamma_{22} & \frac{-d_{21}}{2\det D} \end{vmatrix};$$

$\Delta_j^{(2)}$ одержуємо з $\Delta_j^{(1)}$, $j=\overline{1,4}$ заміною в останньому стовпця з елементами $0, \frac{d_{22}}{2\det D}, \frac{-d_{21}}{2\det D}$ відповідно стовпцем з елементами $0, \frac{-d_{12}}{2\det D}, \frac{d_{11}}{2\det D}$.

Зауважимо, що при цьому задовольняються рівності

$$\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(1)}=0,\ \sum_{j=1}^{4}\gamma_{2j}\Delta_j^{(1)}=0,\ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\Delta_j^{(1)}=\frac{-d_{22}}{2\det D}\Delta^{(1)},\ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\gamma_{2j}\Delta_j^{(1)}=\frac{d_{21}}{2\det D}\Delta^{(1)};$$

$$\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(2)}=0,\ \sum_{j=1}^{4}\gamma_{2j}\Delta_j^{(2)}=0,\ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\Delta_j^{(2)}=\frac{d_{12}}{2\det D}\Delta^{(1)},\ \sum_{j=1}^{4}\alpha_j\gamma_{2j}\Delta_j^{(2)}=\frac{-d_{11}}{2\det D}\Delta^{(1)}.$$

Цей алгоритм ефективно реалізовано на ЕОМ на прикладі першої змішаної задачі для системи рівнянь тепловологопереносу, яка є в найбільш простому випадку частинним випадком системи /1/.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 517.946

В.М.Кирилич

ПРО ОДНУ НЕЛОКАЛЬНУ ЗАДАЧУ ТИПУ ДАРБУ ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Нехай G – криволінійний сектор у верхній півплощині $t>0$ площини XOt, обмежений кривими γ_0 і γ_{m+1}, заданими відповідно рівняннями $x=a_0(t)$ і $x=a_{m+1}(t)$, $m\geq 0$, $a_0(0)=a_{m+1}(0)=0$, $a_{m+1}(t)>a_0(t)$ для всіх $t>0$. Криві $\gamma_s: x=a_s(t)$, $s=\overline{0,m+1}$, всі $a_s\in C^1(R_+)$, $a_{s+1}(t)>a_s(t)$ для всіх $t>0$, $a_s(0)=0$ розбивають G на $m+1$ компоненту зв"язності G^s, $s=\overline{0,m}$, пронумеровані зліва направо.

При кожному $s=\overline{0,m}$ в G^s розглянемо строго гіперболічне рівняння порядку $n\geq 2$

$$A^s u\equiv\sum_{i=0}^{n}A_i^s(x,t,\partial_x,\partial_t)u^s(x,t)=f^s(x,t), \qquad /1/$$

де $A_i^s(x,t,\partial_x,\partial_t)$ – лінійний однорідний диференціальний оператор порядку i, при кожному $s=\overline{0,m}$:

$$A_i^s(x,t,\partial_x,\partial_t)u^s(x,t)\equiv\sum_{j=0}^{i}A_{ij}^s(x,t)\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\partial t^{i-j}},$$

коефіцієнти $A_{ij}^s(x,t)$ якого квадратні матриці порядку n, причому

$$A_{n_0}^s(x,t)\equiv I,\quad s=\overline{0,m}.$$

Для рівняння /1/ задаються умови

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{i=0}^{n-1}\Big[\sum_{k=s}^{s+1}B_{is}^{kp}(t,\partial_x,\partial_t)u^s(x,t)\Big|_{x=a_k(t)}+$$
$$+\int_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)}C_{is}^p(y,t,\partial_y,\partial_t)u^s(y,t)dy\Big]=h^p(t),$$
$$p=\overline{1,q},$$

/2/

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)}C_{is}^p(y,t,\partial_y,\partial_t)u^s(y,t)dy=h^p(t),$$
$$p=\overline{q+1,N},$$

/3/

$$N=\sum_{s=0}^{m}(p_s-q_s)+(m+1)n,\quad 0\le q\le N,\quad t\ge 0,$$

$$\frac{\partial^{k+l}u^s(0,0)}{\partial x^k\partial t^l}=u_s^{kl},\quad k+l=\overline{0,n-2},\quad s=\overline{0,m}.$$

/4/

Тут B_{is}^{kp} і C_{is}^p – задані лінійні однорідні диференціальні оператори порядку i з неперервними коефіцієнтами; $h^p(t)$ – задані при $t\geq 0$ неперервні функції, причому $h^p\in C^1(R^+)$ і $h^p(0)=0$ при $p=\overline{q+1,N}$; u_s^{kl} – задані числа.

Коректна розв"язальність задачі /1/-/4/ і змішаних задач для рівняння /1/ розглянута у працях [1, 2]. Доведення існування і единості розв"язку таких задач грунтується на їх зведенні до відповідних задач для системи лінійних рівнянь першого порядку виду

$$\frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \lambda_i^s(x,t)\frac{\partial v_i^s}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^s(x,t)\, v_k^s(x,t) +$$

$$+ S_i^s(x,t,\partial_x,\partial_t)u^s + f^s(x,t),\ i=\overline{1,n},\quad s=\overline{0,m}. \tag{5}$$

Схема редукції /1/–/4/ до еквівалентної задачі для системи /5/, яка запропонована в [1, 2], має деякі недоліки. Зокрема, система інтегрофункціональних рівнянь Вольтерра другого роду для знаходження функцій u^s та їх похідних до $n-1$ порядку складається з $\frac{1}{2}n(n+1)(m+1)$ рівнянь, що перевищує порядок рівняння, крім того, в [1, 2] не можна явно виписати узагальнений $n-1$ раз неперервно диференційований розв"язок задачі /1/–/4/.

Пропонуємо більш досконалу схему редукції. Всі позначення і пояснення можна знайти у працях [1, 2].

<u>Схема редукції</u>. Для будь-якої точки $(x,t)\in \bar{G}^s$ виберемо лінію ℓ з рівнянням

$$\psi(\tau,x,t) = a_0(\tau) + \frac{a_{s+1}(\tau)-a_s(\tau)}{a_{s+1}(t)-a_s(t)}\,(x-a_s(t)),\ (0\le\tau\le t).$$

Тоді для довільних $i=\overline{0,n-2}$, $j=\overline{0,i}$ має місце вираз

$$\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\,\partial t^{i-j}}\bigg|_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{n-2}\sum_{\ell=j}^{k-i+j} g_{ij}^{k\ell s}(x,t)\,\frac{\partial^k u^s}{\partial x^\ell\,\partial t^{k-\ell}}\bigg|_{(0,0)} +$$

$$+ \int_0^t \sum_{k=1}^{n} G_{ij}^{ks}(\tau,x,t)\, v_k^s(\psi(\tau,x,t),\tau)\,d\tau,\quad s=\overline{0,m}. \tag{6}$$

Щоб його одержати, у рівності

$$\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\,\partial t^{i-j}}\bigg|_{(x,t)} = \frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\,\partial t^{i-j}}\bigg|_{(0,0)} + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial^i u^s}{\partial x^j\,\partial t^{i-j}}\bigg|_{(\psi(\tau,x,t),\tau)}\right)d\tau$$

підінтегральну функцію слід виразити за формулою похідної від складної функції; після цього для кожної з одержаних похідних $i+1$ -го порядку застосувати аналогічні перетворення і т.д., аж до похідних $n-1$ -го порядку, які необхідно виразити через v_k^s. Після цього за допомогою стандартної перестановки порядку інтегрування перетворити кратні інтеграли в однократні.

Підстановка виразу /6/ у рівняння /5/, з врахуванням /4/, приводить до системи інтегродиференціальних рівнянь типу Вольтерра виду

$$\frac{\partial v_i^s}{\partial t} + \lambda_i^s(x,t)\frac{\partial v_i^s}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^s(x,t)\, v_k^s(x,t) +$$

$$+ \int_0^t \sum_{k=1}^{n} Q_{ik}^s(\tau,x,t)\, v_k^s(\psi(\tau,x,t),\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{k} u_s^{kl}\, g_{kl}^{is}(x,t) + f_i^s(x,t),\ (x,t) \in G_s,$$

$$s = \overline{0,m}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad /7/$$

Відповідно перетворюються граничні умови /2/-/3/, внаслідок чого вони набирають вигляду

$$\sum_{s=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} \Big[\sum_{k=s}^{s+1} \alpha_{is}^{kp}(t)\, v_i^s(a_k(t),t) +$$

$$+ \int_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)} \beta_{is}^p(y,t)\, v_i^s(y,t)\, dy \Big] = \tilde{H}_1^p(t,v) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{k} \tilde{h}_{kl1}^p(t)\, u_s^{kp}, \ p = \overline{1,q},$$

$$\sum_{s=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} \int_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)} \beta_{is}^p(y,t)\, v_i^s(y,t)\, dy = \qquad /8/$$

$$= \tilde{H}_2^p(t,v) + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{k} \tilde{h}_{kl2}^p(t)\, u_s^{kp}, \quad p = \overline{q+1, N}, \quad t \geq 0. \qquad /9/$$

Тут g_{ij}^{kls}, Q_{ik}^{s}, α_{is}^{kp}, β_{is}^{p}, $\tilde{H}_\delta^p$, $h_{kl\delta}^{p}$, $(\delta = 1,2)$ – відомі функції, які одержують із вихідних даних задачі /1/-/4/.

Тепер можна дати означення кусково неперервного узагальненого розв"язку задачі /1/-/4/. Саме згідно з формулою /6/ так називатимемо кусково неперервну функцію u, для якої

$$u^s(x,t) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^{k} g_{0,0}^{kls}(x,t)\, u_s^{kl} +$$

$$+ \int_0^t \sum_{k=1}^{n} G_{0,0}^{ks}(\tau,x,t)\, v_k^s(\psi(\tau,x,t),\tau)\, d\tau,$$

де вектор-функція v є кусково неперервний розв"язок задачі /7/-/9/, тобто кусково неперервна функція, яка при всіх (x,t) задовольняє інтегрофункціональне рівняння, що одержується інтегруванням рівнянь /7/ вздовж відповідних характеристик, і при всіх t співвідношенням /8/-/9/.

Хоча рівняння /7/ і додаткові умови /8/-/9/ мають більш загальний вигляд, ніж /1/ і /2/-/3/ у праці [1] внаслідок додаткових інтегральних членів типу Вольтерра, всі міркування, проведені в [1], безпосередньо поширюються на задачу /7/-/9/. Таким чином, одержуємо таку теорему.

<u>Теорема</u>. Нехай задані функції в задачі /1/-/4/ задовольняють всі припущення, сформульовані у праці /1/, і для системи /7/ з умовами /8/-/9/ виконуються умови узгодження. Тоді задача /1/-/4/ має в G єдиний кусково неперервний узагальнений розв"язок.

1. Мельник З.О., Кирилич В.М. Задачи без начальных условий с интегральными ограничениями для гиперболических уравнений и систем на прямой // Укр.мат.журн. 1983. Т. 35. № 6. С. 771-776. 2. Мельник З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 2. С. 246-253.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.512

М.Й. Михалюк, Є.М. Парасюк

ПРО ДРУГУ ВАРІАЦІЮ ОДНОГО ФУНКЦІОНАЛУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає у відшуканні плоскої однозв"язної області Д, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Існує такий варіаційний принцип: зі всіх однозв"язних областей, що містять початок координат, область Д, яка є розв"язком оберненої задачі для потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ, характеризується тим, що функція $z=z(e^{i\varphi})$, $0\leq\varphi<2\pi$ регулярного параметричного представлення її границі дає стаціонарне значення функціоналу

$$J_0(z(e^{i\varphi}))=\int_0^{2\pi}\left[x^2+y^2+\frac{2}{\pi\sigma}V_e(x,y)\right]d\varphi, \qquad /1/$$

де

$$z(e^{i\varphi})=x(\varphi)+iy(\varphi)=x(\varphi)-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(S)\,ctg\frac{S-\varphi}{2}\,dS=$$

$$=x(\varphi)+iS(x)(\varphi),\quad S(x)(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(S)\,ctg\frac{S-\varphi}{2}\,dS. \qquad /2/$$

Функція $z=z(t)$ конформно відображає круг $|t|<1$ комплексної площини t, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z(t)$ називаємо розв"язком оберненої задачі для потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Функціонал /1/ розглядаємо на сукупності однозв"язних областей Д, голоморфні параметризації $z=z(e^{i\varphi})$, $0\leq\varphi<2\pi$ границь яких задовольняють умову Гельдера.

Розглянемо варіації виду $x_\varepsilon(\varphi)=x(\varphi)+\varepsilon h(\varphi)$, $-1\leq\varepsilon\leq 1$, де $h(\varphi)$ – деякий фіксований; 2π – періодичний приріст функції $x=x(\varphi)$; $0\leq\varphi<2\pi$, що задовольняє умову Гельдера.

Відомо [1], якщо $z(t)$ – розв"язок оберненої задачі логарифмічного потенціалу, то функція $x(\varphi)=Re\,z(e^{i\varphi})$, $0\leq\varphi<2\pi$ задовольняє нелінійне інтегральне рівняння

$$4x(\varphi)+\frac{2}{\pi\sigma}V_{\ell x}(\varphi)-\frac{2}{\pi\sigma}S[V_{\ell y}](\varphi)=0, \qquad /3/$$

де

$$V_{\ell x}(\varphi)=V_{\ell x}(x(\varphi),\ S(x)(\varphi)),$$

$$V_{\ell y}(\varphi)=V_{\ell y}(x(\varphi),\ S(x)(\varphi)).$$

Навпаки, якщо деяка функція $x(\varphi)$, що задовольняє умову Гельдера, є розв"язком рівняння /3/, і аналітична функція

$$z(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(\varphi)\,\frac{e^{i\varphi}+t}{e^{i\varphi}-t}\,d\varphi$$

здійснює конформне відображення одиничного круга $|t|<1$ на деяку однозв"язну область Д площини $z=x+iy$, то функція $z(t)$ є розв"язком оберненої задачі для потенціалу $V_\ell(x,y)$ і густини σ.

Друга варіація для функціоналу /1/ має вигляд

$$\delta^2 J_0(x,h,h)=\frac{d}{d\varepsilon}\,\delta J_0(x_\varepsilon,\ h)\Big|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\int_0^{2\pi}h(\varphi)\,A(h)(\varphi)\,d\varphi=\big(A(h)(\varphi),\ h(\varphi)\big), \qquad /4/$$

де

$$A(h)(\varphi)=4h(\varphi)+aV_{\ell xx}(\varphi)h(\varphi)+aV_{\ell xy}(\varphi)S(h)(\varphi)+$$

$$+\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\{V_{\ell yx}(s)\,h(s)+V_{\ell yy}(s)\,S(h)(s)\Big\}\operatorname{ctg}\frac{s-\varphi}{2}\,ds, \qquad /5/$$

$$V_{\ell xx}(\varphi)=V_{\ell xx}(x(\varphi),S(x)(\varphi)),\ V_{\ell xy}(\varphi)=V_{\ell xy}(x(\varphi),S(x)(\varphi)),$$

$$V_{\ell yy}(\varphi)=V_{\ell yy}(x(\varphi),S(x)(\varphi)),\quad a=\frac{2}{\pi\sigma}.$$

Легко перевірити, що A є лінійним, симетричним оператором.

Наша мета - дослідження другої варіації функціоналу /1/ для потенціалу

$$U_\ell(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_\ell}{\partial z} = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2}, \qquad /6/$$

$$a^2 < \frac{2}{27}, \quad \operatorname{Im} a = 0, \quad b = 1$$

в околі точки $z = z(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2, \ |t| < 1, \ \alpha_1 > 0,$ яка є розв"язком оберненої задачі логарифмічного потенціалу [2]. Неважко переконатися, що

$$\left(A(h)(\varphi), h(\varphi)\right) = 4\int_0^{2\pi} h^2(\varphi)\,d\varphi + \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\int_{|t|=1} V_{\ell zz}(z(t))\tilde{h}^2(t)\frac{dt}{it} \geq$$

$$\geq \pi(h_1 - 2h_2)^2 \geq 0, \qquad /7/$$

де

$$V_{\ell zz} = -\frac{\pi}{2}U_{\ell z}(z) = \frac{1}{2}\left(V_{\ell xx} - iV_{\ell yx}\right),$$

$$\tilde{h}(e^{i\varphi}) = h(\varphi) + iS(h)(\varphi) = h_1 t + h_2 t^2, \ h_1 > 0, \ \operatorname{Im} h_2 = 0.$$

З нерівності /7/ випливає теорема.

Теорема. В класі 2π - періодичних функцій, що задовольняють умову Гельдера, кожний розв"язок нелінійного інтегрального рівняння /3/ для потенціалу /6/ локально єдиний.

1. Михалюк М.И. О локальной единственности решений обратной задачи логарифмического потенциала для постоянной плотности // Докл.АН УССР. 1973. № 4. С. 47-49. 2. Михалюк М.Й. Про єдиність розв"язку оберненої задачі логарифмічного потенціалу для постійної густини. У цьому ж Віснику. 3. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.512

М.Й.Михалюк

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ"ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ЛОГАРИФМІЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ СТАЛОЇ ГУСТИНИ

Обернена задача логарифмічного потенціалу полягає в тому, щоб відшукати плоску однозв"язну область $\mathcal{D}$, при заповненні якої речовиною зі сталою густиною σ породжується заданий зовнішній потенціал $V_e(x,y)$.

Введемо допоміжну функцію $z = z(t)$, яка відображає конформно круг $|t|<1$ комплексної площини t на область $\mathcal{D}$ площини $z = x+iy$, що містить початок координат, причому $z(0)=0$, $z'(0)>0$. Функцію $z=z(t)$ назвемо розв"язком оберненої задачі для зовнішнього потенціалу $V_e(x,y)$ і густини σ.

Обернена задача логарифмічного потенціалу зводиться до розв"язку нелінійного інтегрального рівняння

$$\sigma z_*(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{U_e(z(\tau))\,d\tau}{\tau - t}, \quad |t|>1, \qquad /1/$$

де

$$z_*(t) = \overline{z\left(\frac{1}{\bar t}\right)}, \ |t|>1, \quad U_e(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial V_e}{\partial z}.$$

Відомо, якщо густина розподілу мас $\sigma=1$ і $U_e(z)=\frac{1}{z}$, то розв"язком оберненої задачі потенціалу є круг радіуса 1 з центром у початку координат.

Розглянемо випадок, коли

$$U_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2}, \quad a = |a|e^{i\arg a},$$

$$0 \le \arg a < 2\pi, \quad \sigma = 1,$$

$$z(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots, \quad \alpha_1 > 0. \qquad /2/$$

Підставляючи /2/ в /1/, отримуємо нелінійну систему рівнянь

$$
\begin{cases}
\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha_1} - \dfrac{2a\alpha_2}{\alpha_1^3}, \\
\bar{\alpha}_2 = \dfrac{a}{\alpha_1^2}, \\
\alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = 0,
\end{cases} \qquad /3/
$$

де $0 < \alpha_1 < 1, \ \alpha_1^2 + 2|\alpha_2|^2 = 1.$

Нехай

$$\alpha_2 = |\alpha_2| e^{i\arg\alpha_2}, \quad 0 \le \arg\alpha_2 < 2\pi.$$

Тоді /3/ еквівалентна такій системі

$$
\begin{cases}
|a| = |\alpha_2| - 2|\alpha_2|^3, \\
|\alpha_2| = \dfrac{|a|}{\alpha_1^2}, \\
\alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = 0, \\
\arg\alpha_2 = -\arg a.
\end{cases} \qquad /4/
$$

Система /4/ має єдиний розв"язок (α_1, α_2) при $|a|^2 \le \frac{2}{27}$, який задовольняє умову $z'(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t \ne 0$ при $|t| < 1$.

Функція $z = z(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, де (α_1, α_2) розв"язок системи /4/, здійснює конформне відображення круга $|t| < 1$ площини t на деяку однозв"язну область $\mathcal{D}$ площини $z = x + iy$.

Таким чином, існує така теорема.

Теорема. Нехай $u_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2}, \ a = |a| e^{i\arg a},$

$$0 \le \arg a < 2\pi, \quad |a|^2 \le \frac{2}{27}, \quad \sigma = 1.$$

Тоді обернена задача логарифмічного потенціалу має єдиний розв"язок у класі однозв"язних областей.

Приклад. Нехай $u_e(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{4z^2}, \ \sigma = 1.$

Тоді функція

$$z(t)=\frac{1}{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}\,t+\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\,t^2,\quad |t|<1$$

здійснює конформне відображення круга $|t|<1$ на однозв"язну область $\mathcal{D}$ площини $z=x+iy$ і є розв"язком оберненої задачі логарифмічного потенціалу.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.53

М.В.Заболоцький

СФЕРИЧНА ПОХІДНА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Нехай f – ціла функція, $\mathcal{M}(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $\rho(f(z))=|f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$, $\mu(r,f)=\max\{\rho(f(z)):|z|=r\}$. Відомо [3], що для цілої трансцендентної функції f порядку $\rho<\infty$ виконується нерівність

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{r\mu(r,f)}{\ln\mathcal{M}(r,f)}\geq A(\rho+1). \qquad /1/$$

Тут і надалі через A позначаємо додатну абсолютну постійну.

У випадку, коли $\ln\mathcal{M}(r,f)$ – повільно зростаюча функція, нерівність /1/ можна уточнити. Нехай $\tau(r)=\sup\{d\ln\ln\mathcal{M}(t,f)/d\ln t: t\geq r\}$. Враховуючи, що $\ln 2\,\frac{r\mathcal{M}'(r,f)}{\mathcal{M}(r,f)\ln\mathcal{M}(r,f)}\leq\frac{\ln\mathcal{M}(2r,f)}{\ln\mathcal{M}(r,f)}-1$, одержуємо $\tau(r)\downarrow 0,\ r\to\infty$.

<u>Теорема</u>. Нехай f – ціла функція така, що $\ln\mathcal{M}(r,f)$ – повільно зростаюча функція. Тоді для довільного δ, $0<\delta<1$ виконується

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{(\tau(r))^{1-\delta}\,r\mu(r,f)}{\ln\mathcal{M}(r,f)}=\infty.$$

При доведенні теореми використовуємо таку лему.

