УДК 519.95

М.Я. Бартіш

ПРО ОДИН КЛАС МЕТОДІВ ТИПУ НЬЮТОНА РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

Розглянемо задачу

$$f(x) \to \min , \quad x \in E^n , \qquad /1/$$

де E^n – n – мірний евклідовий простір.

Для розв"язування задачі /1/ у випадку "доброго" початкового наближення ефективно використовують метод Ньютона /1/ або його модифікації. Розглянемо деяку нову модифікацію методу Ньютона з прискоренням швидкості збіжності. Нехай деяка послідовність $\{ x_n \}$, визначена за формулою

$$x_{n+1} = \Phi (x_n) , \quad n = 0,1,\ldots \qquad /2/$$

збігається до x_* – розв"язку задачі /1/ зі швидкістю $\tau \geq 1$, тобто

$$\| \Phi (x) - x_* \| \leq K \| x - x_* \|^{\tau} , \qquad /3/$$

причому $K \| x - x_* \|^{\tau - 1} < 1$

Розглянемо ітераційну формулу

$$x_{n+1} = x_n - \left[f''\left(\frac{x_n + \Phi(x_n)}{2} \right) \right]^{-1} f'(x_n) , \quad n = 0,1,\ldots \qquad /4/$$

Для $\{ x_n \}$, визначеної за /4/, наявна така теорема.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови

1/ для $x \in \Omega_0 = \{ x / x \in E^n , f(x) \leq f(x_0) \}$

$$m \| y \|^2 \leq (f''(x) y , y) \leq M \| y \|^2 , \quad m > 0 , y \in E^n ;$$

2/ для $x , y \in \Omega_0$

$$\| f'''(x) \| \leq N_3$$

$$\| f'''(x) - f'''(y) \| \leq N_4 \| x - y \|^{\tau - 1} , 1 \leq \tau \leq 2 ;$$

3/ початкове наближення x_0 вибране так, що виконується

$$\| f'(x_0) \| \leq \eta_0 , \quad q^{\tau} = \frac{\Gamma}{m} \left(\frac{\eta_0}{m} \right)^{\tau} < 1,$$

де

$$\gamma = \left(N_3 K + \frac{N_4}{2^{\tilde{\iota}} \cdot \tilde{\iota}(\tilde{\iota}+1)} \left(1 + K\left(\frac{\tilde{\iota}_0}{m}\right)^{\tilde{\iota}-1}\right)^{1+\tilde{\iota}} \right) .$$

Тоді $\{x_n\}$, визначена за /4/, збігається до розв"язку рівняння /1/, і наявна оцінка

$$\| x_n - x_* \| \le q^{(\tilde{\iota}+1)^n - 1} \| x_0 - x_* \| .$$

Доведення. З умови І випливає обмеженість функції $f(x)$ знизу в області Ω_0 , а також єдиність точки мінімума, причому для довільної точки $x \in \Omega_0$ норма матриці $(f''(x))^{-1}$ обмежена. Тепер можна отримати оцінки швидкості збіжності методу /4/. Згідно з розкладом оператора в ряд Тейлора маємо

$$\| x_{K+1} - x_* \| \le \frac{1}{m} \Big\{ N_3 \| x_K - x_* \| \, \| \Phi(x_K) - x_* \| + \frac{N_4}{\tilde{\iota}(\tilde{\iota}+1) 2^{\tilde{\iota}+1}} \times$$

$$\times \left[\| x_K - \Phi(x_K) \|^{1+\tilde{\iota}} + \| 2x_* - x_K - \Phi(x_K) \|^{1+\tilde{\iota}} \right] \Big\} \le \frac{\gamma}{m} \| x_K - x_* \|^{1+\tilde{\iota}} .$$

З останньої оцінки отримуємо

$$\| x_1 - x_0 \| \le \frac{\gamma}{m} \| x_0 - x_* \|^{1+\tilde{\iota}} \le q^{\tilde{\iota}} \| x_0 - x_* \|$$

і відповідно

$$\| x_{K+1} - x_* \| \le \frac{\gamma}{m} \| x_K - x_* \|^{1+\tilde{\iota}} \le q^{(1+\tilde{\iota})^{K+1} - 1} \| x_0 - x_* \| . \qquad /5/$$

Теорема доведена.

У випадку $\tilde{\iota}$ = I умова 2 теореми послаблюється, а саме: для доведення квадратичної збіжності /2 = I + $\tilde{\iota}$ / потрібно, щоб $f''(x)$ задовольняло умову Ліпшица. При виконанні відповідних умов для $\{x_n\}$, отриманої за формулою /4/ / $\tilde{\iota}$ = I/, наявне співвідношення

$$\frac{\| x_n - x_* \|}{\| u_n - x_* \|} \le C q_1^{2^n} ,$$

де $q_1 <$ I, $C = const < \infty$, $\{u_n\}$ - отримане за класичним методом Ньютона, причому $u_0 = x_0$.

Відзначимо, Φ на практиці можна вибирати так, щоб трудність виконання однієї ітерації за /4/ небагато перевищувала трудність виконання однієї ітерації за класичним методом Ньютона / I /. Тоді кінцевий результат отримаємо за менше число обчислень.

Як випливає з теореми, під час реалізації методу /4/ стикаємося з труднощами у виборі "доброго" початкового наближення.

Тому на практиці доцільно використовувати певну модифікацію названого методу. Досить ефективним виявився процес виду:

$$u_n = x_n - \alpha_n \left[f''\left(\frac{x_n + \varphi(x_n)}{2}\right)\right]^{-1} f'(x_n);$$

$$x_{n+1} = \frac{u_n + \varphi(x_n)}{2} + \operatorname{sign}\left(f(x_n) - f(\varphi(x_n))\right) \frac{u_n - \varphi(x_n)}{2}(1 - \beta_n), \qquad /6/$$

$$n = 0, 1, \ldots,$$

де параметри $0 < \alpha_n \leq 1$, $\beta_n \geq 0$ вибирають з умов мінімума функції $f(x)$ у відповідному напрямку, аналогічно як це зроблено у методі Ньютона з регулюванням кроку. Перша формула у /6/ є не що інше як метод Ньютона з прискоренням швидкості збіжності та регулюванням кроку, а друга формула в /6/ досить ефективно працює у випадку функції типу "яру" / 2 /.

1. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., 1975. 2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.87

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ LDL^T-РОЗКЛАДУ ХОЛЕСЬКОГО

Нехай $x \in R^n$, де R^n – n-мірний евклідів простір. Опишемо чисельний метод для розв"язування загальної задачі нелінійного програмування :

$$\min_x \{ f_0(x) : f_i(x) \leq 0,\ i \in J = \{1, 2, \ldots, m\}\}. \qquad /1/$$

Тут $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ – неперервно диференційовані функції.

Поставимо у відповідність точці x задачу квадратичного програмування

$$\min_p \{ \langle f_0'(x), p\rangle + \frac{1}{2}\langle p, Ap\rangle : \langle f_i'(x), p\rangle + f_i(x) \leq 0,\ i \in J_\delta(x)\}, \qquad /2/$$

де A – симетрична додатно визначена матриця,

$J_\delta(x) = \{ i \in J : f_i(x) \geq F(x) - \delta\}$, $\delta > 0$,

$F(x) = \max\{0, f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$,

а $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – скалярний добуток векторів.