<u>Лема</u>. Для цілої функції f, що задовольняє умови теореми, виконується

$$n(r,f^{-1})=O(\tau(r)\cdot\ln\mathcal{M}(r,f)),\ r\to\infty,$$

де $n(r,f^{-1})$ – кількість нулів функції f у крузі $\{z: |z| \le r\}$.

<u>Доведення</u>. Нехай $f(0)=1$. Припустимо, що лема не правильна, тобто існують послідовність (r_k), $r_k \to \infty$, $k \to \infty$, функція $\psi(r)$, $\psi(r) \to \infty$, $r \to \infty$ такі, що

$$n(r_k, f^{-1}) \ge \psi(r_k)\, \tau(r_k) \ln M(r_k, f), \quad k \to \infty.$$

З означення $N(r, f^{-1})$ для $r \ge r_k$ маємо

$$N(r,f^{-1}) = \int_0^r n(t,f^{-1})\, d\ln t \ge n(r_k, f^{-1}) \ln (r/r_k).$$

Звідси для $\bar{r}_k = r_k \exp(1/\tau(r_k))$ одержуємо

$$N(\bar{r}_k, f^{-1}) \ge \psi(r_k) \ln M(r_k, f). \qquad /2/$$

Разом з цим, враховуючи $\ln M(\bar{r}_k, f) \le e \ln M(r_k, f)$ [1], $N(r, f^{-1}) \le \ln M(r,f)$, одержуємо $N(\bar{r}_k, f^{-1}) \le e \times \ln M(r_k, f)$, що суперечить /2/. Лема доведена.

<u>Доведення теореми</u>. Для цілих функцій $g(z)$ нульового уточненого порядку $\rho(r)$ маємо [2]

$$\ln |g(z)| = N(r, g^{-1}) + o(r^{\rho(r)}), \quad r \to \infty \qquad /3/$$

для всіх z, $|z| < r$, за винятком множини кругів, сума радіусів яких не більша $Ar \cdot \varepsilon(r)$, де $\varepsilon(r)$ – функція, що задовольняє умови: 1/ $0 < \varepsilon(r) < 1$, $\varepsilon(r) \downarrow 0$, $r \to \infty$; 2/ $n(2r, g^{-1}) = o(\varepsilon(r) \cdot r^{\rho(r)})$, $r \to \infty$.

Нехай функція f задовольняє умови теореми. Приймемо $\varepsilon(r) = (\tau(r))^{1-\delta/2}$, $0<\delta<1$, $r^{\rho(r)} = \ln M(r,f)$. Використовуючи нашу лему, метод доведення теореми 2 і нерівність /12/ з праці [2], співвідношення /3/ для функції f запишемо як

$$\ln |f(z)| = N(r, f^{-1}) + o(\varepsilon(r) \cdot \ln M(r,f)), \quad r \to \infty.$$

Розглянемо значення $r = |a_i|$, де a_i – нулі функції f. Нехай $z_0 = r \cdot e^{i\varphi_0}$ – нуль функції f. Тоді існує R, $r > R > r - 2Ar\, \varepsilon(r)$ таке, що

$$\ln |f(Re^{i\varphi_0})| > 0{,}5 \ln M(R,f).$$

Нехай D – круг з центром в точці $Re^{i\varphi_0}$, в якому $|f(z)| > 1$ і $|f(z)| = 1$ у деякій точці на границі цього круга. З леми 1 праці [3] і з /4/ одержуємо

$$\rho(f(z')) \geq \frac{A \ln \mathcal{M}(R,f)}{r \cdot \varepsilon(r)}, \quad z' \in D. \qquad /5/$$

Враховуючи $\varepsilon(r) \downarrow 0$, $r \to \infty$, маємо для достатньо великих r, $r/2 < R < r$, $r/2 < |z'| = t < r$. Оскільки $\ln \mathcal{M}(R,f) \sim \ln \mathcal{M}(r,f)$, $r \to \infty$ то з /5/ маємо

$$\mu(t,f) \geq A \ln \mathcal{M}(r,f)/(r \cdot \varepsilon(r)) \geq A \ln \mathcal{M}(t,f)(t \cdot \varepsilon(t))^{-1}.$$

Враховуючи $r = |a_i| \to \infty$, $i \to \infty$, а отже, $t \to \infty$, одержуємо твердження теореми.

1. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат.сб. 1978. Т. 106. № 1. С. 44-65. 2. Гольдберг А.А., Заболоцкий Н.В. Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат.заметки. 1983. Т. 34. № 2. С. 227-236. 3. Clunie J., Hayman W. The spherical derivative of integral and meromorphic functions. Comment. Math. Helv., 1966, vol. 40. P. 117-148.

Стаття надійшла до редколегії 08.04.86

УДК 517.53

М.М.Хом"як, М.М.Шеремета

ПРО ЦІЛІ РЯДИ ДІРІХЛЕ СКІНЧЕННОГО НИЖНЬОГО R – ПОРЯДКУ

Для цілої функції F, заданої абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ рядом Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \qquad /1/$$

де $0 < \lambda_n \uparrow +\infty \; (n \to \infty)$, приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і через $n(t)$ позначимо лічильну функцію послідовності (λ_n). Якщо $n(t)/t \to \Delta \in [0, +\infty[$, то послідовність (λ_n) називаємо вимірною, а число Δ – її щільністю.

Основним у цій статті є наступне твердження.

Теорема 1. Нехай показники ряду /1/ такі, що $\Delta = 0$ і $\lambda_{n+1} - \lambda_n > h > 0$ $(\lambda_0 = 0)$. Якщо ряд /1/ задає цілу функцію F скінченного нижнього R -порядку $\lambda_R = \varliminf_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{\sigma} \ln \ln M(\sigma, F)$, то має місце рівність

$$\varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln^+ |F(\sigma)|}{\ln M(\sigma, F)} = 1. \qquad /2/$$

Зауважимо, що /2/ у випадку, коли F має R -порядок $\rho_R < \infty$, випливає з доведення теореми 1 із праці [2]. Наша теорема 1 випливає з більш загального результату, для формулювання якого нам потрібне деяке приготування.

Нехай $\mu(\sigma, F)$ і $\nu(\sigma, F)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /1/. Нижньою щільністю dE, вимірної множини $E \subset [0, +\infty[$ називаємо величину $dE = \varliminf_{\sigma \to +\infty} \frac{1}{\sigma} mes(E \cap [0, \sigma])$.

Скажемо, що $\Phi \in \Omega_0$, якщо Φ – додатна опукла зростаюча до $+\infty$, неперервно диференційована на $]-\infty, +\infty[$ функція. Через φ позначимо функцію, обернену до Φ'. Скажемо далі, що $\Phi \in \Omega$, коли $\frac{t^2 \varphi'(t)}{\ln t} \uparrow +\infty$ $(t_0 \le t \to +\infty)$.

Через S_Φ позначимо клас функцій /1/ такий, що для будь-якої функції $F \in S_\Phi$ існує зростаюча до $+\infty$ послідовність (σ_k) додатних чисел, для якої $\ln M(\sigma_k, F) \le \Phi(\sigma_k)$. Приймемо $S(\sigma, F) = \sum_{\lambda_n > 2\lambda_{\nu(\sigma, F)}} |a_n| \exp\{\sigma \lambda_n\}$. Має місце наступне твердження.

Лема [1]. Нехай $F \in S_\Phi$, $\Phi \in \Omega$, $\ln n(t) = o(t^2 \varphi'(t))$ $(t \to \infty)$ і $\ln n(t) = O(t)$ $(t \to \infty)$. Тоді для всіх $\sigma \ge 0$ поза деякою множиною E з $dE \le \eta$, $0 < \eta < 1$ виконується нерівність

$$S(\sigma, F)/\mu(\sigma, F) \le \exp\left\{-\frac{\eta}{20} \lambda_\nu^2 \varphi'(\lambda_\nu)\right\}, \quad \nu = \nu(\sigma, F).$$

Використовуючи лему і метод доведення теореми 3 з праці [2], отримуємо результат, який відіграє основну роль при доведенні теореми 1.

Теорема 2. Нехай $\Phi \in \Omega$ і $F \in S_\Phi$. Якщо виконується умова $\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0$ $(\lambda_0 = 0)$ і

$$\lim_{t \to \infty} \frac{n(t)}{t^2 \varphi'(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{n(t)}{t^2 \varphi'(t)} \ln \frac{t}{n(t)} = 0,$$

то для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \ge 0$ поза множиною E_ε нульової нижньої щільності виконується нерівність

$$\ln M(b,F) \leq (1+\varepsilon) \ln \left(\int_{-\infty}^{b} |F(x) - a_0| dx \right).$$

Умова $\Delta = 0$ в теоремі 1 істотна в тому розумінні [2], що для будь-якої послідовності (λ_n), яка задовольняє $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$ $(\lambda_0 = 0)$ і $\Delta > 0$, існує ціла функція /1/, обмежена на дійсній осі, R -порядок якої дорівнює $1/2\Delta$. Зауважимо також, що для цілих функцій нульового нижнього R -порядку $(\lambda_R = 0)$ співвідношення /2/ справедливе і без виконання умови $\Delta = 0$. У цьому випадку на показники достатньо накладати лише умову $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$ $(\lambda_0 = 0)$.

1. Х о м я к М.М. Метод Вимана - Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле, с условием на рост на некоторой последовательности // Укр.мат.журн. 1983. Т. 35. № 4. С. 527-533.
2. Ш е р е м е т а М.Н. О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Мат.заметки. 1983. Т. 33. № 2. С. 235-245.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 517.948

Я.В.Микитюк

ПРО ДИСКРЕТНИЙ СПЕКТР СЛАБО ЗБУРЕНОГО ОПЕРАТОРА МНОЖЕННЯ

Нехай $H \overset{def}{=} L_2(\mathbb{R})$, $H^\nu \overset{def}{=} H_2^\nu(\mathbb{R})$ - простір Соболєва порядку $\nu \in \mathbb{R}$, S - оператор множення на незалежну змінну в H. Розглянемо самоспряжений оператор

$$T = S + V \quad (V \in \mathcal{B}(H) \text{ і } V = V^*). \tag{1}$$

Позначимо через $\mathcal{M}$ множину тих операторів T виду /1/, дискретний спектр яких складається зі скінченного числа власних значень скінченної кратності. Якщо $T \in \mathcal{M}$, то нехай $n(T)$ - число власних значень оператора T з врахуванням їх кратності.

У праці [2] вказані достатні умови на V, при яких $T \in \mathcal{M}$. Виявляється, їх можна дещо послабити і, що найбільш суттєво, отримати оцінку для числа $n(T)$.

Теорема. Нехай оператор V задовольняє умови

1/ $V \in \mathcal{B}_p(H),\ p \geq 2$; 2/ $V \in \mathcal{B}(H, H^{\nu}),\ \nu \in]1, 3/2[$.

Тоді $T \in \mathcal{M}$, має місце оцінка

$$n(T) \leq C_{\nu}^{p} \|V\|_{p}^{p} |V|_{\nu}^{\frac{p}{\nu-1}}, \qquad /2/$$

де $\|V\|_p \overset{def}{=} \|V\|_{\mathcal{B}_p}$; $|V|_{\nu} \overset{def}{=} \|V\|_{\mathcal{B}(H,H^{\nu})}$; C_{ν} – додатна константа, яка залежить тільки від ν.

Доведення. Зафіксуємо довільний власний вектор f оператора T. Нехай f відповідає власному числу $\xi \in \mathbb{R}$ і $\|f\| = 1$. З рівності $(T-\xi)f = 0$ випливає, що $Vf(\xi) = 0$ і

$$f(x) = -(x-\xi)^{-1} Vf(x). \qquad /3/$$

Відомо [1], що простір H^{ν}, $\nu \in]1, 3/2[$ вкладається в простір Гельдера $C^{\nu-1/2}(\mathbb{R})$. Тому

$$|(x-\xi)^{-1} Vf(x)| \leq z_{\nu} |x-\xi|^{\nu-3/2} |V|_{\nu}. \qquad /4/$$

Враховуючи /3/ і /4/, для довільного $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ отримуємо нерівність

$$\|Vf\|^2 \geq \varepsilon^2 \int_{|x-\xi| \geq \varepsilon} |(x-\xi)^{-1} Vf(x)|^2 dx \geq \varepsilon^2 - z_{\nu} |V|_{\nu} \varepsilon^{2\nu},$$

з якої випливає

$$\|Vf\| \geq \delta \overset{def}{=} d_{\nu} |V|_{\nu}^{-\frac{1}{\nu-1}}, \qquad /5/$$

де d_{ν} – додатна константа, яка залежить тільки від ν.

Нехай X – ортонормована система в H, складена з власних векторів оператора T. З компактності оператора V і нерівності /5/ випливає, що система X є скінченною. Очевидно, що її потужність дорівнює $n(T)$. Неважко переконатися, що для довільної ортонормованої системи $Y \subset H$ і довільного $A \in \mathcal{B}_p(H)$, $p \geq 2$, має місце нерівність $\sum_{e \in Y} \|Ae\|^p \leq \|A\|_p^p$. Враховуючи цю нерівність і нерівність /5/, отримуємо

$$n(T) \leq \delta^{-p} \sum_{e \in X} \|Ve\|^p \leq d_{\nu}^{-p} \|V\|_p^p |V|_{\nu}^{\frac{p}{\nu-1}}.$$

Теорема доведена.

1. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980. 2. Фа –

д е е в Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Тр. МИАН. 1964. Т. 73. С. 293-335.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.948

М.М.Федик

ОПЕРАТОР, СПРЯЖЕНИЙ ДО СПОРІДНЕНОГО ПІВТОРАЛІНІЙНІЙ ФОРМІ

Нехай τ - півторалінійна форма з щільною у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ областю визначення $\mathcal{D}(\tau)$, $(\mathcal{H}_+,\mathcal{H},\mathcal{H}_-)$ - оснащений гільбертів простір, причому $\mathcal{H}_+ \subseteq \mathcal{D}(\tau)$ і τ обмежена на $\mathcal{H}_+$. Спряженою до τ називається форма τ^*, коли $\forall u, v \in \mathcal{D}(\tau) = \mathcal{D}(\tau^*)$ $\tau^*[u,v]=\overline{\tau[v,u]}$. Форму τ називаємо симетричною, якщо $\forall u, v \in \mathcal{D}(\tau)$ $\tau[u,v] = \tau^*[u,v]$.

Оператор $\hat{T} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+,\mathcal{H}_-)$, такий що $\forall u, v \in \mathcal{H}_+$ $(\hat{T}u|v) = \tau[u,v]$, називаємо оператором, асоційованим з формою τ. Через $(\cdot|\cdot)$ позначаємо скалярний добуток в $\mathcal{H}$ і значення функціоналу з $\mathcal{H}_-$ на елементі з $\mathcal{H}_+$. Звуження оператора $\hat{T}$ на $\{u \in \mathcal{H}_+ / \hat{T}u \in \mathcal{H}\}$ позначаємо через T і називаємо оператором, індукованим формою τ. Докладніше такі оператори описані в працях [3, 4]. Відзначимо лише, що з існування такого $\zeta \in \mathbb{C}$, коли $\hat{T} - \zeta$ - біекція $\mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$, випливає $T \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$ [4].

Легко побачити, що оператор $\hat{T}$ є оператором, асоційованим з формою τ^*. Зокрема, коли форма τ симетрична, то $\hat{T} = \hat{T}^*$. Оператор, індукований формою τ^*, позначимо через $\tilde{T}^*$. Очевидно, що $\forall u \in \mathcal{D}(T)$ $\forall v \in \mathcal{D}(\tilde{T}^*)$ $(Tu|v) = (u|\tilde{T}^*v)$, тобто $\tilde{T}^* \subseteq T^*$. Крім того, у випадку симетричної форми $T = \tilde{T}^*$. Однак, взагалі кажучи, $\tilde{T}^* \neq T^*$, причому співвідношення $\tilde{T}^* \neq T^*$ може мати місце і тоді, коли форма τ симетрична. Приклад симетричної форми, для якої $\tilde{T}^* \neq T^*$, наведено у праці [4]. Там же показано, що $\tilde{T}^* = T^*$ тоді і лише тоді, коли $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{H}_+$. З цього випливає такий наслідок.

Наслідок. Якщо форма τ симетрична і $u \in \mathcal{D}(T^*) \cap \mathcal{H}_+$, то $u \in \mathcal{D}(T)$. Зокрема, оператор T самоспряжений тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{H}_+$.

Зауваження. Оператор T, взагалі кажучи, відрізняється від оператора з праці [1] і названий там оператором, асоційованим з формою τ. Однак, якщо $\mathcal{H}_+ = \mathcal{D}(\tau)$ як лінійні простори, то вказані оператори суміщаються. Якщо ж, крім того, форма τ симетрична і обмежена знизу, то $T = T^*$ [1].

Нехай $\mathcal{F}$ – замкнений підпростір в $\mathcal{H}_-$, причому

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{H} = \{0\}. \qquad /1/$$

Визначимо оператор $T_{\mathcal{F}}$ так, що $\mathcal{D}(T_{\mathcal{F}}) = \{u \in \mathcal{H}_+ | \exists f \in \mathcal{F}\ \hat{T}u + f \in \mathcal{H}\}$, $\forall u \in \mathcal{D}(T_{\mathcal{F}})\ T_{\mathcal{F}} u = \hat{T}u + f$. Легко побачити, що $T \subset T_{\mathcal{F}}$. Через $(T^*)_{\mathcal{F}}$ позначаємо аналогічний оператор для форми τ^*. Якщо форма τ симетрична, то з $\hat{T} = \hat{T}^*$ і /1/ отримуємо рівність $T_{\mathcal{F}} = (T^*)_{\mathcal{F}}$.

Нехай далі $(\Gamma,(G_+, G, G_-))$ – крайова пара для $(\mathcal{H}_+, \mathcal{H}, \mathcal{H}_-)$, тобто (G_+, G, G_-) – оснащений гільбертів простір, $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_+, G_+)$, причому $R(\Gamma) = G_+$, $\overline{Z(\Gamma)} = \mathcal{H}$. Відзначимо, що умова $\overline{Z(\Gamma)} = \mathcal{H}$ еквівалентна умові $R(\Gamma^*) \cap \mathcal{H} = \{0\}$ [4]. Приймемо $\mathcal{F} = R(\Gamma^*)$. Звуження оператора $T_{\mathcal{F}}$ на $Z(\Gamma)$ називаємо оператором, спорідненим формі τ, і позначаємо його через T_Γ. Оператор, спряжений в $\mathcal{H}$ до оператора T_Γ, позначаємо через T_Γ^*, а оператор, споріднений формі τ^* /тобто звуження на $Z(\Gamma)$ оператора $(T^*)_{\mathcal{F}}$ / – через $(T^*)_\Gamma$.

У праці [4] показано, що оператор T_Γ є оператором, індукованим формою τ в $(Z_+, \mathcal{H}, Z_-)$, де $Z_+ = Z(\Gamma)$ з нормою простору $\mathcal{H}_+$. Тому оператори T_Γ і $(T^*)_\Gamma$ мають ті ж властивості, що й оператори T і T^*. Зокрема, $(T^*)_\Gamma \subseteq T_\Gamma^*$.

Позначимо через T_0 спільне звуження операторів T і T_Γ на $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(T_\Gamma)$. Вважаємо $T, T_\Gamma \in \mathcal{G}(\mathcal{H})$.

Теорема 1.

$$\mathcal{D}(T_0) = \mathcal{D}[T] \ominus \hat{\Lambda}_T^{-1} R(\Gamma^*), \qquad /2/$$

де $\hat{\Lambda}_T^{-1}$ – оператор, асоційований зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)_T$ графіка оператора T; $\mathcal{D}[T]$ – гільбертів простір $\mathcal{D}(T)^T$ з $(\cdot|\cdot)_T$. При цьому $T_0 \in \mathcal{G}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow Cl_{(\mathcal{D}[T])'} R(\Gamma^*) \cap \mathcal{H} = \{0\}$.

Припустимо, що

$$T_0, T_{\mathcal{F}} \in \mathcal{G}(\mathcal{H}). \qquad /3/$$

Тоді $S_0 := T_F^*$ і $S := T_0^*$ також належать $\mathcal{G}(\mathcal{H})$. Використовуючи властивості пар замкнених операторів [2, 3], отримуємо таку теорему.

Теорема 2. Справедливі співвідношення

$$\mathcal{D}(T_F) = \mathcal{D}(T) \oplus T^*(1+\hat{T}T^*)^{-1} R(\Gamma^*), \tag{4}$$

$$\mathcal{D}(T_\Gamma) = \mathcal{D}(T_0) \oplus T^*(1+\hat{T}T^*)^{-1} R(\Gamma^*), \tag{5}$$

де ортогональність відносно скалярного добутку графіка оператора T_F. Крім того,

$$\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(S_0) \oplus (1+\hat{T}T^*)^{-1} R(\Gamma^*), \tag{6}$$

$$\mathcal{D}(T_\Gamma^*) = \mathcal{D}(S_0) \oplus T\hat{\Lambda}_T^{-1} R(\Gamma^*), \tag{7}$$

де ортогональність відносно скалярного добутку графіка оператора S. При цьому $\forall f \in R(\Gamma^*)$

$$T_\Gamma T^*(1+\hat{T}T^*)^{-1} f = -(1+\hat{T}T^*)^{-1} f, \quad T_\Gamma^* T\hat{\Lambda}_T^{-1} f = -\hat{\Lambda}_T^{-1} f. \tag{8}$$

Зауваження. Вираз $(1+\hat{T}T^*)^{-1} R(\Gamma^*)$ має смисл для будь-якої крайової пари, оскільки оператор $(1+\hat{T}T^*)^{-1}$ визначений на всьому просторі $\mathcal{H}_-$ [4].

Теорема 3. Нехай форма τ симетрична. Якщо оператор T самоспряжений, то для будь-якої крайової пари, для якої виконується /3/, оператор T_Γ самоспряжений.

Навпаки, коли існує така крайова пара, що виконується /3/ і оператор T_Γ самоспряжений, то оператор T також самоспряжений.

Доведення. Зауважимо спочатку, що $\forall u \in \mathcal{D}(\hat{T}^*T)$ $\forall v \in \mathcal{D}(T)$ $(\hat{\Lambda}_T u|v) = (u|v)_T = (u|v) + (Tu|Tv) = ((1+\hat{T}^*T)u|v)$, тобто на $\mathcal{D}(\hat{T}^*T)$ оператор $\hat{\Lambda}_T$ дорівнює $1+\hat{T}^*T$. Крім того, оскільки τ симетрична, то $\hat{T} = \hat{T}^*$.

Нехай оператор T самоспряжений. Тоді $(1+\hat{T}T^*)^{-1} = (1+\hat{T}^*T)^{-1} = (1+\hat{T}T)^{-1}$. Таким чином, звуження оператора $\hat{\Lambda}_T^{-1}$ на $\mathcal{H}_-$ дорівнює оператору $(1+\hat{T}T^*)^{-1}$ і $\hat{\Lambda}_T^{-1} R(\Gamma^*) = (1+\hat{T}T^*)^{-1} R(\Gamma^*)$. З /6/, /7/, враховуючи /2/ і /5/, отримуємо $\mathcal{D}(T_\Gamma) = \mathcal{D}(T_\Gamma^*)$ і, оскільки $T_\Gamma = (T^*)_\Gamma \subset T_\Gamma^*$, то $T_\Gamma = T_\Gamma^*$. Вказана рівність виконується при будь-якій крайовій парі, для якої справедливо /3/.

Навпаки, нехай для $(\Gamma, (G_+, G, G_-))$ виконується /3/ і $T_r = T_r^*$. Оскільки оператор T_r індукований в $(\mathcal{Z}_+, \mathcal{H}, \mathcal{Z}_-)$ звуженням форми τ і $\mathcal{D}(T_r^*) = \mathcal{D}(T_r) \subset \mathcal{Z}_+ \subset \mathcal{H}_+$, то з наведеного вище наслідку випливає, що $\mathcal{D}(S_0) = \mathcal{D}(T_r^*) \cap \mathcal{D}(T^*) \subset \subset \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(T_r) = \mathcal{D}(T_0)$. Разом з цим, оскільки $T \subset T^*$, то $\mathcal{D}(T_0) \subset \mathcal{D}(S_0)$. Таким чином, $\mathcal{D}(T_0) = \mathcal{D}(S_0)$. З /5/ і /7/ записуємо $T^*(1+\hat{T}T^*)^{-1} R(\Gamma^*) = T\hat{\Lambda}_T^{-1} R(\Gamma^*)$. Враховуючи /8/, отримуємо $\hat{\Lambda}_T^{-1} R(\Gamma^*) = (1+\hat{T}T^*)^{-1} R(\Gamma^*)$. Тоді з /2/ і /6/ маємо $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$, тобто оператор T самоспряжений.

І. К а т о Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972. 2. Л я н ц е В.Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. // Теория функций, функциональный анализ и их приложение. 1972. Вып. 16. С. 165-186. 3. Л я н ц е В.Э., С т о р о ж О.Г. Методы теории неограниченных операторов. К., 1983. 4. Л я н ц е В.Э., Ф е д и к М.Н. Операторы, связанные с полуторалинейными формами. Львов, 1985. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 2590 - Ук85.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.958 : 532.529

І.М.Дронюк

РІВНЯННЯ ДИФУЗІЙНОЇ МОДЕЛІ РУХУ ДВОКОМПОНЕНТНОЇ СУМІШІ

Система рівнянь, що описує рух двокомпонентної суміші, містить рівняння балансу маси, імпульсу, моменту інерції і моменту кількості руху. Ці рівняння, записані на основі багатоконтинуумного підходу, мають такий вигляд:

$$\frac{d_i \rho_i}{d\tau} + \rho_i \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = Q_i ; \qquad /1/$$

$$\rho_i \frac{d_i \vec{v}_i}{d\tau} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}_i + \vec{F}_i + \vec{P}_i - Q_i \vec{v}_i ; \qquad /2/$$

$$\frac{d_i k_i}{d\tau} + k_i \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = K_i ; \qquad /3/$$

$$k_i \frac{d_i \vec{w}_i}{d\tau} = \vec{\sigma}_i^{\,k} \times \nabla^k \vec{r}_i + \vec{\nabla} \cdot \hat{\mu}_i + \vec{M}_i + \vec{m}_i - K_i \vec{w}_i, \; i = 1,2, \qquad /4/$$

де $\frac{d_i}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}$ – субстанціональна похідна; $\vec{v}_i$, $\vec{w}_i$ – швидкість і кутова швидкість компонент; ρ_i, k_i – питома густина і питомий момент інерції компонент; Q_i, K_{i} – густини потужності джерел маси і момента інерції компоненти i за рахунок компоненти j / $i \neq j$ /; $\hat{\sigma}_i$, $\hat{\mu}_i$ – тензор напружень і тензор моментних напружень; $\vec{F}_i$, $\vec{M}_i$ – вектори масових і масових моментних сил; $\vec{P}_i$, $\vec{m}_i$ – вектори сил і моментів сил міжконтинуумної взаємодії; $\vec{r}_i$ – радіус-вектор центра мас виділеного малого об"єму компоненти i.

Вектор сил міжконтинуумної взаємодії $\vec{P}_i$ зобразимо як суму складових $\vec{P}_i = \vec{P}_i^A + \vec{P}_i^c + \vec{P}_i^n + \vec{P}_i^M$, де $\vec{P}_i^A$ – архімедова сила; $\vec{P}_i^c$ – стоксова сила; $\vec{P}_i^n$ – сила, зумовлена ефектом приєднаних мас; $\vec{P}_i^M$ – сила Магнуса. Вирази для цих сил наявні у праці [3]. Надалі приймемо, що частинки компоненти i мають сферичну форму радіуса R_i. Тоді

$$\vec{P}_i^A = -\gamma_i \vec{\nabla} p_i, \quad \gamma_i = \frac{4}{3}\pi R_i^3 N_i; \qquad /5/$$

$$\vec{P}_i^c = 6\pi N_i \eta_i (\vec{v}_j - \vec{v}_i) R_i; \qquad /6/$$

$$\vec{P}_i^n = \chi_i \rho_i \gamma_i \gamma_j \left(\frac{d_j \vec{v}_j}{d\tau} - \frac{d_i \vec{v}_i}{d\tau} \right); \qquad /7/$$

$$\vec{P}_i^M = c_i^M \gamma_i \rho_i (\vec{v}_i \times \vec{w}_j), \qquad /8/$$

де p_i – тиск; η_i – коефіцієнт в"язкості компоненти i; c_i^M – коефіцієнт сили Магнуса; N_i – кількість частинок компоненти i з розрахунку на одиницю об"єму; χ_i – коефіцієнт форми частинки, для сфери $\chi_i = \frac{1}{2}$.

Запишемо вектор сил тертя при обертанні [1]:

$$\vec{m}_i = \eta_i^k \vec{\nabla} \times (2\vec{w}_i - \vec{\nabla} \times \vec{v}_i), \qquad /9/$$

де η_i^k – коефіцієнт в"язкості компоненти i при обертанні.

Запишемо систему рівнянь /1/-/4/, що описує рух реагуючої двокомпонентної суміші, стосовно процесу грануляції. Нехай суміш складається з частинок компоненти 1 - гранул, до яких в процесі руху суміші в грануляторі налипають частинки компоненти 2. Обмежимося розглядом стаціонарного режиму роботи гранулятора. Приймаємо, що гранулятор тарільчатого типу обертається зі сталою швидкістю W навколо вертикальної осі [2].

Введемо в розгляд нерухому декартову систему координат $OX_1Y_1Z_1$ таким чином, що площина OX_1Y_1 суміщається з площиною дна гранулятора, а точка O знаходиться в центрі, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - базисні орти цієї системи. Поряд з декартовими координатами в площині OX_1Y_1 введемо полярну систему координат / r, φ /. Вважаємо, що система рівнянь /1/-/4/ записана в координатах / r, φ, z_1 /. У цій системі координат оператор $\vec{\nabla}$ має вигляд $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{i} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z_1}\vec{k}$. Введемо систему координат / ξ, θ, z /, яка рухається разом з гранулятором, такою заміною змінних:

$$\xi = r, \quad \theta = \varphi - W\tau, \quad z = z_1. \qquad /11/$$

Тоді у рухомій системі координат рівняння /1/-/4/ набувають вигляду

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} + W\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho_i \vec{v}_i)\vec{j}^W + \vec{\nabla}^W(\rho_i \vec{v}_i) = Q_i; \qquad /12/$$

$$\rho_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \tau} + \rho_i W \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \tau}\cdot\vec{j}^W + \rho_i \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}^W \vec{v}_i = \vec{\nabla}^W \cdot \hat{\sigma}_i + \vec{F}_i + \vec{R}_i - Q_i \vec{v}_i; \qquad /13/$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial \tau} + W\frac{\partial}{\partial \tau}(k_i \vec{v}_i)\cdot\vec{j}^W + \vec{\nabla}^W(k_i \vec{v}_i) = K_i; \qquad /14/$$

$$k_i \frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \tau} + k_i W \vec{v}_i \frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \tau}\cdot\vec{j}^W + k_i \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}^W \vec{\omega}_i =$$

$$= \sum_{k=1,3} \hat{\sigma}_i^k \times \nabla^k \vec{r}_i^W + \vec{\nabla}^W \cdot \hat{\mu}_i + \vec{m}_i + \vec{M}_i - K_i \vec{\omega}_i, \qquad /15/$$

де $\vec{\nabla}^W$ - оператор вигляду $\vec{\nabla}^W = \frac{\partial}{\partial \xi}\vec{i}^W + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{j}^W + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, а вектори $\vec{i}^W$, $\vec{j}^W$, $\vec{r}_i^W$ в системі координат /11/ мають координати відповідно / 1 ; $-W\tau$; 0 /, / 1 ; $\pi/2 - W\tau$; 0 /, / r_i^0 ; $\varphi_i^0 - W\tau$; z /, в момент часу τ. Тут

/ r_1^0 ; φ_i^0 ; z_1 / – координати вектора $\vec{r}_i$ в системі координат / r ; φ ; z_1 /.

У процесі грануляції сили інерції частинок компоненти 2 набагато менші від сил інерції гранул компоненти I. Тому в системі рівнянь /I2/–/I5/ знехтуємо інерційними членами компоненти 2. Крім того, запишемо вектор швидкості кожної компоненти i $(i=1,2)$ як $\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,n} + \vec{v}_i^{\,\delta}$, де $\vec{v}_i^{\,\delta}$ – швидкість руху частинок відносно системи координат / ξ ; θ ; z /, $\vec{v}_i^{\,n}$ – швидкість руху рухомої системи координат. Надалі вважатимемо, що в рухомій системі координат процес квазіусталений і частинки можуть рухатися лише в радіальному напрямку. З огляду на це перетворимо систему рівнянь /I2/–/I5/:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + w\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho_1 \vec{v}_1)\cdot \vec{j}^{\,w} + \vec{\nabla}^{\varphi}(\rho_1 \vec{v}_1) = Q_1; \qquad /I6/$$

$$\rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial \tau} + \rho_1 w \vec{v}_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial \tau}\cdot \vec{j}^{\,w} + \rho_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}^{\varphi} \vec{v}_1 = \vec{\nabla}^{w} \colon \hat{\sigma}_1 + \vec{F}_1 + \vec{P}_1 - Q_1 \vec{v}_1; \qquad /I7/$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial \tau} + w\frac{\partial}{\partial \tau}(k_1 \vec{v}_1)\vec{j}^{\,w} + \vec{\nabla}^{\varphi}(k_1 \vec{v}_1) = K_1; \qquad /I8/$$

$$k_1 \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial \tau} + k_1 w v_1 \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial \tau}\cdot \vec{j}^{\,w} + k_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla}^{\varphi} \vec{\omega}_1 =$$

$$= \sum_{k=1,3} \vec{\sigma}_1^{\,k} \times \nabla^{k} \vec{r}_1^{\,w} + \vec{\nabla}^{w} \colon \hat{\mu}_1 + \vec{m}_1 + \vec{M}_1 - K_1 \vec{\omega}_1; \qquad /I9/$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \tau} + \vec{\nabla}^{\varphi}(\rho_2 \vec{v}_2) = Q_2; \qquad /20/$$

$$\rho_2 \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial \tau} + \rho_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{\nabla}^{\varphi} \vec{v}_2 = \vec{\nabla}^{w} \colon \hat{\sigma}_2 + \vec{F}_2 + \vec{P}_2 - Q_2 \vec{v}_2; \qquad /2I/$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial \tau} + \vec{\nabla}^{\varphi}(k_2 \vec{v}_2) = K_2; \qquad /22/$$

$$k_2 \frac{\partial \vec{\omega}_2}{\partial \tau} + k_2 \vec{v}_2 \cdot \vec{\nabla}^{\varphi} \vec{\omega}_2 = \vec{\nabla}^{w} \cdot \hat{\mu}_2 + \vec{m}_2 + \vec{M}_2 - K_2 \vec{\omega}_2, \qquad /23/$$

де $\vec{\nabla}\varphi=\frac{\partial}{\partial\xi}\vec{i}^{\,w}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, а під $\vec{v}_i$ слід розуміти радіальний вектор $\vec{v}_i^{\,\theta}$.

Система рівнянь /16/-/23/ є дифузійним наближенням для опису руху двокомпонентної суміші стосовно процесу грануляції.

1. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М., 1974. 2. Классен П.В., Гришаев И.Г. Основы техники гранулирования. М., 1982. 3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М., 1978.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 517.968

О.М.Гісь

ГАЛУЖЕННЯ РОЗВ"ЯЗКІВ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ СИНТЕЗУ АНТЕН

Розглянемо інтегральне рівняння, яке виникає в задачі синтезу лінійних антен [3]

$$f(s,c)=\int_{-1}^{1}F(t)K(s,t,c)e^{i\arg f(t,c)}dt, \qquad /1/$$

де $f(s,c)$ - шукана комплексна функція, так звана діаграма направленості; $F(t)$ - задана дійсна функція; $K(s,t,c)= \sin c(s-t)/(\pi\cdot(s-t))$; c - числовий параметр.

У рівнянні /1/ нелінійно входить параметр c, при певних значеннях якого відбуваються галуження відомих розв"язків даного рівняння. У праці [3] з допомогою відомої методики [1] досліджується галуження первісного розв"язку

$$f_0(s,c)=\int_{-1}^{1}F(t)K(s,t,c)dt. \qquad /2/$$

Ми аналізуємо ще один первісний розв"язок рівняння /1/

$$f_1(s,c)=\int_{-1}^{1}F(t)K(s,t,c)\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)dt, \qquad /3/$$

де $\rho_0=\rho_0(c)$ визначається з

$$f_1(\rho_0,c)=0. \qquad /4/$$

Ставимо задачу визначення точок галуження розв"язку $f_1(S,C)$, а також отримання в явному вигляді головних членів відгалужених розв"язків.

Методика [1] передбачає аналітичну нелінійність підінтегрального виразу рівняння /1/ при $f(t,c) = f_1(t,c)$. У розглянутому випадку існує особливість, зв"язана з проходженням функції $f_1(S,C)$ через нуль при $S = \rho_0$. Для цього випадку пропонується інший підхід, що грунтується на використанні дробово-степеневих рядів.

Зобразимо функцію $f(S,C)$ у вигляді $f(S,C) = x(S,C) + iy(S,C)$ і надалі замість рівняння /1/ розглядатимемо відповідну систему дійсних рівнянь відносно $x(S,C)$ та $y(S,C)$. Збурюючи параметр C, запишемо розв"язок у вигляді, зручному для врахування неаналітичного характеру підінтегральних виразів

$$\begin{cases} x(S,C) = f_1(S,\bar{C}) + u(S,\bar{C},\varepsilon), \\ y(S,C) = f_1(S,\bar{C}) \cdot v(S,\bar{C},\varepsilon), \\ c = \bar{c} + \varepsilon. \end{cases} \qquad /5/$$

Для достатньо малих $|u(S,\bar{C},\varepsilon)|$, $|v(S,\bar{C},\varepsilon)|$, ε отримуємо

$$\begin{cases} u(S,\bar{C},\varepsilon) = \varepsilon \int\limits_{-1}^{1} A_{001}(s,t,\bar{c})\,dt + \sum\limits_{m+n+p=2}^{3} \varepsilon^p \int\limits_{-1}^{1} A_{mnp}(s,t,\bar{c}) \times \\ \times\, u^m(t,\bar{c},\varepsilon)\, v^n(t,\bar{c},\varepsilon)\,dt + \ldots, \\ \\ f_1(s,\bar{c})\, v(s,\bar{c},\varepsilon) - \int\limits_{-1}^{1} F(t) K(s,t,\bar{c})\, \mathrm{sign}(t-\rho_0)\, v(t,\bar{c},\varepsilon)\,dt = \\ = \sum\limits_{m+n+p=2}^{3} \varepsilon^p \int\limits_{-1}^{1} B_{mnp}(s,t,\bar{c})\, u^m(t,\bar{c},\varepsilon)\, v^n(t,\bar{c},\varepsilon)\,dt + \ldots, \end{cases} \qquad /6/$$

/7/

де $A_{mnp}(s,t,\bar{c})$, $B_{mnp}(s,t,\bar{c})$ – коефіцієнти розкладів підінтегральних виразів по U^m, V^n, ε^p у точці $x=f_1$, $y=0$, $c=\bar{c}$. Крапками замінено доданки, в яких сумарний показник степеня перевищує відповідно два і три. Відмінні від нуля тільки коефіцієнти

$A_{001}, A_{002}, A_{020}, B_{010}, B_{011}, B_{110}, B_{111}, B_{012}, B_{210}, B_{030}$.

Точками галуження можуть бути [1] тільки такі $C=C_i$, для яких одиниця є власним значенням ϑ лінійного однорідного рівняння третього роду,

$$\vartheta \cdot f_1(s,\bar{c})\varphi(s,\bar{c})=\int_{-1}^{1} F(t)K(s,t,\bar{c})\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)\varphi(t,\bar{c})\,dt. \qquad /8/$$

Залежно від кратності цього власного значення розрізняють точки галуження першого і другого типу.

<u>Точки галуження першого типу</u>. Власні функції рівняння /8/ можна виписати у явному вигляді [4]

$$\varphi_1(s,C_1)=1,\ \varphi_2(s,C_1)=\frac{s-\rho_0(C_1)}{1+\eta_1 s}, \qquad /9/$$

де значення параметрів η_1, C_1, $\rho_0(C_1)$ визначаються з системи

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} F(t)\sin C_1 t\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)\,dt/(1+\eta_1 t)=0, \\ \int_{-1}^{1} F(t)\cos C_1 t\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)\,dt/(1+\eta_1 t)=0 \end{cases} \qquad /10/$$

разом з рівнянням /4/.

Рівняння /7/ можна розглядати як неоднорідне лінійне рівняння третього роду. Необхідною умовою існування його розв"язку є ортогональність правої частини до власних функцій $\psi_\ell(s,c)$ $(\ell=1,2)$ спряженого однорідного рівняння, які також вдається виписати в явному вигляді

$$\begin{cases} \psi_1(s,C_1)=F(s)\,\mathrm{sign}(s-\rho_0)\,\varphi_1(s,C_1), \\ \psi_2(s,C_1)=F(s)\,\mathrm{sign}(s-\rho_0)\,\varphi_2(s,C_1), \end{cases} \qquad /11/$$

У старшому порядку умови ортогональності мають вигляд

$$\int_{-1}^{1}\psi_\ell(s,c_1)\sum_{m+n+p=2}^{3}\varepsilon^{p}\int_{-1}^{1}B_{mnp}(s,t,c_1)U^{m}(t,c_1,\varepsilon)\times$$

$$\times\, V^{n}(t,c_1,\varepsilon)\,dt\,ds=0. \qquad /12/$$

Рівняння /6/, /7/, /12/ є вихідною системою для визначення $U(s,c_1,\varepsilon)$, $V(s,c_1,\varepsilon)$. Запишемо ці функції у вигляді рядів по дробових степенях приросту ε

$$U(s,c_1,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}U_i(s,c_1)+O(\varepsilon),$$

$$V(s,c_1,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}V_i(s,c_1)+O(\varepsilon), \qquad /13/$$

де $\beta=\varepsilon^{1/K}$. Для знаходження числа K введемо формальне представлення $\varepsilon=\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\mu_i$ / $\mu_i=0$ при $i<K$, $\mu_K=1$ / і вважатимемо надалі μ_i невідомими. Підставимо співвідношення /13/ у систему рівнянь /6/, /7/, /12/. Отримаємо нову систему відносно невідомих U_i, V_i, μ_i:

$$\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}U_i(s,c_1)+O(\beta^{K})=\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\mu_i\int_{-1}^{1}A_{001}(s,t,c_1)\,dt+$$

$$+\sum_{m+n+p=2}^{3}\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\int_{-1}^{1}A_{mnp}(s,t,c_1)R_i(t,c_1)\,dt,$$

$$f_1(s,c_1)\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}V_i(s,c_1)-\int_{-1}^{1}F(t)K(s,t,c_1)\,\mathrm{sign}(t-\rho_0)\times \qquad /14/$$

$$\times\, V_i(t,c_1)\,dt=\sum_{m+n+p=2}^{3}\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\int_{-1}^{1}B_{mnp}(s,t,c_1)R_i(t,c_1)\,dt,$$

$$\int_{-1}^{1}\psi_\ell(s,c_1)\sum_{m+n+p=2}^{3}\sum_{i=1}^{K}\beta^{i}\int_{-1}^{1}B_{mnp}(s,t,c_1)R_i(t,c_1)\,dt\,ds=0.$$

де коефіцієнти $R_i(t,c_1)$ мають вигляд

$$R_i = T_i(w_1) + w_2 \cdot DT_{i-1}(w_1 + \frac{1}{2}[D^2 T_{i-1}(w_1) \times$$
$$\times w_2^2 + DT_{i-2}(w_1) \times w_3] + \dots \qquad /15/$$

при позначеннях

$$w = (u, v, \varepsilon),\ w_i = (u_i, v_i, \mu_i),\ T_j(w) = \sum_{m+n+p=j} u^m v^n \varepsilon^p. \qquad /16/$$

У формулі /15/ $m = m_1 + m_2 + m_3$ – індекс диференціювання $D^m = D_1^{m_1} \cdot D_2^{m_2} \cdot D_3^{m_3}$, а $w_i^m = u_i^{m_1} v_i^{m_2} \mu_i^{m_3}$. Співвідношення /15/ можна отримати з [5] шляхом підстановки виразів /13/ у рівність /16/, впорядковуючи останню по степенях β.

Прирівнюючи у виразах /14/ коефіцієнти при однакових степенях β до нуля, одержуємо систему рівнянь для нижчих порядків, розв"язок якої існує лише при $\mu_1 = 0$. Він має вигляд $w_1 = (0, \sum_{i=1} a_i \varphi_i(s,c_1), 0)$. Таким чином, K не може дорівнювати одиниці.

Для визначення $w_2 = (u_2, v_2, \mu_2)$ прирівнюємо в /14/ коефіцієнти при наступних степенях β. Враховуючи уже відоме w_1, дістаємо, що одержана при цьому система має розв"язок при $\mu_2 = 1$. Тому $K = 2$, а $\beta = \varepsilon^{1/2}$. Із умов ортогональності знаходимо $a_1 = 0$,

$$a_2 = \pm \sqrt{\frac{2\int_{-1}^{1} \psi_2(s,c_1) \int_{-1}^{1} A_{001}(s,t,c_1)[\varphi_2(t,c_1) - \varphi_2(s,c_1)]\,dt\,ds}{\int_{-1}^{1} \psi_2(s,c_1)\varphi_2(s,c_1)[f_1(s,c_1)\varphi_2^2(s,c_1) - \int_{-1}^{1} B_{010}(s,t,c_1)\varphi_2^2(t,c_1)\,dt]\,ds}}$$

Значення коефіцієнтів a_1, a_2 дають змогу виписати в явному вигляді головні члени розв"язків $x(s,c_1)$, $y(s,c_1)$ при збуренні $c = c_1 + \varepsilon$:

$$\begin{cases} x(s,c) = f_1(s,c_1) + \varepsilon\Big[\int_{-1}^{1} A_{001}(s,t,c_1)\,dt + \\ + a_2 \int_{-1}^{1} A_{020}(s,t,c_1)\,\varphi_2^2(t,c_1)\,dt\Big] + O(\varepsilon), \\ y(s,c) = a_2 \sqrt{\varepsilon}\, f_1(s,c_1)\,\varphi_2(s,c_1) + O(\varepsilon). \end{cases} \qquad /17/$$

Співвідношення /I7/ є новим комплексним розв"язком, який відгалужується від відомого розв"язку $f_1(S, C_1)$ у точці $C=C_1$ значення якої визначається із системи /4/-/I0/.

Точки галуження другого типу. Для заданої парної функції $F(S)$ існує ще один тип точок галуження $C=C_2$ і три власні функції рівняння /8/

$$\varphi_1(S,C_2)=1, \quad \varphi_2(S,C_2)=\frac{1}{1+\eta_2 S^2}, \quad \varphi_3(S,C_2)=\frac{S}{1+\eta_2 S^2}, \qquad /I8/$$

де точки C_2 і параметр η_2 визначаються із системи

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} F(t)\,\mathrm{sign}\,t \, \sin C_2 t \, dt/(1+\eta_2 t^2)=0, \\ \int_{-1}^{1} F(t)\,\mathrm{sign}\,t \cdot t \cos C_2 t \, dt/(1+\eta_2 t^2)=0. \end{cases} \qquad /I9/$$

Міркуючи аналогічно до попередніх викладок, одержуємо розв"язок у точці галуження $C=C_2+\varepsilon_1$ у вигляді

$$\begin{cases} x(S,C)=f_1(S,C_2)+\varepsilon\Big[\int_{-1}^{1} A_{001}(S,t,C_2)\,dt+ \\ +\int_{-1}^{1} A_{020}(S,t,C_2)\big(b_2\varphi_2(t,C_2)+b_3\varphi_3(t,C_2)\big)^2 dt\Big]+O(\varepsilon), \\ y(S,C)=\sqrt{\varepsilon}\, f_1(S,C_2)\big(b_2\varphi_2(t,C_2)+b_3\varphi_3(t,C_2)\big)^2+O(\varepsilon). \end{cases} \qquad /20/$$

Отже, для первісного розв"язку /3/ рівняння /I/ існують точки галуження двох типів, значення яких визначаються відповідно з систем рівнянь /4/-/I0/ і /I9/. Головні члени відгалужених розв"язків записані в явному вигляді /формули /I7/-/20//. Описаним способом можна досліджувати галуження розв"язків нелінійних інтегральних рівнянь з особливостями, зв"язаними з певного типу неаналітичністю їх підінтегральних виразів.

I. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969. 2. Войтович Н.Н. О синтезе антенны по заданной амплитудной диаграмме излучения // Радиотехника и электроника. 1972. Т. I7 № 12. С. 2491-2497. 3. Войтович Н.Н., Савенко П.А. Ветвление решений задачи синтеза антенн по заданной амплитудной диаграмме направленности // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 4.

С. 723-729. 4. В о й т о в и ч Н.Н., С а в е н к о П.А. Об одном интегральном уравнении теории синтеза антенн // Мат.методы и физ.-мех. поля. 1975. Вып. 2. С. 161-163. 5. Н а с ы р о в Н.С. Построение малых решений нелинейного интегрального уравнения методом разветвляющихся итераций // Нелинейные колебания и теория упругости. 1981. Т. 8. С. 89-97.

Стаття надійшла до редколегії 21.01.86

УДК 539.014

О.І.Васюник

ПОБУДОВА РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЗВАРЮВАНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК

Розглянемо дві вільні на краях, тонкі, постійної товщини $2h$ однорідні, ізотропні, пружні конічні оболонки, віднесені до однієї і тієї ж канонічної ортогональної системи координат S, β, γ /($S_1 \leq S \leq S_0$) - оболонка 1, $S_0 < S \leq S_2$ - оболонка 2, які зварені стиковим кільцевим швом вздовж поверхні $S = S_0$ контактною зваркою/. Тут S - координата, що змінюється вздовж твірної; β - кут, утворений довільною і початковою меридіональними площинами $(0 \leq \beta \leq \beta_2)$; γ - координата, яка визначає положення точки вздовж нормалі до серединної поверхні оболонок $/-h \leq \gamma \leq h)$.

У процесі зварювання додатково підігріваються області оболонок $S_0 \leq S_2 \leq S \leq S_{22} < S_2$, $S_1 \leq S_{11} \leq S \leq S_{12} \leq S_0$. Позначимо температурне поле зварювання $t_0(S, \gamma, \tau)$, а додаткового підігріву - $t_1(S, \gamma, \tau)$. Тоді

$$t = t_0 + t_1. \qquad /1/$$

Обмежимось розглядом задачі для моментів часу, коли зварювані оболонки не взаємодіють між собою вздовж перерізу $S = S_0$, а на краях виконуються умови вільних країв. У зв"язку з цим розглянемо побудову розв"язку задачі лише для області $S_1 < S \leq S_0$.

При заданому осесиметричному температурному полі задача про визначення напружень і деформацій у конічній оболонці зводиться до розв"язання двох ключових рівнянь [1, 3]

$$\ddot{V} + \frac{1}{S}\dot{V} - \frac{1}{S^2}V - \frac{m\,ctg\,\mu}{S}\theta = \alpha_t m \dot{T}_1,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{S}\dot{\theta} - \frac{1}{S^2}\theta + \frac{ctg\,\mu}{S}V = -\alpha_t\frac{1+\nu}{h}\dot{T}_2, \qquad /2/$$

де θ - кут повороту елемента серединної поверхні; V - функція напружень; $m=\frac{D_0}{D_1}$; $D_0=2Eh$; $D_1=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, T_1, T_2 - усереднені по товщині характеристики температурного поля $t(S,\tau)$, 2μ - кут при вершині конуса.

Функції $\theta(S)$ і $V(S)$ задовольняють умови вільних країв;

$$V(S_1)=0, \quad V(S_{01})=0,$$

$$\dot{\theta} + \nu\frac{1}{S}\theta + \frac{\alpha_t}{h}(1+\nu)T_2 = 0\Big|_{S=S_1,\,S_{01}}. \qquad /3/$$

Припустимо, що зміну температури по товщині оболонки можна апроксимувати лінійним законом

$$t = T_1 + \frac{\gamma}{h}T_2. \qquad /4/$$

Розглянемо задачу про визначення додаткового до t_0 температурного поля t_1, локального підігріву області $S_{11} \leq S \leq S_{12}$ зварюваної оболонки, при якому для заданих умов підігріву та обмежень на напруження забезпечувались би умови утворення низького рівня залишкових напружень і деформацій. Тому за функціональний критерій оптимальності напружено-деформованого стану приймаємо енергію формозміни оболонки [1, 4], яку запишемо

$$U[\theta,V,T_1,T_2] = \frac{2\pi D_1 \sin\mu}{3(1-\nu)}\int_{S_{11}}^{S_{01}} F(S,\theta,\dot{\theta},V,\dot{V},T_1,T_2)\,dS, \qquad /5/$$

де

$$F = S\Big\{(1+\nu+\nu^2)\Big(\frac{1}{S}V-\dot{V}\Big)^2 + (1-\nu)^2\frac{1}{S}V\dot{V} + \frac{h^2m^2}{3}\Big[\Big(\frac{1}{S}\theta\Big)^2 - \frac{1}{S}\theta\dot{\theta} +$$

$$+\dot{\theta}^2 + 2\frac{\alpha_t}{h}T_2\Big(\frac{1}{S}\theta + \dot{\theta} + \frac{\alpha_t}{h}T_2\Big)\Big]\Big\}. \qquad /6/$$

Сформульовану задачу розв"язуємо на множині допустимих функцій θ, V, T_1, T_2, які задовольняють ключові рівняння /2/ і додаткові обмеження

$$\Phi(S, T_1, T_2) \equiv T_2 = 0. \qquad /7/$$

Вважаємо, що в крайових перерізах області нагріву $S_{11} \leq S \leq S_{12}$ варіації допустимих функцій та їх похідні задані. За таких умов, використовуючи метод множників Лагранжа, розглядувана варіаційна задача зводиться до мінімізації функціоналу

$$U^{*}=\frac{2\pi D_1\sin\mu}{3(1+\nu)m}\int_{S_{11}}^{S_{01}} S\Big\{\Big[(1+\nu+\nu^2)\Big(\frac{1}{S}V-\dot V\Big)^2+(1-\nu)^2\frac{1}{S}V\dot V+\frac{h^2m^2}{3}\Big[\Big(\frac{1}{S}\theta\Big)^2-\frac{1}{S}\theta\dot\theta+$$

$$+\dot\theta^2+2\frac{\alpha_t}{h}T_2\Big(\frac{1}{S}\theta+\dot\theta+\frac{\alpha_t}{h}T_2\Big)\Big]\Big]\Big\}+\xi_1 S\Big\{\ddot V+\frac{1}{S}\dot V-\frac{1}{S^2}V-\frac{ctg\mu}{S}m\theta-$$

$$-\alpha_t m\dot T_1\Big\}+\xi_2 S\Big\{\ddot\theta+\frac{1}{S}\dot\theta-\frac{1}{S}\theta+\frac{ctg\mu}{S}V+\alpha_t\frac{(1+\nu)}{h}\dot T_2\Big\}+\xi\Phi(S,T_1,T_2). \qquad /8/$$

Із необхідної умови його екстремуму при вказаних обмеженнях /7/ знаходимо рівняння Ейлера-Пуассона

$$L[V]-\frac{1}{2(1+\nu+\nu^2)}\Big[\xi_2\,ctg\mu+L[\xi_1]\Big]=0,$$

$$L[\theta]+\frac{3}{2h^2m^2}\Big[\xi_1\,m\,ctg\mu-L[\xi_2]\Big]=0,$$

$$\xi_1+S\dot\xi_1=0,$$

$$\theta+S\theta+\frac{3}{2hm^2\alpha_t}\Big[\xi-\frac{\alpha_t(1+\nu)}{h}(\xi_2+S\dot\xi_2)\Big]=0, \qquad /9/$$

де

$$L=S\frac{d^2}{dS^2}+\frac{d}{dS}-\frac{1}{S}. \qquad /10/$$

Ці рівняння разом із додатковими обмеженнями /7/, а також ключовими рівняннями /2/ утворюють повну систему рівнянь для визначення сімейства екстремальних температурних полів, відповідного їм пружнодеформованого стану оболонки і множників Лагранжа.

Виключаючи з одержаної системи рівнянь /9/ функцію V і множники Лагранжа, приходимо до одного ключового рівняння відносно функції кутів повороту θ :

$$L\big[L\big[L[\theta]\big]\big]+\frac{h^2m^2ctg^2\mu}{3(1+\nu+\nu^2)}L[\theta]=-\frac{c\,m\,ctg^3\mu}{2S(1+\nu+\nu^2)}. \qquad /11/$$

Загальний розв"язок рівняння /11/ має вигляд

$$\theta=c_1\,ber_2\,u_0+c_2\,bei_2\,u_0+c_3\,ker_2\,u_0+c_4\,kei_2\,u_0+c_5S+c_6\frac{1}{S}-$$

$$-\frac{c\,ctg\mu^2}{2h^2m}, \qquad /12/$$

де $u_0=\mu_0\sqrt{S}$; $\mu_0=2\sqrt[4]{\frac{h^2m^2ctg^2\mu}{3(1+\nu+\nu^2)}}$; $ber_2 u_0$, $bei_2 u_0$, $ker_2 u_0$, $kei_2 u_0$ – функції Томпсона.

Використовуючи ключові рівняння /2/, функцію напружень V і температурне поле t записуємо як

$$V=-\frac{1}{2ctg\mu}\Big[c_1\mu_0 S^{-1/2}ber_0' u_0+c_1\frac{1}{2}\mu_0^2 bei_0 u_0+c_2\mu_0 S^{-1/2}bei_0' u_0-$$

$$-c_2\frac{1}{2}\mu_0^2 ber_0 u_0+c_3\mu_0 S^{-1/2}ker_0' u_0+c_3\frac{1}{2}\mu_0^2 kei_0 u_0+c_4\mu_0 S^{-1/2}kei' u_0-$$

$$-c_4\frac{1}{2}\mu_0^2 ker_0 u_0, \qquad /13/$$

$$t=\frac{\mu_0^3}{8\alpha_t m\, ctg\mu}\Big\{S^{-1/2}(c_1 bei_0' u_0-c_2 ber_0' u_0+c_3 kei' u_0+c_4 ker_0' u_0)\Big|_{S_{11}}^{S}\Big\}+$$

$$+\frac{ctg\mu}{\alpha_t}\int_{S_{11}}^{S}\frac{1}{S}\Big(c_1 ber_2 u_0+c_2 bei_2 u_0+c_3 ker_2 u_0+c_4 kei_2 u_0+c_5 S+c_6\frac{1}{S}-\frac{c\,ctg\mu}{2h^2m}\Big)dS. \qquad /14/$$

Для областей оболонки $S_1<S\le S_{11}$ і $S_{12}\le S\le S_{01}$ зовні зони підігріву функцію θ знаходимо з рівняння

$$S^2\theta^{(4)}+4S\theta^{(3)}+\theta m ctg^2\mu=\alpha_t m S t_0' ctg\mu. \qquad /15/$$

Нехай температурне поле зварювання задане у вигляді

$$t_0(S)=t^* e^{K|S-S_0|}, \qquad /16/$$

де t^* – const t в перетині $S=S_0$, $K=\frac{\sqrt{Bi}}{a}$, Bi – критерій Біо; a – коефіцієнт температуропровідності.

Загальний розв"язок рівняння /16/ має вигляд

$$\theta=b_{11} ber_2 x_0+b_{21} bei_2 x_0+b_{31} ker_2 x_0+b_{41} kei_2 x_0+\theta^*, \qquad /17/$$

де $\theta^*=a_1 ber_2 x_0+a_2 bei_2 x_0+a_3 ker_2 x_0+a_4 kei_2 x_0$ – частковий розв"язок, знайдений методом варіації постійних; $x_0=\nu_0\sqrt{S}$, $\nu_0=2\sqrt[4]{m\, ctg^2\mu}$.

З використанням ключових рівнянь /2/, функцію напружень V записуємо як $V=-\frac{1}{2ctg\mu}\Big[b_{11}\nu_0 S^{-1/2} ber_0' x_0+b_{11}\frac{1}{2}\nu_0^2 bei_0 x_0+$

$$+B_{21}\vartheta_0 S^{-1/2}bei'x_0-B_{21}\frac{1}{2}\vartheta_0^2 ber_0 x_0+B_{31}\vartheta_0 S^{-1/2}ker'_0 x_0+$$

$$+\frac{1}{2}B_{31}\vartheta_0^2 kei_0 x_0+B_{41}\vartheta_0 S^{-1/2}kei'x_0-B_{41}\frac{1}{2}\vartheta_0^2 ker_0 x_0+2L[\theta^*]]. \qquad /18/$$

Невідомі константи C, C_i, B_{j1}, B_{k2}, де $i=\overline{1,6}, j, k=\overline{1,4}$ визначаємо з умов вільних країв /3/, умов механічного спряження /19/,

$$\begin{aligned} &\theta(S_{11}-0)=\theta(S_{11}+0), && \theta(S_{12}-0)=\theta(S_{12}+0),\\ &\dot\theta(S_{11}-0)=\dot\theta(S_{11}+0), && \dot\theta(S_{12}-0)=\dot\theta(S_{12}+0),\\ &\ddot\theta(S_{11}-0)=\ddot\theta(S_{11}+0), && \ddot\theta(S_{12}-0)=\ddot\theta(S_{12}+0); \end{aligned} \qquad /19/$$

умов на температурне поле підігріву /20/,

$$t_1(S_{11})=0,\ t_1(S_{12})=0,\ t_1'(S_{11})=0,\ t_1'(S_{12})=0; \qquad /20/$$

умови на напруження /21/

$$\sigma_2^+(S_m)=K_0\sigma_T, \qquad /21/$$

де σ_T - σ текучості.

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. К., 1978. 2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976. 3. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К., 1978. 4. Романчук Я.П. Оптимизация напряженного состояния свариваемых тонких оболочек и пластин при помощи локального подогрева: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат.наук. Львов, 1980.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 517.946

Б.М.Філь

ПОВНА ІНТЕГРОВАНІСТЬ СИСТЕМИ ТИПУ ТЮРІНГА-БОГОЛЮБОВА /МОЛ./

Доведемо бігамільтоновість та повну інтегрованість нелінійної моделі типу Тюрінга-Боголюбова /мол./ [4, 5, 8]

$$\psi_{xt} = 2i\psi\psi^*\psi_x - \psi \qquad /1/$$

на періодичному нескінченомірному гладкому многовиді $M = C_\ell^{(\infty)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{C}^2)$, де $\mathbb{R}^1_+ \ni \ell < \infty$ – період. Це рівняння є нетривіальною нелінійною моделлю теорії поля та фізики елементарних частинок.

Перепишемо його у зручнішому вигляді $(u=\psi,\ v=\psi^*)$:

$$u_{xt} = 2iuvu_x - u,$$
$$v_{xt} = -2iuvv_x - v. \qquad /2/$$

У праці [6] показано, що /1/ має представлення типу Лакса з операторами

$$L = \partial_x + F, \qquad A = \partial_t + G,$$

$$F = i\begin{bmatrix} \frac{\lambda^2}{2} & -\lambda\psi_x^* \\ \lambda\psi_x & -\frac{\lambda^2}{2} \end{bmatrix}, \qquad G = i\begin{bmatrix} |\psi|^2 + \frac{1}{2\lambda^2} & -\frac{i}{\lambda}\psi^* \\ -\frac{i}{\lambda}\psi & -(|\psi|^2 + \frac{1}{2\lambda^2}) \end{bmatrix}.$$

Використовуючи форму оператора L, можна отримати асимптотичний розклад при $\lambda \to \infty$ для функції $\sigma = \partial_x \ln f_1(x,\lambda)$ / $f_1(x,\lambda)$ – перша компонента нормованої в точці x_0 блохівської власної функції оператора L /. З допомогою рівняння Рікаті для σ

$$\sigma_x + \sigma^2 - \sigma\frac{u_{xx}}{u_x} + \left(\frac{\lambda^4}{4} - \lambda^2\left(\frac{i}{2}\,\frac{u_{xx}}{u_x} + u_x v_x\right)\right) = 0$$

легко показати, що функція σ при $\lambda \to \infty$ має асимптотичний розклад:

$$\sigma = \frac{i}{2}\lambda^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \lambda^{-2j},$$

де $\sigma_0 = -iu_x v_x + \frac{u_{xx}}{u_x}$; $\sigma_1 = -iu_x^2 v_x^2 + u_{xx}v_x + (u_x v_x)_x - i\partial^2 \ln u_x$ і т.д.

Величини $T_j = \int\limits_{x_0}^{x_0+\ell} \omega_j \, dx$ – це закони збереження динамічної системи /2/ [1]. Для доведення повної інтегрованості моделі /2/, знайдемо рекурсійний оператор Λ. Використаємо відомі факти [2, 3]: $\Delta(\lambda) = \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22})$,

$$grad\,\Delta(\lambda) = tr\left(\frac{1}{2} S([F, F_i] - \partial_x F_i)\right), \ (i = 1,2 \quad F_1 = \frac{\partial F}{\partial u_x}, \ F_2 = \frac{\partial F}{\partial v_x})$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = [F, S], \qquad grad\,\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\delta \Delta(\lambda)}{\delta u} \\ \frac{\delta \Delta(\lambda)}{\delta v} \end{pmatrix}.$$

Виключаючи коефіцієнти матриці монодромії $S_{i,j}$, $i,j = 1,2$, отримуємо

$$\Lambda\, grad\,\Delta(\lambda) = \lambda^2 grad\,\Delta(\lambda), \tag{3}$$

де

$$\Lambda = \begin{bmatrix} i\partial + 2\partial v_x \partial^{-1} u_x & 2\partial v_x \partial^{-1} v_x \\ 2\partial u_x \partial^{-1} u_x & -i\partial + 2\partial u_x \partial^{-1} v_x \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що $\Lambda\ grad\ T_j = grad\ T_{j+1}$.

Отже, можна виходячи з інваріанту T_0 побудувати всю систему інваріантів T_j : $grad\,T_j = \Lambda^j grad\,T_0$.

Оскільки існує Λ^{-1}, то можна отримати систему законів збереження і в "другий бік":

$$grad\ T_0 \xrightarrow{\Lambda^{-1}} grad\ H_1 \xrightarrow{\Lambda^{-1}} grad\ H_2 \longrightarrow \dots$$

Випишемо тільки перші три закони збереження та їх градієнти /для зручності запишемо тільки градієнт для H_3 /

$$H_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{x_0}^{x_0+\ell} (u v_x - u_x v)\,dx, \quad grad\,H_1 = \begin{pmatrix} v_x \\ -u_x \end{pmatrix}, \ grad\,H_2 = \begin{pmatrix} -iv + 2uvv_x \\ -iu - 2uvu_x \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \int\limits_{x_0}^{x_0+\ell} \left(-iuv + \frac{1}{2}(uv^2 u_x - u^2 v v_x)\right) dx,$$

$$grad\,H_3 = \begin{pmatrix} -\partial^{-1} v - 2i\partial^{-1} uvv_x - 2iv_x \partial^{-1} u_x \partial^{-1} v + 2iv_x \partial^{-1} v_x \partial^{-1} u + 4v_x \partial^{-1} u_x \partial^{-1} uvv_x + \\ + 4v_x \partial^{-1} v_x \partial^{-1} uvu_x \\ \partial^{-1} u - 2i\partial^{-1} uvu_x - 2iu_x \partial^{-1} v_x \partial^{-1} u + 2iu_x \partial^{-1} u_x \partial^{-1} v - 4u_x \partial^{-1} u_x \partial^{-1} uvv_x - \\ - 4u_x \partial^{-1} v_x \partial^{-1} uvu_x \end{pmatrix}.$$

Не важко перевірити, що оператор $\mathcal{L}=\begin{bmatrix} 0 & i\partial^{-1} \\ i\partial^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ являється імплектичним і нетеровим відносно динамічної системи /2/ /нагадаємо: $\partial^{-1}\cdot=\frac{1}{2}\left(\int_{x_0}^{x}\cdot\,dx-\int_{x}^{x_0+\ell}\cdot\,dx\right.$ /. Підлягає перевірці також те, що оператор $\mathcal{M}=\mathcal{L}\Lambda$ імплектичний та нетеровий:

$$\mathcal{M}=\begin{bmatrix} 2iu_x\partial^{-1}u_x & 1+2iu_x\partial^{-1}v_x \\ -1+2iv_x\partial^{-1}u_x & 2iv_x\partial^{-1}v_x \end{bmatrix}.$$

Крім того, очевидно, виконується рівність $\lambda^2\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,T=\mathcal{M}\,\mathrm{grad}\,T$, $T=\sum_{j=0}^{\infty}T_j\cdot\lambda^{-2j}$. Її тривіальний наслідок - інволютивність законів збереження відносно двох дужок Пуассона, заданих операторами $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$:

$$\{T_j,T_k\}_{\mathcal{L}}=\{T_j,T_k\}_{\mathcal{M}}=0 \quad \forall j,k\in\mathbb{Z}_+$$

Система /2/ бігамільтонова

$$u_t=-\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,H_2=-\mathcal{M}\,\mathrm{grad}\,H_3.$$

Слід відзначити, що всі розглянуті тут об"єкти отримані також градієнтно-голономним та асимптотичним методами.

Для даної системи шукаються явні розв"язки в термінах рімановим тета-функцій, які становлять інтерес з точки зору фізичного застосування, зокрема, такі їх типи, як солітонні та скінчено-зонні [7].

1. Боголюбов Н.Н. /мл./, Прикарпатский А.К., Курбатов А.М., Самойленко В.Г. Нелинейная модель типа Шредингера: законы сохранения, гамильтонова структура и полная интерируемость // Теорет. и мат.физика. 1985. Т. 65. № 2. С. 271-285. 2. Боголюбов Н.Н. /мл./, Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Периодическая задача для нелинейных уравнений распространения волнового импульса в двухуровневой среде без диссипации. К., 1983. /Препринт/ Ин-т математики АН УССР. № 83.22. 3. Боголюбов Н.Н. /мл./, Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Классическая и квантовая полная интегрируемость модели типа Шредингера. К., 1984. /Препринт/ Ин-т математики АН УССР. № 84.53. 4. Прикарпатский А.К. Геометрическая структура и Бэклунд-преобразование одной системы нелинейных эволюционных уравнений // Укр.мат.журн. 1980. Т. 32. № 1. С. 124-127. 5. Прикарпатский А.К. Об одной точно решаемой системе нелинейных дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн. 1979. Т. 31. № 5. С. 576-582. 6. Скрипник А.И., Филь Б.Н. Идеалы в алгебрах Грассмана, группы голономий и представление Лакса для динамических систем // Дифференциально-геометрические и алгебраические методы в теории динамических систем. К., 1983. С. 16-31. /Препринт/ Ин-т математики АН УССР.

№ 83.59. 7. Теория солитонов: Метод обратной задачи // Под ред. С.П.Новикова. М., 1980. 8. Dodd R.K., Morris H.C., Eagleton J. Pertubation theory for the nearly integrable nonlinear equations associated with a modified Zakharov-Shabat Scattering problem//Journ. Phys. A: Mathem, General. 1980. v.13. N8. p.1455-1465.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 515.12+512.58

М.М.Зарічний

ГРУПИ АВТОМОРФІЗМІВ І ФАКТОРИЗАЦІЯ НОРМАЛЬНИХ ФУНКТОРІВ

Нормальні функтори, що діють у категорії $Comp$ /означення наявне у праці [4] / та їхні природні перетворення утворюють категорію $\mathcal{NF}$ [1, 2]. Законність розгляду категорії $\mathcal{NF}$ грунтується на тому, що природні перетворення нормального функтора F у нормальний функтор G параметризуються підмножиною множини неперервних відображень $C(F(Q), G(Q))$ / Q - гільбертовий куб/ за допомогою відображення $\varphi \mapsto \varphi_Q$ [2].

Позначимо через $Aut(F)$ групу всіх автоморфізмів нормального функтора F. Ототожнюючи φ з φ_Q, $Aut(F)$ розглядаємо як підмножину в $C(F(Q), F(Q))^Q$. Оскільки для кожного $\varphi \in Aut(F)$ відображення φ_Q гомеоморфізм, то $Aut(F)$ є топологічною групою в компактно-відкритій топології [5].

Приклади: а/ $Aut(exp) = Aut(exp_n) = \{*\}$;
б/ $Aut((-)^n) = S_n$ /симетрична група/;
в/ $Aut(P_2)$ топологічно ізоморфна групі зростаючих гомеоморфізмів відрізка.

Через $Homeo(X)$ позначимо топологічну групу гомеоморфізмів компакта X /тут і надалі функціональні простори наділяються компактно-відкритою топологією/.

Теорема 1. Нехай X - компакт, F - нормальний функтор, $deg(F) \leq |X|$, якщо $deg(F) < \infty$, і X - нескінченний, якщо $deg(F) = \infty$.

Тоді відображення $\delta_X : Aut(F) \to Homeo(X)$, $\delta_X(\varphi) = \varphi_X$ є топологічним ізоморфізмом на свій образ.

Доведення. Покажемо неперервність відображення δ_X. Зобразимо тихоновський куб I^τ як границю оберненої системи $\mathcal{Y} = \{I^A, p_{AB}; \mathcal{P}_\omega(\tau)\}$, де $\mathcal{P}_\omega(\tau)$ – множина зліченних підмножин кардинала τ; $p_{AB} : I^A \to I^B$ – проекція, якщо $A \supset B$. Тоді за неперервністю функтора F одержимо $F(I^\tau) = \lim F(\mathcal{Y}) = \{F(I^A), F(p_{AB}); \mathcal{P}_\omega(\tau)\}$ і $\varphi_{I^\tau} = \lim\{\varphi_{I^A} : F(I^A) \to F(I^A)\}$. Нескладно переконатись, що відображення $\lim$ неперервно відображає підмножину декартового добутку $\prod\{C(F(I^A), F(I^A)) \mid A \in \mathcal{P}_\omega(\tau)\}$ у простір $C(F(I^\tau), F(I^\tau))$. Звідси, а також з $I^A \cong Q$, бачимо, що відображення δ_{I^τ} неперервне.

Зафіксуємо вкладення $i : X \to I^\tau$ для деякого τ. З мономорфності функтора F і комутативності діаграми

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(i)"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & F(I^\tau) \arrow[d, "\varphi_{I^\tau}"] \\ F(X) \arrow[r, "F(i)"] & F(I^\tau) \end{tikzcd}$$

випливає тепер неперервність відображення δ_X.

Нескладно переконатись, що коли X задовольняє умови теореми, то відображення δ_X є неперервним ізоморфізмом на свій образ. Аналогічно до попереднього можна показати неперервність оберненого відображення $\delta_X^{-1} : \delta_X(Aut(F)) \to Aut(F)$.

Теорема доведена.

Нехай $G \subset Aut(F)$ – компактна підгрупа. Використовуючи теорему 1, задамо дію групи G на компакті $F(X)$, прийнявши $\varphi x = \varphi_X(x)$ для кожного $\varphi \in G$ та $x \in F(X)$.

Лема. Для кожного неперервного відображення компактів $f : X \to Y$ відображення $F(f) : F(X) \to F(Y)$ – еквіваріантне.

Доведення. Якщо $x \in F(X)$ і $\varphi \in G$, то $\varphi F(f)(x) = \varphi_Y F(f)(x) = F(f)\varphi_X(x) = F(f)\varphi(x)$. Лема доведена.

Позначимо через $F_G(X)$ простір орбіт G-простору $F(X)$. Нехай $q_X : {}_GF(X) \to F_G(X)$ – фактор-відображення. Попередня лема дає змогу для неперервного відображення

$f: X \to Y$ задати неперервне відображення $F_G(f): F_G(X) \to F_G(Y)$ з властивістю $F_G(f)\, q_X = q_Y\, F(f)$. Таким чином, побудовано функтор $F_G: Comp \to Comp$ і природне перетворення $q = \{q_X\}: F \to F_G$. Функтор F_G називається фактор-функтором функтора F за компактною підгрупою $G \subset Aut(F)$.

<u>Теорема 2</u>. Для нормального функтора F і компактної підгрупи $G \subset Aut(F)$ функтор F_G – нормальний.

<u>Доведення</u>. Перевіримо виконання умов з означення нормального функтора. Зауважимо, безпосередньо з означення випливає, що функтор F_G – епіморфний, зберігає вагу, точку і порожню множину.

Нехай $f: X \to Y$ – мономорфізм у категорії $Comp$, x_1, x_2 належать різним орбітам G -простору $F(X)$. Тоді $\varphi_X(x_1) \neq x_2$ для кожного $\varphi \in G$, а тому $\varphi_Y F(f)(x_1) = F(f)\varphi_X(x_1) \neq F(f)(x_2)$, звідки одержуємо, що точки $F(f)(x_1)$ і $F(f)(x_2)$ належать різним орбітам G -простору $F(Y)$. Тому $F_G(f)$ – вкладення і F_G – мономорфний функтор.

Нехай $\mathcal{S} = \{X_\alpha, p_{\alpha\beta}; A\}$ – обернена система в категорії $Comp$ над напрямленою множиною A і $(X, p_\alpha) = \varprojlim \mathcal{S}$. Тоді $(F(X), F(p_\alpha)) = \varprojlim F(\mathcal{S})$, а $(Y, r_\alpha) = \varprojlim F_G(\mathcal{S})$ і $h: F_G(X) \to Y$ – обернена границя відображень $F_G(p_\alpha): F_G(X) \to F_G(X_\alpha)\ \alpha \in A$. З неперервності функтора F випливає сюр"єктивність відображення h.

Нехай $x_1, x_2 \in F(X)$ і $G(x_1) \neq G(x_2)$. Тоді $G(x_1) \cap G(x_2) \neq \emptyset$, і з компактності $F(X)$ випливає існування $\alpha \in A$ такого, що $F(p_\alpha)(G(x_1)) \cap F(p_\alpha)(G(x_2)) = \emptyset$. Звідси $F_G(p_\alpha) q_X(x_1) \neq F_G(p_\alpha) q_X(x_2)$ і h – ін"єктивне відображення, а отже, – гомеоморфізм. Отже, доведена неперервність функтора F_G.

Властивість збереження прообразів функтором, очевидно, полягає в збереженні функтором універсальних квадратів виду

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "i"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

де i – вкладення. Розглянемо діаграму

$$\begin{tikzcd} F_G(Z) \arrow[r, "F_G(p_2)"] \arrow[d, tail, "F_G(p_1)"'] & F_G(A) \arrow[d, tail, "F_G(i)"] \\ F_G(X) \arrow[r, "F_G(f)"] & F_G(Y) \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Якщо $x \in F_G(X)$ і $a \in F_G(A)$ такі, що $F_G(f)(x) = F_G(i)(a)$, то нехай $b \in F(A)$ – така точка, що $q_A(b) = a$, $y \in F(X)$ – точка, коли $q_X(y) = x$. Тоді $F(i)(G(b)) = F(f)(G(y))$. За властивістю збереження прообразів функтором F існує $z \in F(Z)$ таке, що $F(p_1)(z) \in G(y)$, $F(p_2)(z) \in G(b)$. Одержуємо $F_G(p_1) q_Z(z) = q_X(y) = x$, $F_G(p_2) q_Z(z) = q_X(b) = a$, звідки діаграма $(*)$ – універсальний квадрат. Отже, доведена властивість збереження прообразів функтором F_G. Теорема доведена.

Твердження. Для кожного $x \in F(X)$ $supp_{F_G} q_X(x) = supp_F(x)$.

Наслідок. $deg(F_G) = deg(F)$.

Частковим випадком наведених вище побудов є конструкція функторів SP^n_G [3].

1. Заричный М.М. О свойствах нормальных функторов // Пятый Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. 1985. С. 96-97. 2. Зарічний М.М. Категорія нормальних функторів // Вісн. Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат. 1986. Вип. 25. С. 52-56. 3. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q -многообразия // Успехи мат.наук. 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 177-195. 4. Щепин Е.В. Функторы инесчетные степени компактов // Успехи мат.наук. 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 3-62. 5. Arens R.F. Topologies for homeomorphism groups // Amer. J. Math. 1946. vol. 68. p. 593-610.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.В.Ковальчук, А.І.Пилипович

ТЕМПЕРАТУРНІ ДЕФОРМАЦІЇ У ПЛАСТИНЦІ ПРИ ЗАЛЕЖНОМУ ВІД КООРДИНАТИ КОЕФІЦІЄНТІ ТЕПЛОВІДДАЧІ З КРАЙОВОЇ ПОВЕРХНІ

Розглянемо вільну від зовнішнього навантаження півбезмежну пластинку товщини 2δ, яка нагрівається по вузькій області $|y-v_y\tau| \leq h < \delta$, $x=0$ зовнішнім середовищем температури $t_0 = const$, що рухається з постійною швидкістю v_y у додатному напрямку осі ординат. Через поверхні $z=\pm\delta$ і $x=0$ здійснюється конвективний теплообмін із зовнішніми середовищами відповідно нульової температури і температури $t_c = t_1 + (t_0-t_1)N(y_1)$. Тут τ - час; t_1 - температура середовища, яка омиває частини поверхні $x=0$ за межами області нагріву;

$$N(y_1) = S_-(y_1+h) - S_+(y_1-h);\ y_1 = y - v_y\tau;\ x_1 = x;$$

$S_\pm(\xi)$ - асиметричні одиничні функції [1].

Температурні деформації у пластинці, які одержані за відомими формулами [2] при допомозі знайдених у праці [3] виразів температурного поля і напружень, мають вигляд

$$e_{xx} = \alpha_t \{m_0 f_5(x_1,y_1) + m_1[\exp(-\varkappa x_1) + \mu\varkappa^{-1}]\},$$

$$e_{yy} = \alpha_t \{m_0 f_4(x_1,y_1) + m_1[\exp(-\varkappa x_1) - \varkappa^{-1}]\},$$

$$e_{xy} = \alpha_t (1+\mu) m_0 f_2(x_1,y_1), \qquad (1)$$

де $m_0 = 2[h_0 t_0 - m_1(\varkappa + h_0)]/\pi[1+(h_0-h_1)I]$;

$\varkappa = \alpha_z/\lambda\delta$; $m_1 = h_1 t_1/(\varkappa + h_1)$; $h_i = \alpha_i/\lambda$ $(i=0,1)$;

$$I=\frac{2}{\pi\lambda}\int_0^\infty\frac{(h_1+\gamma_+)\sin^2 h\eta}{\eta^2[(h_1+\gamma_+)^2+\gamma_-^2]}d\eta;\ \omega=v_y/2a;$$

$$\gamma_\pm^2=\left[\sqrt{(\varkappa^2+\eta^2)^2+4\omega^2\eta^2}\pm(\varkappa^2+\eta^2)\right]/2;$$

α_z - коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $z=\pm\delta$; α_0 - коефіцієнт тепловіддачі з області нагріву поверхні $x=0$;
α_1 - з іншої частини цієї поверхні; a - коефіцієнт температуропровідності; λ - коефіцієнт теплопровідності; α_t - температурний коефіцієнт лінійного розширення; μ - коефіцієнт Пуассона;

$$f_3(x_1,y_1)=\int_0^\infty g(\eta)\sin h\eta\{\exp(-\gamma_+x_1)[\ell^-\sin(\gamma_-x_1+\eta y_1)+$$
$$+\ell^+\cos(\gamma_-x_1+\eta y_1)]-\exp(-\eta x_1)[(\ell^-(1-\eta x_1)+$$
$$+n^-\eta^2x_1)\sin\eta y_1+(\ell^+(1-\eta x_1)+n^+\eta^2x_1)\cos\eta y_1]\}d\eta;$$

$$f_4(x_1,y_1)=\int_0^\infty g(\eta)\sin h\eta\{\eta^{-1}\exp(-\gamma_+x_1)[((h_1+\gamma_+)(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)-$$
$$-\mu n^-\eta^2-k^-)\cos(\gamma_-x_1+\eta y_1)-(\gamma_-(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)-\mu n^+\eta^2-k^+)\times$$
$$\times\sin(\gamma_-x_1+\eta y_1)]-\exp(-\eta x_1)[(\mu\eta(n^+-m^+x_1)+\ell^+(2-\eta x_1)-$$
$$-n^+(1-\eta x_1)\eta)\sin\eta y_1-(\mu\eta(n^-+m^-x_1)+\ell^-(2-\eta x_1)-$$
$$-n^-(1-\eta x_1)\eta)\cos\eta y_1]\}d\eta;$$

$$f_5(x_1,y_1)=\int_0^\infty g(\eta)\sin h\eta\{\eta^{-1}\exp(-\gamma_+x_1)[((h_1+\gamma_+)(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)+$$
$$+n^-\eta^2+\mu k^-)\cos(\gamma_-x_1+\eta y_1)-(\gamma_-(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)+n^+\eta^2+$$

$$+\mu k^{+})\sin(\gamma_{-}x_1+\eta y_1)]+\exp(-\eta x_1)[(\eta(n^{+}-m^{+}x_1)+$$

$$+\mu(l^{+}(2-\eta x_1)-n^{+}(1-\eta x_1)\eta))\sin\eta y_1-\eta(n^{-}+m^{-}x_1)+$$

$$+\mu(l^{-}(2-\eta x_1)-n^{-}(1-\eta x_1)\eta))\cos\eta y_1]\}d\eta;$$

$$g(\eta)=[(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)((h_1+\gamma_{+})^2+\gamma_{-}^2)]^{-1};$$

$$n^{+}=\varkappa^2\gamma_{-}+2\omega(h_1+\gamma_{+})\eta;\ l^{+}=2\omega\gamma\eta-h_1\varkappa^2\gamma_{-};$$

$$n^{-}=\varkappa^2(h_1+\gamma_{+})-2\omega\gamma_{-}\eta;\ l^{-}=2\omega h_1\gamma_{-}\eta+\varkappa^2\gamma;$$

$$k^{+}=b\gamma_{-}+2\omega(h_1+\gamma_{+})\eta^3;\ b=\varkappa^4+(\varkappa^2+4\omega^2)\eta^2;$$

$$k^{-}=b(h_1+\gamma_{+})-2\omega\gamma_{-}\eta^3;\quad \gamma=(h_1+\gamma_{+})\gamma_{+}+\gamma_{-}^2;$$

$$m^{+}=(h_1-\eta)[2\omega(\eta-\gamma_{+})\eta-\varkappa^2\gamma_{-}]-4\varkappa^2\omega\eta;$$

$$m^{-}=(h_1-\eta)[2\omega\gamma_{-}\eta+\varkappa^2(\eta-\gamma_{+})]+4\omega^2\eta^2-\varkappa^4.$$

Якщо в області $|y_1|\leq h$ поверхні $x=0$ задається температура $t_0=const$, а поза нею виконується умова теплообміну Ньютона, то розв"язок задачі одержуємо з формул /1/ при $h_0\to\infty$ у вигляді

$$\square\quad e_{xx}=\alpha_t\{Q_1f_5(x_1,y_1)+m_1[\exp(-\varkappa x_1)+\mu\varkappa^{-1}]\};$$

$$e_{yy} = \alpha_t \left\{ Q_1 f_4 (x_1, y_1) + m_1 [\exp(-\varkappa x_1) - \varkappa^{-1}] \right\};$$

$$e_{xy} = \alpha_t (1+\mu) Q_1 f_3 (x_1, y_1), \qquad /2/$$

де $Q_1 = 2(t_0 - m_1)/\pi I.$

Якщо через область $|y_1| \leq h$ поверхні $x = 0$ здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем температури $t_0 = const$, а поза нею поверхня $x = 0$ теплоізольована, то розв"язок задачі одержуємо з формул /1/ при $h_1 = 0$ у вигляді

$$e_{xx} = \alpha_t Q_0 \varphi_5 (x_1, y_1); \; e_{yy} = \alpha_t Q_0 \varphi_4 (x_1, y_1);$$

$$e_{xy} = \alpha_t (1+\mu) Q_0 \varphi_3 (x_1, y_1), \qquad /3/$$

де

$$\varphi_3 (x_1, y_1) = \int_0^\infty g_1(\eta) \sin h\eta \{ \exp(-\gamma_+ x_1) [l_1^- \sin(\gamma_- x_1 + \eta y_1) +$$

$$+ l_1^+ \cos(\gamma_- x_1 + \eta y_1)] - \exp(-\eta x_1) [(l_1^- (1 - \eta x_1) + n_1^- \eta^2 x_1) \sin \eta y_1 +$$

$$+ (l_1^+ (1 - \eta x_1) + n_1^+ \eta^2 x_1) \cos \eta y_1] \} d\eta;$$

$$\varphi_4 (x_1, y_1) = \int_0^\infty g_1(\eta) \sin h\eta \{ \eta^{-1} \exp(-\gamma_+ x_1) \times$$

$$\times [(\gamma_+ (\varkappa^4 + 4\omega^2 \eta^2) - \mu n_1^- \eta^2 - k_1^-) \cos(\gamma_- x_1 + \eta y_1) -$$

$$- (\gamma_- (\varkappa^4 + 4\omega^2 \eta^2) - \mu n_1^+ \eta^2 - k_1^+) \sin(\gamma_- x_1 + \eta y_1)] -$$

$$- \exp(-\eta x_1) [(\mu \eta (n_1^+ - m_1^+ x_1) + l_1^+ (2 - \eta x_1) -$$

$$- n_1^+ (1 - \eta x_1) \eta) \sin \eta y_1 - (\mu \eta (n_1^- + m_1^- x_1) +$$

$$+\ell_1^-(2-\eta x_1)-n_1^-(1-\eta x_1)\eta)\cos\eta y_1]\}\,d\eta;$$

$$\varphi_5(x_1,y_1)=\int_0^\infty g_1(\eta)\sin h\eta\{\eta^{-1}\exp(-\gamma_+x_1)\times$$

$$\times[(\gamma_+(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)+n_1^-\eta^2+\mu\kappa_1^-)\cos(\gamma_-x_1+\eta y_1)-$$

$$-(\gamma_-(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)+n_1^+\eta^2+\mu\kappa_1^+)\sin(\gamma_-x_1+\eta y_1)]+$$

$$+\exp(-\eta x_1)[(\eta(n_1^+-m_1^+x_1)+\mu(\ell_1^+(2-\eta x_1)-$$

$$-n_1^+(1-\eta x_1)\eta))\sin\eta y_1-(\eta(n_1^-+m_1^-x_1)+$$

$$+\mu(\ell_1^-(2-\eta x_1)-n_1^-(1-\eta x_1)\eta))\cos\eta y_1]\}\,d\eta;$$

$$Q_0=2h_0t_0/\pi(1+h_0I_0);\quad I_0=\frac{2}{\pi h}\int_0^\infty\frac{\gamma_+\sin^2h\eta}{\eta^2 p}\,d\eta;$$

$$p=\sqrt{(\varkappa^2+\eta^2)^2+4\omega^2\eta^2};\quad g_1(\eta)=[(\varkappa^4+4\omega^2\eta^2)p]^{-1};$$

$$n_1^+=\varkappa^2\gamma_-+2\omega\eta\gamma_+;\quad n_1^-=\varkappa^2\gamma_+-2\omega\eta\gamma_-;$$

$$\kappa_1^+=b\gamma_-+2\omega\eta^3\gamma_+;\quad \kappa_1^-=b\gamma_+-2\omega\eta^3\gamma_-;$$

$$\ell_1^+=2\omega p\eta;\quad m_1^+=[\varkappa^2\gamma_--2\omega(\eta-\gamma_+)\eta-4\varkappa^2\omega]\eta;$$

$$\ell_1^-=\varkappa^2p;\quad m_1^-=[2\omega(2\omega-\gamma_-)\eta-\varkappa^2(\eta-\gamma_+)]\eta-\varkappa^4.$$

Якщо в області $|y_1| \le h$ поверхні $x=0$ задається тепловий потік $q = const$, а частини $|y_1| > h$ поверхні $x=0$ і бічні поверхні $z = \pm\delta$ теплоізольовані, то деформації знаходимо з формул /3/ при $h_0 t_0 = q/\lambda$, $h_0 = 0$, $\varkappa = 0$ у вигляді

$$\square\ e_{xx} = \frac{\alpha_t q}{\pi\lambda\omega}\int_0^\infty \frac{\sin h\eta}{\eta^2\sqrt{\eta^2+4\omega^2}}\Big\{\eta\exp(-\eta x_1)\times$$

$$\times\Big[\big(\eta(\eta-\beta_+)x_1 + (1-\mu(1-\eta x_1))\beta_+ + \mu\sqrt{\eta^2+4\omega^2}\times$$

$$\times(2-\eta x_1)\big)\sin\eta y_1 - \big(\eta(2\omega-\beta_-)x_1 - (1-\mu(1-\eta x_1))\beta_-\big)\cos\eta y_1\Big] -$$

$$-(1+\mu)\exp(-\beta_+ x_1)\Big[(\eta\beta_+ + 2\omega\beta_-)\sin(\beta_- x_1 + \eta y_1) +$$

$$+(\eta\beta_- - 2\omega\beta_+)\cos(\beta_- x_1 + \eta y_1)\Big]\Big\}d\eta;$$

$$e_{yy} = \frac{\alpha_t q}{\pi\lambda\omega}\int_0^\infty \frac{\sin h\eta}{\eta\sqrt{\eta^2+4\omega^2}}\Big\{\exp(-\eta x_1)\Big[\big((1-\mu-\eta x_1)\beta_+ -$$

$$-\mu(\eta-\beta_+)\eta x_1 - \sqrt{\eta^2+4\omega^2}(2-\eta x_1)\big)\sin\eta y_1 +$$

$$+\big((1-\mu-\eta x_1)\beta_- + \mu(2\omega-\beta_-)\eta x_1\big)\cos\eta y_1\Big] +$$

$$+(1+\mu)\exp(-\beta_+ x_1)\Big[\beta_+\sin(\beta_- x_1 + \eta y_1) +$$

$$+\beta_-\cos(\beta_- x_1 + \eta y_1)\Big]\Big\}d\eta;$$

$$e_{xy} = \frac{\alpha_t(1+\mu)q}{\pi\lambda\omega}\int_0^\infty \frac{\sin h\eta}{\eta\sqrt{\eta^2+4\omega^2}}\Big\{\exp(-\eta x_1)\times$$

$$\times\left[\beta_{-}\eta x_1 \sin\eta y_1-\left(\sqrt{\eta^2+4\omega^2}\,(1-\eta x_1)+\beta_{+}\eta x_1\right)\cos\eta y_1\right]+$$

$$+\sqrt{\eta^2+4\omega^2}\exp(-\beta_{+}x_1)\cos(\beta_{-}x_1+\eta y_1)\Big\}d\eta\,,$$

/4/

де $\beta_{\pm}^2=\eta\left(\sqrt{\eta^2+4\omega^2}\pm\eta\right)/2.$

Температурне поле та зумовлені ним температурні напруження для останнього випадку одержані у праці [4].

1. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М., 1984. 2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., 1972. 3. Температурные напряжения в пластине при фрикционном упрочнении / Коляно Ю.М., Бабей Ю.И., Дидык В.З. и др. // Физ.-хим. механика материалов. 1982. № 4. С. 75-81. 4. Температурные напряжения в пластине при заданном тепловом потоке / Бабей Ю.И., Дидык В.З., Кордуба Б.М. и др. // Физ.-хим. механика материалов. 1985. № 3. С. 82-84.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ВИПАДКОВА КОНТИНУАЛЬНА АМПЛІФІКАЦІЯ

Нехай додатна випадкова змінна ξ з густиною $f(t)$ має відбиття $\varphi(z)$, що є аналітичною функцією у деякій смузі

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}f(t)\,dt,\quad 1-\alpha<\mathrm{Re}\,z<1+\beta,\ (\alpha>0,\ \beta>0). \qquad /1/$$

Тоді за зворотною формулою для відбиття [1]

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z}\varphi(z)\,dz,\quad t>0,\ c\in(1-\alpha,1+\beta). \qquad /2/$$

Добуток $\xi\eta$ двох незалежних додатних випадкових змінних ξ та η відповідно з густинами $f(t)$ і $g(t)$, що характеризуються відбиттям $\varphi(z)$, $1-\alpha<\mathrm{Re}\,z<1+\beta$ та $\psi(z)$, $1-A<\mathrm{Re}\,z<1+B$, / $A>0$, $B>0$ / має густину

$$f(t)\,\boxdot\,g(t)=\int_0^\infty f\left(\frac{t}{\tau}\right)g(\tau)\frac{d\tau}{\tau},\quad t>0 \qquad /3/$$

і відбиття $\varphi(z)\,\psi(z)$ у спільній смузі аналітичності $1-\min(\alpha,A)<\mathrm{Re}\,z<1+\min(\beta,B)$. Густина /3/ називається амплiфiкацiєю /підсиленням/ густин $f(t)$ і $g(t)$. Амплiфiкацiю двох однакових густин позначимо символом

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{2},\quad f(t)\Big|_{\boxdot}^{2}=f(t)\,\boxdot\,f(t),\quad t>0. \qquad /4/$$

Покажемо, що бувають випадки, коли символи

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell},\quad f(t)\Big|_{\boxdot}^{\varkappa},\quad f(t)\Big|_{\boxdot}^{\lambda},$$

де ℓ - додатна стала; $\varkappa$ - невід"ємна цілочисельна випадкова змінна; λ - невід"ємна абсолютно неперервна випадкова змінна, мають сенс і представляють густину розподілу ймовірностей.

1. <u>Континуальна амплiфiкацiя</u>. Нехай відбиття /1/ не має нулів у смузі аналітичності. Тоді для довільної додатної сталої ℓ вираз $\varphi^{\ell}(z)$ розуміємо як $e^{\ell\ln\varphi(z)}$, де $\ln\varphi(z)$ - головне значення логарифму. Густину, відповідну відбиттю $\varphi^{\ell}(z)$,

$\ell > 0$ назвемо континуальною ампліфікацією порядку ℓ густини $f(t)$ та позначимо через $f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell}$. Зауважимо, що при $\ell = n, (n = 2,3,\ldots)$ вираз $\varphi^n(z)$ має сенс без ніяких обмежень на $\varphi(z)$ та $f(t)\Big|_{\boxdot}^{n}$ є густиною добутку n незалежних однаково розподілених випадкових змінних з густиною $f(t)$. Очевидно, що континуальна ампліфікація при довільних ℓ_1 та ℓ_2 задовольняє співвідношення

$$\left(f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell_1}\right) \boxdot \left(f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell_2}\right) = f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell_1+\ell_2}.$$

Густина $f(t)$ з відбиттям $\varphi(z)$ називається твірною.

2. <u>Випадкова ампліфікація</u>. Нехай $\{\xi_k\}, (k = 1,2,\ldots)$ – послідовність взаємнонезалежних абсолютно неперервних додатних і однаково розподілених випадкових змінних з густиною $f(t)$ і відбиттям /1/, а $\varkappa$ – невід"ємна цілочисельна випадкова змінна, незалежна від усіх $\xi_k, (k = 1,2,\ldots)$, що має генератрису

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{\varkappa = n\} z^n, \; |z| < 1+\gamma, \; \gamma > 0.$$

Утворимо добуток випадкового числа $\varkappa$ випадкових змінних ξ_k

$$\eta_{\varkappa} = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_{\varkappa}, \; (\varkappa = 1,2,\ldots), \; \eta_0 = 1.$$

Згідно з формулою повної ймовірності функцію розподілу випадкової змінної $\eta_{\varkappa}$ записуємо як

$$\mathcal{P}\{\eta_{\varkappa} \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{\varkappa = n\} \mathcal{P}\{\eta_n \le t\}, \; t > 0.$$

Звідси, упохіднюючи по t, одержуємо густину

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{\varkappa} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{\varkappa = n\} f(t)\Big|_{\boxdot}^{n}, \; f(t)\Big|_{\boxdot}^{1} = f(t), \; f(t)\Big|_{\boxdot}^{0} = \delta(t-1), \qquad /5/$$

де $\delta(t)$ – імпульсна функція Дірака. Відбиття випадкової ампліфікації /5/ набирає вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}\{\varkappa = n\} \varphi^n(z) = G(\varphi(z)), \; \begin{cases} 1-\alpha < \operatorname{Re} z < 1+\beta \\ |\varphi(z)| < 1+\gamma, \; \gamma > 0. \end{cases} \qquad /6/$$

Густина $f(t)$ з відбиттям $\varphi(z)$ називається твірною, а розподіл $\mathcal{H}$ з генератрисою $G(z)$ – керуючим.

3. <u>Випадкова континуальна ампліфікація</u>. Нехай відбиття $/1/_\ell$ не має нулів у смузі аналітичності. Згідно з п.І густина $f(t)|_{\square}^{\ell}$ описує деяку випадкову змінну η_ℓ, $\ell>0$. Нехай далі λ незалежна від усіх η_ℓ невід"ємна випадкова змінна з густиною $h(\ell)$ і зображенням

$$\psi(z)=\int_0^\infty e^{-z\ell}h(\ell)d\ell,\ Re z>-a,\ a\geq 0. \qquad /7/$$

Утворимо континуальний добуток η_λ випадкового числа λ випадкових змінних η_ℓ. За формулою повної ймовірності функція розподілу η_λ дорівнює

$$\mathcal{P}\{\eta_\lambda\leq t\}=\int_0^\infty h(\ell)\mathcal{P}\{\eta_\ell\leq t\}d\ell.$$

Звідси, упохіднюючи по t, дістаємо густину η_λ

$$f(t)\Big|_{\square}^{\lambda}=\int_0^\infty h(\ell)f(t)\Big|_{\square}^{\ell}d\ell,\ t>0. \qquad /8/$$

Випадкова континуальна λ ампліфікація /8/ є сумішшю континуальних ампліфікацій $f(t)|_{\square}^{\ell}$ з керуючою густиною $h(\ell)$. Відбиття випадкової континуальної λ – ампліфікації густини $f(t)$ набуває вигляду

$$\int_0^\infty \varphi^\ell(z)h(\ell)d\ell=\psi(-\ln\varphi(z)),\ \begin{cases}\max(1-\alpha,-a)<Re z<1+\beta,\\ Re(\ln\varphi(z))<a,\ a\geq 0,\end{cases} \qquad /9/$$

де $\ln\varphi(z)$ – головне значення логарифма. Густина $f(t)$ з відбиттям $\varphi(z)$ називається твірною, а розподіл λ зі зображенням $\psi(z)$ – керуючим.

4. <u>Приклади</u>. 1/ Знайти континуальну ампліфікацію порядку ℓ твірної густини

$$f(t)=\frac{\alpha}{t^{1+\alpha}},\ 1<t,\ (\alpha>0). \qquad /10/$$

Відбиття /4/ випадкової змінної з густиною /10/

$$\varphi(z)=\frac{\alpha}{1+\alpha-z}, \quad Re\,z<1+\alpha. \qquad /11/$$

Оскільки $\varphi(z)\neq 0$ у півплощині аналітичності, то при довільному $\ell>0$ має сенс відбиття

$$\varphi^{\ell}(z)=\left(\frac{\alpha}{1+\alpha-z}\right)^{\ell}, \quad Re\,z<1+\alpha.$$

Звідси континуальна ампліфікація порядку ℓ твірної густини /10/

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell}=\frac{\alpha^{\ell}(\ln t)^{\ell-1}}{\Gamma(\ell)\,t^{1+\alpha}}, \quad 1<t, \ (\alpha>0, \ell>0). \qquad /12/$$

2. Записати випадкову ампліфікацію твірної густини /10/ при пуасонівському керуючому розподілі

$$\mathcal{P}\{\varkappa=n\}=e^{-\mu}\frac{\mu^{n}}{n!}, \quad (n=0,1,2,\dots). \qquad /13/$$

За формулами /5/, /12/ і /13/

$$f(t)\Big|_{\boxdot}^{\ell}=e^{-\mu}\delta(t-1)+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\mu}\frac{\mu^{n}}{n!}\cdot\frac{\alpha^{n}(\ln t)^{n-1}}{(n-1)!\,t^{1+\alpha}}=$$

$$=e^{-\mu}\left\{\delta(t-1)+\frac{1}{t^{1+\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha\mu}{\ln t}}\,J_1\left(2\sqrt{\alpha\mu\ln t}\right)\right\}, \quad t>1,$$

де

$$J_1(x)=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2K+1}}{K!\,(K+1)!}.$$

3. Знайти випадкову континуальну ампліфікацію при твірній густині

$$f(t)=\frac{1}{t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln t)^2}{2}}, \quad t>0$$

та керуючій густині

$$h(\ell)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\ell}{2}}, \quad \ell>0.$$

За формулами /1/ і /7/ тут

$$\varphi(z)=e^{\frac{1}{2}(z-1)^2}, \ Re\, z<\infty; \quad \psi(z)=\frac{1}{2z+1}, \ Re\, z>-\frac{1}{2}.$$

Отже, за формулою /9/ відбиття випадкової континуальної ампліфікації

$$\psi(-\ln\varphi(z))=\frac{1}{1-(z-1)^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2-z}, \quad 0<Re\, z<2.$$

Звідси за зворотною формулою /2/

$$f(t)\Big|_{\Theta}^{\lambda}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<t\le 1\\ \frac{1}{2t^2}, & 1\le t<\infty.\end{cases}$$

Зазначимо, що впроваджені ампліфікації розширюють клас розподілів ймовірностей. Розглянуті ампліфікації є аналогами відповідних згорток [2, 3].

1. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття // Вісн. Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат. 1978. Вип. 13. С. 47-53. 2. К в і т І.Д. Континуальна згортка // Вісн.Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат. 1972. Вип. 7. С. 10-18. 3. К в і т І.Д. Випадкова континуальна згортка // Вісн.Львів.ун-ту. Сер.мех.-мат. 1973. Вип. 8. С. 20-29.

Стаття надійшла до редколегії 04.11.86

УДК 517.535.4

О.Б.Скасків

ПРИПУЩЕННЯ МАКІНТАЙРА ПРО ВІДСУТНІСТЬ СКІНЧЕННИХ АСИМПТОТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ У ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ З ЛАКУНАМИ ФЕЙЄРА

Для цілої функції f, заданої лакунарним степеневим рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \qquad /1/$$

Макінтайр [3] висловив припущення, що умова Фейєра

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty \qquad /2/$$

достатня для відсутності у функції f скінченних асимптотичних значень. Хейман [2] показав, що умова

$$\frac{n}{\lambda_n} \ln\lambda_n (\ln\ln\lambda_n)^{2+q} = o(1)\ (n\to\infty),\ q>0, \qquad /3/$$

забезпечує відсутність скінченних асимптотичних значень у цілої функції виду /1/. Доведено [2], що при виконанні умови /3/

$$\ln M(r) = (1+o(1)) \ln m(r) \qquad /4/$$

при $r\to+\infty$ зовні множини E нульової логарифмічної щільності, тобто такої, що $\int_{E\cap[1,r]} d\ln t = o(\ln r)\ (r\to\infty)$; тут $M(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$ і $m(r)=\min\{|f(z)|:|z|=r\}$.
Незначне посилення деяких допоміжних результатів із праці [2], а також застосування ідей з праці [1] дає змогу довести таку теорему.

Теорема 1. Якщо для цілої функції f виду /1/ виконується умова $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln^+ \ln\lambda_n)/\lambda_n < \infty$, то співвідношення /4/ виконується при $r\to+\infty$ зовні деякої множини нульової логарифмічної щільності.

Розглядаючи клас цілих функцій виду /1/, який визначається умовою на зростання

$$\ln\ln\ln M(r) = O(\ln r)\ (r\to+\infty), \qquad /5/$$

вдається довести таке твердження.

Теорема 2. Якщо для цілої функції виду /1/ виконуються умови /2/ і /5/, то співвідношення /4/ виконується при $r \to +\infty$ зовні деякої множини нульової логарифмічної щільності.

Із теореми 2 випливає справедливість припущення Макінтайра для цілих функцій з класу, який визначається умовою /5/.

Застосування значно тонкіших, основаних на ідеях праці [4], міркувань, ніж ті, що використовуються при доведенні теорем 1 і 2, дає змогу довести справедливість ще однієї теореми.

Теорема 3. Якщо для цілої функції виду /1/ виконується $\lim\limits_{r \to +\infty} (\ln \ln \ln M(r))/\ln r < +\infty$, то із виконання умови /2/ випливає справедливість співвідношення /4/ при $r \to +\infty$ зовні деякої множини E такої, що $\lim\limits_{r \to +\infty} \left(\int\limits_{E \cap [1,r]} d \ln t\right)/\ln r = 0$.

1. Шеремета М.Н. Рост в углу целых функций, заданных лакунарными степенными рядами // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 3. С. 558-560. 2. Hayman W.K. Angular value distribution of power series with gaps // Proc. Lond. Math. Soc. 1972. Vol. 24. N 4. P. 590-624. 3. Macintyre A.J. Value distribution and power series with moderate gaps // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1952. Vol. 2. p. 286-296. 4. Fenton P.C. Some results of Wiman-Valyron type for integral functions of finite lower order // Ann. of Math. 1976. Vol. 103. N 2. p. 237-252.

Стаття надійшла до редколегії 04.02.86

УДК 519.21

Б.І.Копитко

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД СКЛЕЮВАННЯ ДВОХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В R^m

Нехай в областях $\mathcal{D}_1 = \{x : x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m, x_m < 0\}$ і $\mathcal{D}_2 = \{x : x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m, x_m > 0\}$ скінченномірного евклідового простору R^m $(m \geq 2)$ задані відповідно два дифузійні процеси з нульовими векторами переносу та постійними матрицями дифузії $B_1 = (b_{kj}^{(1)})$ і $B_2 = (b_{kj}^{(2)})$, елементи яких задовольняють умову

$$a)\ \lambda_1^{(i)} \sum_{j=1}^{m} x_j^2 \leq \sum_{k,j=1}^{m} b_{kj}^{(i)} x_k x_j \leq \lambda_2^{(i)} \sum_{j=1}^{m} x_j^2, \quad 0 < \lambda_1^{(i)} \leq \lambda_2^{(i)},$$

$$i = 1,2, \quad \forall x \in R^m, \quad b_{kj}^{(i)} = b_{jk}^{(i)}.$$

Нас цікавитимуть неперервні процеси Феллера в R^m такі, що в області $\mathcal{D}_i$, $i = 1,2$ вони суміщаються із заданим дифузійним процесом.

Для розв"язування сформульованої задачі використаємо методи теорії параболічних рівнянь з розривними коефіцієнтами. Шуканий клас процесів будуємо за допомогою півгрупи операторів T_t, $t > 0$, дія яких на довільну дійсну обмежену вимірну функцію $\varphi(x)$, $x \in R^m$ визначається формулою

$$T_t \varphi(x) = \int_{R^m} g_i(t, x-y) \varphi(y) dy + \int_0^t d\tau \int_{R^{m-1}} g_i(t-\tau, x'-y', x_m) V_i(\tau, y', \varphi) dy',$$

$$x = (x', x_m) \in \mathcal{D}_i, \quad i = 1,2, \qquad /1/$$

де $(t > 0,\ x,\ y \in R^m)$

$$g_i(t, x, y) = g_i(t, x-y) = (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} (\det B_i)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2t} (B_i^{-1}(y-x), y-x)\right\} -$$

фундаментальний розв"язок параболічного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m} b_{kj}^{(i)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} = 0, \qquad /2/$$

а V_1 і V_2 - невідомі функції, які визначаються з умов спряження на поверхні $R^{m-1} = \{x : x \in R^m, x_m = 0\}$:

$$
\begin{cases}
T_t\,\varphi(x',-0)=T_t\,\varphi(x',+0),\\
q_1\dfrac{\partial T_t\,\varphi(x',-0)}{\partial N_1}+q_2\dfrac{\partial T_t\,\varphi(x',+0)}{\partial N_2}=0,\ t>0,\ x'\in R^{m-1}.
\end{cases}
\qquad /3/
$$

Тут q_1 і q_2 - задані дійсні числа; N_i, $i=1,2$ - вектор конормалі. У нашому випадку $N_i=B_i\cdot\nu_{R^{m-1}}$, де $\nu=(0,\dots,0,1)$ - одиничний вектор нормалі до поверхні R^{m-1}.

З теорії параболічних рівнянь відомо, що у випадку, коли $\varphi(x)$ обмежена і неперервна на R^m, а $V_i(t,x',\varphi)$ обмежена при $t\geq 0$, $x'\in R^{m-1}$, то функція $T_t\,\varphi(x)$ задовольнятиме в області $t>0, x\in D_i$, $i=1,2$ рівняння /2/ і початкову умову

$$
\lim_{t\downarrow 0} T_t\,\varphi(x)=\varphi(x).
$$

Враховуючи співвідношення для $\dfrac{\partial T_t\,\varphi(x',\mp 0)}{\partial N_i}$, що випливають з формули про скачок конормальної похідної від потенціалу простого шару [3], із умов /3/ одержуємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду відносно невідомих V_1 і V_2:

$$
\int_0^t d\tau\int_{R^{m-1}}[q_1 g_2(t-\tau,x'-y',0)-q_2 g_1(t-\tau,x'-y',0)]\,V_i(\tau,y',\varphi)\,dy'=f_i(t,x'),
$$
$$
i=1,2, \qquad /4/
$$

де

$$
f_i(t,x')=q_{3-i}\,\Phi(t,x',\varphi)-\int_0^t d\tau\int_{R^{m-1}} g_{3-i}(t-\tau,x'-y',0)\,\Psi(\tau,y',\varphi)\,dy';
$$

$$
\Phi(t,x',\varphi)=\int_{R^m}[g_1(t,x'-y',y_m)-g_2(t,x'-y',y_m)]\,\varphi(y)\,dy;
$$

$$
\Psi(t,x',\varphi)=\int_{R^m}\Big[q_1\frac{\partial g_1(t,x'-y',y_m)}{\partial N_1}+q_2\frac{\partial g_2(t,x'-y',y_m)}{\partial N_2}\Big]\varphi(y)\,dy.
$$

Далі, ввівши позначення $\gamma_i=\dfrac{q_i}{(B_{mm}^{(3-i)})^{1/2}}$, $i=1,2$, припускаємо, що завжди виконується умова

$$\gamma_1^2 > \max\left(\gamma_2^2, \frac{\lambda_2^{(2)}}{\lambda_1^{(1)}} \gamma_2^2\right) \text{ або } \gamma_1^2 < \min\left(\gamma_2^2, \frac{\lambda_1^{(2)}}{\lambda_2^{(1)}} \gamma_2^2\right). \qquad /5/$$

Для перетворення системи рівнянь /4/ введемо оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(x',t)f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \sum_{\ell=1}^{2} \gamma_\ell \mu_\ell (x',t) \int_0^t d\tau \int_{R^{m-1}} G(t-\tau, x'-y') \times$$

$$\times \left(\mathcal{E}_{3-\ell}(y',\tau)f\right) dy', \; x' \in R^{m-1}, \; t > 0,$$

де μ_ℓ – рівномірно параболічний оператор,

$$\mu_\ell = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m-1} C_{kj}^{(\ell)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}$$

з коефіцієнтами

$$C_{kj}^{(\ell)} = \left(b_{kj}^{(\ell)} - \frac{b_{km}^{(\ell)} b_{jm}^{(\ell)}}{b_{mm}^{(\ell)}}\right), \; k,j = 1,2,\dots, m-1; \; \ell = 1,2;$$

$$\mathcal{E}_\ell (x',t) f = \mu_\ell (x',t) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \int_{R^{m-1}} G_\ell (t-\tau, x'-y') f(\tau, y') dy';$$

$G_\ell(t, x'-y')$ – фундаментальний розв"язок оператора μ_ℓ, $\ell = 1,2$;

$G(t, x'-y')$ – фундаментальний розв"язок рівномірно параболічного оператора μ,

$$\mu = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{m-1} C_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}, \; C_{kj} = \frac{1}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \left(\gamma_1^2 C_{kj}^{(1)} - \gamma_2^2 C_{kj}^{(2)}\right), \; k,j = 1,\dots, m-1.$$

Зауважимо, що рівномірна параболічність оператора μ випливає з умов /5/.

Застосовуючи $\mathcal{E}$ до обох частин системи /4/, одержуємо єдиний розв"язок в явному вигляді

$$V_i(t, x', \varphi) = \mathcal{E}(x',t) f_i, \; i = 1,2. \qquad /6/$$

Доведемо, якщо $\varphi(x) \in \mathcal{B}(R^m)$, де $\mathcal{B}(R^m)$ – банахів простір дійсних обмежених вимірних функцій з нормою $\|\varphi\| = \sup_{x \in R^m} |\varphi(x)|$, то функція $V_i(t, x', \varphi)$, $i = 1,2$ неперервна для $t > 0$, $x' \in R^{m-1}$ і допускає оцінку

$$|V_i(t, x', \varphi)| \le K_T \|\varphi\| \cdot t^{-1/2} \qquad /7/$$

в кожній області виду $t\in(0,T]$, $x'\in R^{m-1}$, K_T – деяка стала. Очевидно, доведення цього факту полягає лише у перевірці виконання нерівності /7/. Як випливає з теорії теплових потенціалів і представлення для функції $\mathcal{E}(x',t)f_i$, оцінку типу /7/ достатньо встановити для $\mathcal{E}_\ell(x',t)f_i$. При $t>0$ можна записати

$$\mathcal{E}_\ell(x',t)f_i=-\frac{1}{t^2}\Big[\int_0^t(t-\tau)^{1/2}d\tau\int_{R^{m-1}}G_\ell(t-\tau,x'-y')f_i(\tau,y')dy'+$$

$$+\int_0^t(t-\tau)^{-1/2}d\tau\int_{R^{m-1}}G_\ell(t-\tau,x'-y')\tau f_i(\tau,y')dy'\Big]+\frac{1}{t}\int_0^t d\tau\,\times$$

$$\times\int_{R^{m-1}}\mu_\ell(x',t)[(t-\tau)^{1/2}G_\ell(t-\tau,x'-y')]f_i(\tau,y')dy'+$$

$$+\frac{1}{t}\int_0^t(t-\tau)^{-1/2}d\tau\int_{R^{m-1}}G_\ell(t-\tau,x'-y')\mu_\ell(y',\tau)[\tau f_i(\tau,y')]dy'. \qquad /8/$$

Тоді необхідна оцінка для кожного з доданків співвідношення /8/, а отже, і для функції $\mathcal{E}_\ell(x',t)f_i$, випливає з оцінок для фундаментальних розв"язків параболічних рівнянь [3].

Відзначимо, що виконання нерівності /7/ забезпечує існування подвійного інтегралу в правій частині /1/.

Коли послідовність функцій $\varphi_n(x)$ з простору $\mathcal{B}(R^m)$ така, що $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ при кожному $x\in R^m$, коли $n\to\infty$ і $\sup_{n,x}|\varphi_n(x)|<\infty$, то неважко переконатися, що $\lim_{n\to\infty}V_i(t,x',\varphi_n)=V_i(t,x',\varphi)$ для всіх $t>0$, $x'\in R^{m-1}$, $i=1,2$, а отже $\lim_{n\to\infty}T_t\varphi_n(x)=T_t\varphi(x)$. Далі, якщо додатково припустити, що виконується умова

$$q_1\cdot q_2\le 0, \qquad /9/$$

то аналогічно, як і в праці [2], визначаємо, що сім"я операторів T_t, $t>0$ залишає конус невід"ємних функцій $\varphi(x)\in\mathcal{B}(R^m)$ інваріантним.

Врешті, зауваживши, що для функції $\varphi_0(y)\equiv 1$, $V_i(t,x',\varphi_0)\equiv\equiv 0$, $i=1,2$, а отже, $T_t\varphi_0(x)\equiv 1$, робимо висновок, що побудована нами півгрупа операторів T_t при виконанні умов /9/ визначає деякий марківський процес. Якщо позначити його ймовірність переходу через $P(t,x,dy)$, то можна записати

$$T_t\varphi(x)=\int_{R^m}P(t,x,dy)\varphi(y).$$

Підрахунок дифузійних коефіцієнтів для побудованого процесу за схемою праці [1] свідчить, що ці характеристики існують лише в узагальненому розумінні [4], тобто для довільної фінітної неперервної функції $\varphi(x),\ x\in R^m$ з дійсними значеннями справедливі співвідношення

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{R^m}\varphi(x)\Big[\frac{1}{t}\int_{R^m}(y-x;\theta)P(t,x,dy)\Big]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\big[(b^{(1)}_{mm})^{1/2}+(b^{(2)}_{mm})^{1/2}\big](q_1N_1+q_2N_2,\theta)}{q_2(b^{(2)}_{mm})^{1/2}-q_1(b^{(1)}_{mm})^{1/2}}\int_{R^{m-1}}\varphi(x',0)dx',$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\int_{R_m}\varphi(x)\Big[\frac{1}{t}\int_{R_m}(y-x,\theta)^2P(t,x,dy)\Big]dx=\int_{R^m}\varphi(x)(B(x)\theta,\theta)dx, \qquad /10/$$

яке б не було $\theta\in R^m$; $B(x)=B_i,\ x\in \mathcal{D}_i,\ i=1,2.$

Рівності /10/ означають, що для побудованого процесу з ймовірністю переходу $P(t,x,dy)$ матриця дифузії дорівнює $B(x)$ і вектор переносу

$$\frac{1}{2}\,\frac{\big[(b^{(1)}_{mm})^{1/2}+(b^{(2)}_{mm})^{1/2}\big](q_1N_1+q_2N_2)}{q_2(b^{(2)}_{mm})^{1/2}-q_1(b^{(1)}_{mm})^{1/2}}\,\delta_{R^{m-1}}(x),$$

де $\delta_{R^{m-1}}(x)$ – узагальнена функція, зосереджена на поверхні R^{m-1}. Крім цього, доведено, що траєкторії процесу можна вибрати неперервними. Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай в евклідовому просторі R^m задана додатно-визначена матричнозначна функція $B(x)=B_i,\ x\in\mathcal{D}_i,\ i=1,2,$ а параметри q_1 і q_2 із /2/ задовольняють умови /5/, /9/. Тоді півгрупа /1/, /6/ породжує клас неперервних процесів Феллера в R^m, ймовірність переходу яких задовольняє співвідношення /10/.

1. К о п ы т к о Б.И. Склеивание двух диффузионных процессов на плоскости // Некоторые вопросы теории случайных процессов. К., 1984. С. 48-64. 2. К о п ы т к о Б.И. О склеивании двух диффузионных процессов на прямой // Вероятностные методы бесконечномерного анализа. К., 1980. С. 84-101. 3. Л а д ы ж е н с -

к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
4. П о р т е н к о Н.И. Обобщенные диффузионные процессы. К., 1982.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.86

УДК 517.518.235

І.М.Колодій

ТЕОРЕМА ВКЛАДАННЯ ПРОСТОРУ $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$

Нехай $K_r = \{x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n;\ |x_i|<r,\ i=1,\dots,n\}$. Визначимо простори $\overset{0}{W}{}^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ та $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ як замикання просторів $\overset{0}{C}{}^\infty(K_r)$ та $C^\infty(K_r)$ відповідно, за нормою

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(r^{-n+p_i}\int_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}} + r^{-n}\int_{K_r}|u|dx.$$

У праці [1] дається елементарне доведення теореми про вкладання анізотропного простору $\overset{0}{W}{}^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$, коли $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$. Вперше цей результат наведено в праці [4], проте там помилково стверджувалось, що простір $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ при $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$ вкладається у той самий простір $L_p(K_r)$, що і простір $\overset{0}{W}{}^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$. Помилковість цього доведено в праці [2].

Простір $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ вкладається в простір $L_p(K_r)$, де $p=n(-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i})^{-1}$ при додатковій умові $\max_{i=1,\dots,n} p_i \le p$ [3]. Вибір області K_r не випадковий. А.Г.Корольов [3] на прикладі показав, що цей результат не існує для будь-яких областей з кусково-гладкою границею навіть при додатковій умові $\max_{1\le i\le n} p_i < p$.

Покажемо елементарне доведення вкладання простору $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ в $L_p(K_r)$ за умов $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$, $\max_{1\le i\le n} p_i<p$. Ідею цього доведення можна використати при доведенні різницевих аналогів теорем вкладання С.Л.Соболєва, що ми зробимо в наступній роботі.

Теорема. Нехай $U(x)\in W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_\tau)$. Тоді якщо

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1, \quad \max_{1\le i\le n} p_i < p = n\left(-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\right)^{-1},$$

то $U(x)\in L_{p_1}(K_\tau)$ і наявна оцінка

$$\left(\tau^{-n}\int_{K_\tau}|U|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\tau^{-n+p_i}\int_{K_\tau}|U_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}+\tau^{-n}\int_{K_\tau}|U|dx\right) \qquad /1/$$

з константою C, що залежить від $n, p_1,\dots,p_n$.

Доведення. Теорему достатньо довести для функцій із $C^\infty(K_\tau)$. Якщо $v(t)\in C^\infty[0,1]$, то $v(t)=\int_\tau^t v'(t)dt+v(\tau)$ для будь-яких $t,\tau\in[0,1]$. Використовуючи теорему про середнє значення, підберемо τ_1 так, щоб $v(\tau)=\int_0^1 v(t)\,dt$, тоді

$$|v(t)|\le\int_0^1|v'(t)|\,dt+\int_0^1|v(t)|\,dt,\quad t\in[0,1]. \qquad /2/$$

Приймемо $v=|U(x)|^{\alpha_i}\operatorname{sign}U(x), \alpha_i>1, i=1,\dots,n, x=(x_1,\dots,x_n)$.
Тоді

$$|U(x)|^{\alpha_i}\le\alpha_i\int_0^1|U(x)|^{\alpha_i-1}|U_{x_i}|dx_i+\int_0^1|U(x)|dx_i,\ i=1,\dots,n.$$

Перемножимо ці нерівності та піднесемо до степеня $\frac{1}{n-1}$:

$$U(x)^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n-1}}\le C\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1|U|^{\alpha_i-1}|U_{x_i}|dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}+\prod_{i=1}^{n}\left(\int_0^1|U|^{\alpha_i}dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}+\Sigma_1\right).$$

Знаком Σ_1 позначено суму добутків виду

$$\left(\int_0^1|U|^{\alpha_{i_1}-1}|U_{x_{i_1}}|dx_{i_1}\dots\int_0^1|U|^{\alpha_{i_k}-1}|U_{x_{i_k}}|dx_{i_k}\int_0^1|U|^{\alpha_{j_1}}dx_{j_1}\dots\int_0^1|U|^{\alpha_{j_{n-k}}}dx_{j_{n-k}}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Проінтегруємо останню оцінку послідовно по $x_1,x_2,\dots,x_n$ використовуючи на кожному кроці нерівність Гельдера:

$$\int_{K_1}|U(x)|^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}{n-1}}dx\le C\left(\prod_{i=1}^{n}\int_{K_1}|U|^{\alpha_i-1}|U_{x_i}|dx\right)^{\frac{1}{n-1}}+\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|U|^{\alpha_i}dx\right)^{\frac{1}{n-1}}+\Sigma_2\Big),$$

де Σ_2 – сума добутків виду

$$\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{i_1}-1}|u_{x_{i_1}}|dx\ldots\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{i_k}-1}|u_{x_{i_k}}|dx\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{j_1}}dx\ldots\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{j_{n-k}}}dx\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Піднесемо останню нерівність до степеня $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$ і одержимо

$$\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i}{n-1}}dx\Big)^{\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n\alpha_i}}\le C\Big(\prod_{i=1}^n\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i-1}|u_{x_i}|dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n\alpha_i}}+\prod_{i=1}^n\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i}dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n\alpha_i}}+\Sigma_3\Big), \quad /3/$$

де Σ_3 – сума добутків /їх 2^n штук/ виду

$$\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{i_1}-1}|u_{x_{i_1}}|dx\ldots\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{i_k}-1}|u_{x_{i_k}}|dx\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{j_1}}dx\ldots\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_{j_{n-k}}}dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n\alpha_i}}.$$

Оцінимо інтеграли, які стоять у правій частині /3/:

а) $$\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i-1}|u_{x_i}|dx\le\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{(\alpha_i-1)\frac{p_i}{p_i-1}}dx\Big)^{\frac{p_i-1}{p_i}}\Big(\int\limits_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Виберемо α_i так, щоб $(\alpha_i-1)\frac{p_i}{p_i-1}=\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i}{n-1}$. Звідси випливає, що

$$\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i}{n-1}=\frac{n}{-1+\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}}=p\,,\quad \alpha_i=1-\frac{p}{p_i}+p,$$

де $\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}>1$, $\max\limits_{1\le i\le n}p_i<p$. Тоді

$$\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i-1}|u_{x_i}|dx\le\Big(\int\limits_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}(\alpha_i-1)}\Big(\int\limits_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Отже,

$$\prod_{i=1}^n\Big(\int\limits_{K_1}|u|^{\alpha_i-1}|u_{x_i}|dx\Big)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n\alpha_i}}\le\Big(\int\limits_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i-n}{n}}\prod_{i=1}^n\Big(\int\limits_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}\cdot\frac{1}{\sum_{i=1}^n\alpha_i}}=$$

$$=\Big(\int\limits_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i-n}{\sum_{i=1}^n\alpha_i}}\Big(\prod_{i=1}^n\Big(\int\limits_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{\frac{1}{p_i}\frac{1}{n}}\Big)^{\frac{n}{\sum_{i=1}^n\alpha_i}}\le\varepsilon\Big(\int\limits_{K_1}|u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+C(\varepsilon)\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}\frac{1}{n}} \leqslant \varepsilon\left(\int_{K_1}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}};$$

б/ Числа α_i такі, що $1<\alpha_i<p$. Тому, використовуючи інтерполяційну нерівність, одержуємо

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u|^{\alpha_i}dx\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}} = \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u|^{\alpha_i}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_i}\cdot\frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u|^{\alpha_i}dx\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon n\left(\int_{K_1}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+n\cdot C(\varepsilon)\int_{K_1}|u|dx.$$

в/ Оцінюючи Σ_3 , розглянемо для простоти доданок

$$\left(\int_{K_1}|u|^{\alpha_1-1}|u_{x_1}|dx\ldots\int_{K_1}|u|^{\alpha_k-1}|u_{x_k}|dx\int_{K_1}|u|^{\alpha_{k+1}}dx\ldots\int_{K_1}|u|^{\alpha_n}dx\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\left(\int_{K_1}|u|^p dx\right)^{\frac{\alpha_1-1}{p}}\left(\int_{K_1}|u_{x_1}|^{p_1}dx\right)^{\frac{1}{p_1}}\ldots\left(\int_{K_1}|u|^p dx\right)^{\frac{\alpha_k-1}{p}}\left(\int_{K_1}|u_{x_k}|^{p_k}dx\right)^{\frac{1}{p_k}}\int_{K_1}|u|^{\alpha_{k+1}}dx\ldots\int_{K_1}|u|^{\alpha_n}dx\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}=$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}\left(\int_{K_1}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-k\right)}\int_{K_1}|u|^{\alpha_{k+1}}dx\ldots\int_{K_1}|u|^{\alpha_n}dx\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}\left(\int_{K_1}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i-k\right)}\left(\int_{K_1}|u|^p dx\right)^{\frac{\alpha_{k+1}}{p}}\ldots\left(\int_{K_1}|u|^p dx\right)^{\frac{\alpha_n}{p}}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}=$$

$$=C\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}\left(\int_{K_1}|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-k\right)}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}=$$

$$=C\left(\prod_{i=1}^{K}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}\cdot\frac{1}{K}}\right)^{\frac{K}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-K}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}}\leq$$

$$\leq\varepsilon\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}+C(\varepsilon)\prod_{i=1}^{K}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}\cdot\frac{1}{K}}\leq\varepsilon\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{K}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}\leq\varepsilon\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}+C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Враховуючи а-в і /3/ маємо

$$\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left(\varepsilon\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}+C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}+\varepsilon n\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}+\right.$$

$$\left.+nC(\varepsilon)\int_{K_1}|u|dx+\varepsilon 2^{n}\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}+2^{n}C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}\right).$$

Вибравши $\varepsilon>0$ достатньо малим, запишемо

$$\left(\int_{K_1}|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{K_1}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{\frac{1}{p_i}}+\int_{K_1}|u|dx\right).$$

Зробивши перетворення подібності, одержимо оцінку /1/ теореми.

1. К р у ж к о в С.Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Мат.сб. 1968. Т. 77. Вып. 3. С. 299-334. 2. К р у ж к о в С.Н., К о л о д и й И.М. К теоремам вложения анизотропных пространств Соболева // Укр.мат.журн. 1983. Т. 38. Вып. 2/230/. С. 207-208. 3. К р у ж к о в С.Н., К о р о л е в А.Г. К теории вложения анизотропных пространств // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 5. С. 1054-1057. 4. Л у В е н ь - т у а н. К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными показателями // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. 1961. № 7. С. 23-27.

Стаття надійшла до редколегії 18.02.86

УДК 519

І.М.Колодій, І.І.Верба

РІЗНИЦЕВИЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМИ ВКЛАДАННЯ СОБОЛЄВА ДЛЯ ПРОСТОРУ $\overset{\circ}{W}{}_p^1$

Наведено елементарне доведення відомого різницевого аналогу теореми С.Л.Соболєва [2] про вкладання простору $\overset{\circ}{W}{}_p^1(K_r)$ в $L_q(K_r)$, де $q=\frac{np}{n-p}$, $p<n$, $K_r=\{(x_1,\dots,x_n)\in E^n : 0\le x_i\le r,\ i=1,\dots,n\}$. Для доведення використовуємо різницевий аналог з праці [1].

Сторони n -мірного куба K_r розіб"ємо точками $0, \frac{r}{N}, \frac{2r}{N},\dots,\frac{(N-1)r}{N}, r$ на N частин кроком $h=\frac{r}{N}$ і побудуємо сітку з вузлами $\left(\frac{i_1 r}{N}, \frac{i_2 r}{N},\dots,\frac{i_n r}{N}\right)$, де $i_1, i_2,\dots,i_n$ змінюється від 0 до N, яку позначимо $K_{r,h}$. Вважаємо, що функція $u(x_1,\dots,x_n)$ задана на вузлах сітки. Її значення на вузлах $\left(\frac{i_1 r}{N},\dots,\frac{i_n r}{N}\right)$ позначимо через $u(i_1,\dots,i_n)$. Введемо різницеву похідну

$$u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)=\frac{u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)-u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)}{h}$$

і градієнт $u_x(i_1,\dots,i_n)=(u_{x_1}(i_1,\dots,i_n),\dots,u_{x_n}(i_1,\dots,i_n))$. Зрозуміло, що

$$|u_x(i_1,\dots,i_n)|=\left(\sum_{i=1}^{n}(u_{x_k}(i_1,\dots,i_n))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Дамо означення різницевих аналогів просторів $L_q(K_r)$ і $\overset{\circ}{W}{}_p^1(K_r)$, які позначимо $L_{q,h}(K_{r,h})$ і $\overset{\circ}{W}{}_{p,h}^1(K_{r,h})$.

Означення 1. Функція $u(i_1,\dots i_n)\in L_{q,h}(K_{r,h})$, якщо

$$\|u\|_{L_{q,h}(K_{r,h})}=\left(r^{-n}\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^q h^n\right)^{\frac{1}{q}}\le C=const$$

рівномірно по h.

Означення 2. Функція $u(i_1,\dots,i_n)$, яка обертається в нуль на границі K_r, належить простору $\overset{\circ}{W}{}_{p,h}^1(K_{r,h})$, коли

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_{p,h}^1(K_{r,h})}=\left(r^{-n+p}\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_x(i_1,\dots,i_n)|^p h^n\right)^{\frac{1}{p}}\le C=const$$

рівномірно по h.

Теорема. Якщо $u(i_1,\dots,i_n)\in \overset{\circ}{W}{}^1_{p,h}(K_{r,h})$ при $p<n$, то $u(i_1,\dots,i_n)\in L_{q,h}(K_{r,h})$, де $q=\frac{np}{n-p}$, і має місце оцінка

$$\|u\|_{L_{q,h}(K_{r,h})}\le C\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p,h}(K_{r,h})}.$$

Доведення. Теорему достатньо довести для куба K_1. Для функції однієї змінної на відрізку $[0,1]$, що обертається в нуль на кінцях відрізка, виконується очевидна рівність

$$y(i)=\sum_{k=0}^{i-1}\frac{y(k+1)-y(k)}{h}h=\sum_{k=0}^{i-1}y_x(k)h.$$

Тоді

$$|y(i)|\le\sum_{k=0}^{i-1}|y_x(k)|h\le\sum_{k=0}^{N-1}|y_x(k)|h=\sum_{i=0}^{N-1}|y_x(i)|h.$$

Аналогічно, для функції n змінних, що обертається в нуль на границі куба K_1, маємо

$$|y(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|\le\sum_{i_k=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|h$$

для будь-якого $k=1,2,\dots,n$, тобто по будь-якому напрямку $x_1,x_2,\dots,x_n$. Перемножимо ці оцінки і піднесемо до степеня $\frac{1}{n-1}$:

$$|y(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\frac{n}{n-1}}\le\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_k=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad /1/$$

Помножимо тепер нерівність /1/ на h. Просумуємо результат по першій змінній, тобто по i_1 від 0 до $N-1$ і застосуємо нерівність Гельдера для сум:

$$\sum_{i_1=0}^{N-1}|y(i_1,\dots,i_n)|^{\frac{n}{n-1}}h\le\sum_{i_1=0}^{N-1}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_k=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\dots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}h=$$

$$=\left(\sum_{i_1=0}^{N-1}|y_{x_1}(i_1,\dots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}\sum_{i_1=0}^{N-1}\prod_{k=2}^{n}\left(\sum_{i_k=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\dots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}h\le$$

$$\le\left(\sum_{i_1=0}^{N-1}|y_{x_1}(i_1,\dots,i_n)|h\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{k=2}^{n}\left(\sum_{i_1=0}^{N-1}\sum_{i_k=0}^{N-1}|y_{x_k}(i_1,\dots,i_n)|h^2\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Повторивши процедуру по решті змінних $i_2, \dots, i_n$, одержимо

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} |y(i_1,\dots,i_n)|^{\frac{n}{n-1}} h^n \le \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} |y_{x_k}(i_1,\dots,i_n)|h^n\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

де $\sum\limits_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}$ означає n -кратне сумування $\sum\limits_{i_1=0}^{N-1}\sum\limits_{i_2=0}^{N-1}\dots\sum\limits_{i_n=0}^{N-1}$, тобто аналог n -кратного інтегрування. Піднесемо обидві частини останньої нерівності до степеня $\frac{n-1}{n}$:

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} |y(i_1,\dots,i_n)|^{\frac{n}{n-1}} h^n\right)^{\frac{n-1}{n}} \le \prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1} |y_{x_k}(i_1,\dots,i_n)|h^n\right)^{\frac{1}{n}} \qquad /2/$$

Підставимо тепер в /2/ степеневу функцію $y=|u|^{\alpha}$. Для цього потрібно вміти обчислювати різницеву похідну від функції $|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|$ по x_k. Нехай $f(S)$ – диференційована по S функція. За теоремою Лагранжа

$$f(S)-f(0)=f'(\theta S)S, \quad 0<\theta<1.$$

Приймемо $f(S)=(S+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha}$. Тоді

$$(S+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha}-(|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha}=\alpha(\theta S+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha-1}S.$$

Виберемо $S=|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|$. Тоді з останньої рівності матимемо

$$|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha}-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha}=\alpha(\theta|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|+$$
$$+(1-\theta)|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|)^{\alpha-1}(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|).$$

Розділимо обидві частини цієї рівності на h і результат оцінимо по модулю:

$$\left|(|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha})_{x_k}\right|=\alpha\left(\theta|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|+(1-\theta)|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|\right)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\left|\frac{|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|-|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|}{h}\right|\le\alpha\left(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|+\right.$$
$$\left.+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)-u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|}{h}\le$$

$$\leq C\left(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha-1}\right)|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|.$$

Таким чином,

$$\left(|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha}\right)_{x_k}\leq C\left(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha-1}\right)\times$$
$$\times|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|. \qquad /3/$$

Підставимо тепер в /2/ функцію $y=|u|^{\alpha}=|u(i_1,\dots,i_n)|^{\alpha}$, $\alpha\geq 1$, де $u(i_1,\dots,i_n)$ дорівнює нулю на границі K_1, і скористаємось оцінкою /3/ та нерівністю Гельдера. Тоді

$$\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^{\alpha\frac{n}{n-1}}h^n\right)^{\frac{n-1}{n}}\leq\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\left|(|u|^{\alpha})_{x_k}\right|h^n\right)^{\frac{1}{n}}\leq$$

$$\leq C\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\left(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha-1}\right)|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|h^n\right)^{\frac{1}{n}}\leq$$

$$\leq C\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\left(|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{\alpha-1}+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{\alpha-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}h^n\right)^{\frac{p-1}{p}\frac{1}{n}}\times$$

$$\times\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_{x_k}(i_1,\dots,i_n)|^{p}h^n\right)^{\frac{1}{p}\frac{1}{n}}\leq C\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}\left(|u(i_1,\dots,i_{k+1}+1,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}\right)h^n\right)^{\frac{p-1}{p}\frac{1}{n}}\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u_{x_k}(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{p}h^n\right)^{\frac{1}{p}\frac{1}{n}}. \qquad /4/$$

Враховуючи, що функція $u(i_1,\dots,i_n)$ обертається в нуль на границі куба K_1, маємо

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_k+1,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}=\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_k,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}.$$

Тоді з нерівності /4/ випливає оцінка

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{N-1}|u(i_1,\dots,i_n)|^{\alpha\frac{n}{n-1}}h^n)^{\frac{n-1}{n}}\leq C\left(\sum_{i_1,\dots,i_n=0}|u(i_1,\dots,i_n)|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-1}}h^n\right)^{\frac{p-1}{p}}\times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^p h^n \right)^{\frac{1}{p}\frac{1}{n}}.$$

Підберемо число α так, щоб $\alpha \frac{n}{n-1} = (\alpha-1)\frac{p}{p-1}$. Тоді

$$\alpha = \frac{n-1}{n-p}\cdot p, \quad \alpha \frac{n}{n-1} = \frac{np}{n-p}.$$

Зауважимо, що $p < n$. Врахувавши це в останній нерівності, одержуємо

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_n)|^{\frac{np}{n-p}} h^n \right)^{\frac{n-p}{np}} \le C \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^p h^n \right)^{\frac{1}{p}\frac{1}{n}} \le$$

$$\le C \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_{x_k}(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)|^p h^n \right)^{\frac{1}{p}} \le C \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_x(i_1,\ldots,i_n)|^p h^n \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $|u_x(i_1,\ldots,i_n)| = \left(\sum_{k=1}^{n} |u_{x_k}(i_1,\ldots,i_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Таким чином, при $p < n$ для функції $u(i_1,\ldots,i_n)$, що обертається в нуль на границі куба K_1, доведено оцінку

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_n)|^{\frac{np}{n-p}} h^n \right)^{\frac{n-p}{np}} \le C \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_x(i_1,\ldots,i_n)|^p h^n \right)^{\frac{1}{p}}$$

Для куба K_τ ця оцінка матиме вигляд

$$\left(\tau^{-n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u(i_1,\ldots,i_n)|^{\frac{np}{n-p}} h^n \right)^{\frac{n-p}{np}} \le C \left(\tau^{-n+p} \sum_{i_1,\ldots,i_n=0}^{N-1} |u_x(i_1,\ldots,i_n)|^p h^n \right)^{\frac{1}{p}},$$

якщо зробити перетворення подібності $x = \tau y$.

1. К о л о д і й І.М. Теорема вкладання простору $W^1_{p_1,\ldots,p_n}(K_\tau)$. У цьому ж Віснику. 2. С о б о л е в С.Л. Об оценках некоторых сумм для функций, заданных на сетке // Изв. АН СССР. Сер.мат. 1940. Т. 4. № 1. С. 5-16.

Стаття надійшла до редколегії 09.08.86

З М І С Т

УДК 539.377

Об оптимизации термоупругого состояния изотропных оболочек при моментных ограничениях на температуру. Бугрий Н.И. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 3-6. - На укр.яз.

Рассмотрена задача оптимизации термоупругого состояния свободных от внешней силовой нагрузки изотропных оболочек постоянной толщины с учетом интегральных ограничений на искомое температурное поле. На основе вариационных принципов термоупругости оболочек доказывается единственность решения и предлагается способ построения приближенного двухмерного аналога рассматриваемой задачи оптимизации. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.946

Задача Коши для уравнения типа колебания пластинки с неотрицательной характеристической формой. Лавренюк С.П. // Вестн. Львов. ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 7-9. - На укр.яз.

Для уравнения

$$u_{tt}+\sum_{1\leq|\alpha|=|\beta|\leq 2} D_x^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(t)D_x^{\beta}u)+c_0(x,t)u_t+c_1(x,t)u=f(x,t)$$

рассмотрена задача Коши. Получены условия существования и единственности гладкого решения в случае, когда уравнение вырождается на плоскости начальных данных.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

О сопряжении двух параболических систем. Иванчов Н.И. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 10-14. - На укр.яз.

Установлено существование решения задачи сопряжения двух параболических систем с постоянными коэффициентами путем сведения ее к системе интегродифференциальных уравнений.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

Сингулярно возмущенная задача для интегродифференциального уравнения в частных производных. Цымбал В.Н. // Вестн. Львов.ун-та. Сер. мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 14-18. - На укр.яз.

Рассмотрена смешанная задача для уравнения в частных производных первого порядка с вольтерровой добавкой, малый параметр входит множителем при производных. Методом погранслоя с использованием функций углового погранслоя построено асимптотическое разложение решения этой задачи по степеням малого параметра.
Библиогр.: 11 назв.

УДК 517.946

Задача Гурса для сингулярно возмущенной слабо связанной системы уравнений гиперболического типа. Флюд В.М. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 18-21. - На укр.яз.

Для решения сингулярно возмущенной слабо связанной системы гиперболических уравнений второго порядка с данными на характеристиках построено асимптотическое разложение произвольного порядка. Имеет место полное вырождение системы. Доказана асимптотическая корректность разложения.
Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.956

Приближенное решение первой смешанной задачи для линейной системы уравнений параболического типа. Костенко В.Г., Губаль Л.Е. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 22-27. - На укр.яз.

Найдены в явном виде формулы приближенного решения первой смешанной задачи для линейной системы параболических уравнений с постоянными коэффициентами, эффективно реализуемые на ЭВМ.

УДК 517.946

Об одной нелокальной задаче типа Дарбу для строго гиперболического уравнения произвольного порядка. Кирилич В.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 27-31. - На укр.яз.

Предлагается схема редукции нелокальных задач типа Дарбу для строго гиперболического уравнения произвольного порядка с двумя независимыми переменными к соответствующим задачам для линейных систем первого порядка.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.512

О второй вариации одного функционала обратной задачи логарифмического потенциала. Михалюк М.И., Парасюк Е.Н. // Вестн. Львов. ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 32-34. - На укр.яз.

Получена локальная единственность решения обратной задачи логарифмического потенциала для постоянной плотности в одном классе потенциалов.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.512

О единственности решения обратной задачи логарифмического потенциала для постоянной плотности. Михалюк М.И. // Вестн. Львов. ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов.- С. 35-37. - На укр.яз.

Получены условия существования единственного решения обратной задачи для потенциала специального вида и плотности распределения масс, равной единице.

УДК 517.53

Сферическая производная целой функции нулевого порядка. Заболоцкий Н.В. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 37-39. - На укр.яз.

Пусть f - целая функция, $\mathcal{M}(r,f)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$, $\mu(r,f)=\max\{|f'(z)|/(1+|f(z)|^2):|z|=r\}$, $\mathcal{E}(r)=\sup\{d\ln\ln\mathcal{M}(t,f)/d\ln t: t\geq r\}$. Если $\ln\mathcal{M}(r,f)\sim\ln\mathcal{M}(2r,f)$, $r\to\infty$ и $0<\delta<1$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{(\mathcal{E}(r))^{1-\delta}\, r\,\mu(r,f)}{\ln\mathcal{M}(r,f)}=\infty.$$

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.53

О целых рядах Дирихле конечного нижнего R -порядка. Хомяк М.М., Шеремета М.Н. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 39-41. - На укр.яз.

Доказано, что если целая функция F конечного нижнего R -порядка представлена абсолютно сходящимся во всей плоскости рядом Дирихле с показателями, удовлетворяющими условиям $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq h>0$ $(n\geq 0)$ и $n/\lambda_n\to 0$ $(n\to\infty)$, то

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty}\frac{\ln^+|F(\sigma)|}{\ln M(\sigma,F)}=1.$$

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.948

О дискретном спектре слабо возмущенного оператора умножения. Микитюк Я.В. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 41-43. - На укр.яз.

Для самосопряженных операторов, получающихся в результате возмущения оператора умножения на независимое переменное, получена оценка числа собственных значений в терминах гладкости и размерности возмущения.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.948

Оператор, сопряженный к родственному полуторалинейной форме. Федик М.Н. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 43-46. - На укр.яз.

Рассматриваются операторы, порождаемые полуторалинейными формами в оснащенных гильбертовых пространствах. В терминах прямых разложений описаны области определения таких операторов. Исходя из этого, доказана теорема об одновременной самосопряженности /при некотором дополнительном условии/ оператора, индуцированного формой, и родственного этой форме оператора.
Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.958 : 532.529

Уравнения диффузионной модели движения двухкомпонентной смеси. Дронюк И.М. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып.28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 46-50. . - На укр.яз.

Исходя из уравнений движения реагирующей двухкомпонентной смеси, выведена соответствующая диффузионная модель применительно к процессу гранулирования.
Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.968

Ветвление решений одного нелинейного интегрального уравнения теории синтеза антенн. Гись О.М. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат.- 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 50-56. - На укр.яз.

Исследуются особые неаналитические случаи ветвления первичных решений нелинейного интегрального уравнения в задаче синтеза линейных антенн по заданной амплитудной диаграмме направленности.
Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.014

Построение решения задачи оптимизации напряженного состояния свариваемых конических оболочек. Васюник А.И. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 56-60. - На укр.яз.

На основании минимизации функционала энергии формоизменений построена система расчетных уравнений, описывающая оптимальное упруго-деформированное состояние свариваемой по кольцу конической оболочки.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.946

Полная интегрируемость системы типа Тюринга-Боголюбова /мл./. Филь Б.Н. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 61-64. - На укр.яз.

Рассмотрено уравнение $\psi_{xt} = 2i|\psi|^2\psi_x - \psi$. Получены система законов сохранения, рекурсионный оператор, операторы, факторизующие рекурсионный. Доказана бигамильтоновость.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 515.12 + 512.58

Группы автоморфизмов и факторизация нормальных функторов. Заричный М.М. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 64-67. - На укр.яз.

Определяется понятие фактор-функтора нормального функтора, действующего на категории компактов, по компактной подгруппе группы автоморфизмов и устанавливается нормальность этого фактор-функтора.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 539.377

Температурные деформации в пластинке при зависимом от координаты коэффициенте теплоотдачи с краевой поверхности. Дидык В.З., Ковальчук Б.В., Шилипович А.И. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 68-74. . - На укр.яз.

Определены температурные деформации в нагреваемой по узкой области краевой поверхности полубесконечной пластинке подвижной внешней средой. Рассмотрены случаи смешанных граничных условий первого-третьего рода.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 519.21

Случайная континуальная амплификация. Квит И.Д., Косарчин В.Н. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 75-79. - На укр.яз.

Указываются достаточные условия существования континуальной амплификации, случайной амплификации и случайной континуальной амплификации. Формулы нахождения соответствующих амплификаций при заданных образующей плотности и управляющем распределении иллюстрируются примерами.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.535.4

Предположение Макинтайра об отсутствии конечных асимптотических значений у целой функции с лакунами Фейера. Скаскив О.Б. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 80-81. На укр.яз.

Доказано, что условие $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} < +\infty$ достаточно для отсутствия конечных асимптотических значений у целой функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{k_n}$ с условием на рост $\ln\ln\ln \max\{|f(z)| : |z|=r\} = o(\ln r)$ $(r \to +\infty)$.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 519.21

Аналитический метод склеивания двух диффузионных процессов с постоянными коэффициентами в R^m . Копытко Б.И. // Вестн. Львов. ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 82-87. На укр.яз.

Рассматривается задача о склеивании двух диффузионных процессов с постоянными коэффициентами, заданных в полуограниченных областях конечномерного евклидового пространства, которая решается с помощью исследования задачи Коши для параболического уравнения с разрывными коэффициентами.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.518.235

Теорема вложения пространства $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$. Колодий И.М. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 87-91. На укр.яз.

Приводится элементарное доказательство вложения пространства $W^1_{p_1,\dots,p_n}(K_r)$ в $L_p(K_r)$ при условиях $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$, $\max_{1\le i\le n} p_i<p=\frac{n}{-1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}}$, где $K_r=\{x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n: |x_i|<r\ i=1,\dots,n\}$.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 519

Разностный аналог теоремы вложения Соболева для пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_p$. Колодий Н.М., Верба И.И. // Вестн. Львов.ун-та. Сер.мех.-мат. - 1987. - Вып. 28: Вопросы математического моделирования физико-механических процессов. - С. 92-96. На укр.яз.

Доказана теорема вложения пространств $\overset{\circ}{W}{}^1_p$ и W^1_p в L_q . Приведено новое элементарное доказательство теорем вложения Соболева.

Библиогр.: 2 назв.

Сборник научных трудов

Министерство высшего и среднего
специального образования УССР

Вестник Львовского университета
Серия механико-математическая
Издается с 1965 г.

Вып. 28

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Львов. Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения "Вища школа"

Адрес редакционной коллегии:
290000 Львов-центр, ул.Университетская, 1. Университет,
кафедра дифференциальных уравнений

Львовская областная книжная типография
290000 Львов, ул.Стефаника, 11.

/На украинском языке/

Редактор В.В.В о й т о в и ч
Художній редактор С.В.К о п о т ю к
Технічний редактор І.Г.Ф е д а с
Коректор С.Т.Б о й к о

Н/К

Підп. до друку 17.02.87. БГ 01564. Формат 60х84/16. Папір офс. Офс.друк. Умовн.друк.арк. 6,28. Умовн.фарб.-відб. 6,51. Обл.-вид.арк. 5,4. Тираж 600 прим. Вид. № 1662. Зам. 2729. Ціна 80 коп.
Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня.
290000 Львів, вул.Стефаника, 11.

80 к.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1987, вип. 28, 1—108.