Тому на практиці доцільно використовувати певну модифікацію названого методу. Досить ефективним виявився процес виду:

$$u_n = x_n - \alpha_n \left[f''\left(\frac{x_n + \varphi(x_n)}{2} \right) \right]^{-1} f'(x_n);$$

$$x_{n+1} = \frac{u_n + \varphi(x_n)}{2} + \operatorname{sign}(f(x_n) - f(\varphi(x_n))) \frac{u_n - \varphi(x_n)}{2} (1 - \beta_n), \quad /6/$$

$$n = 0, 1, \ldots,$$

де параметри $0 < \alpha_n \leq 1$, $\beta_n \geq 0$ вибирають з умов мінімума функції $f(x)$ у відповідному напрямку, аналогічно як це зроблено у методі Ньютона з регулюванням кроку. Перша формула у /6/ є не що інше як метод Ньютона з прискоренням швидкості збіжності та регулюванням кроку, а друга формула в /6/ досить ефективно працює у випадку функції типу "яру" / 2 /.

1. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., 1975. 2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.87

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ LDL^T-РОЗКЛАДУ ХОЛЕСЬКОГО

Нехай $x \in R^n$, де R^n – n-мірний евклідів простір. Опишемо чисельний метод для розв"язування загальної задачі нелінійного програмування :

$$\min_x \{ f_0(x) : f_i(x) \leq 0, i \in J = \{1, 2, \ldots, m\} \}. \quad /1/$$

Тут $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ – неперервно диференційовані функції.

Поставимо у відповідність точці x задачу квадратичного програмування

$$\min_p \{ \langle f_0'(x), p \rangle + \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle : \langle f_i'(x), p \rangle + f_i(x) \leq 0, i \in J_\delta(x) \}, \quad /2/$$

де A – симетрична додатно визначена матриця,

$$J_\delta(x) = \{ i \in J : f_i(x) \geq F(x) - \delta \}, \quad \delta > 0,$$

$$F(x) = \max \{ 0, f_1(x), \ldots, f_m(x) \},$$

а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток векторів.

Розв"язок задачі /2/ і її множники Лагранжа / I / позначимо відповідно через $p(x)$ і $u^i(x)$, $i \in J_\delta(x)$.

Перейдемо до побудови алгоритму. Матрицю A в задачі /2/ перераховуємо під час роботи алгоритму наступним чином. Нехай відома додатно визначена симетрична матриця A_K. Використовуючи довільну квазіньютонівську формулу / 2 /, на K-й ітерації перераховуємо матрицю $\bar{A}_{K+1}$:

$$\bar{A}_{K+1} = A_K + B_K . \qquad /3/$$

Симетрична матриця B_K малого рангу визначає конкретний тип квазіньютонівського перерахунку.

З допомогою модифікованого LDL^T-розкладу Холеського / 2 / будуємо додатно визначену матрицю

$$A_{K+1} = L_{K+1} D_{K+1} L^T_{K+1} = \bar{A}_{K+1} + E_{K+1} , \qquad /4/$$

де L_{K+1} – одинична нижня трикутна матриця; D_{K+1} – додатна діагональна матриця; E_{K+1} – деяка матриця, яка дорівнює нульовій матриці у випадку, якщо $\bar{A}_{K+1}$ – суттєво додатно визначена. Через T позначено транспонування матриці.

Нехай обрані / I / числа $N > 0$, $S > 0$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $c_0 > 0$, $0 < \gamma <$ I і початкове наближення x_0. Приймемо $A_0 = I_n$ (I_n – одинична матриця порядку n /.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка x_K, матриця A_K і число c_K вже побудовані.

I. Розв"язуючи задачу /2/ при $x = x_K$, $A = A_K$, обчислити $p_K = p(x_K)$, $u^i(x_K)$, $i \in J_\delta(x_K)$. Прийняти $u^i(x_K) = 0$ для $i \notin J(x_K)$.

2. Якщо $\| p_K \| > c_K$ або $f_0(x_K + p_K) + NF(x_K + p_K) > f_0(x_0) + NF(x_0)$, то прийняти $c_{K+1} = c_K$ і перейти до кроку 3. Інакше прийняти $x_{K+1} = x_K + p_K$, $c_{K+1} = \gamma \| p_K \|$ і перейти до кроку 4.

3. Починаючи з α = I, дробити його шляхом ділення навпіл до першого виконання нерівності

$$f_0(x_K + \alpha p_K) + NF(x_K + \alpha p_K) \le f_0(x_K) + NF(x_K) - \alpha \varepsilon \langle p_K , A_K p_K \rangle .$$

Прийняти $x_{K+1} = x_K + \alpha p_K$.

4. Перерахувати матрицю A_{K+1} за формулами /3/–/4/. Якщо $\max\limits_i a^i_{K+1} / \min\limits_i d^i_{K+1} \le S$, то перейти до кроку I / a^i_{K+1} і d^i_{K+1} – i-ті діагональні елементи матриць A_{K+1} і D_{K+1} /. Інакше прийняти $A_{K+1} = I_n$ і перейти до кроку I.

Процес обчислень припинити, якщо $\| p_K \| \le \omega$, де ω – задана точність.

Позначимо $L(x, u) = f_0(x) + \sum\limits_{i \in J_\delta(x)} u^i(x) f_i(x)$.

Достатні умови збіжності алгоритму дає наступна теорема.

Теорема. Нехай виконуються такі умови:

I/ множина $\Omega = \{x : f_0(x) + NF(x) \le f_0(x_0) + NF(x_0)\}$ обмежена;

2/ градієнти функцій $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ в Ω задовольняють умову Ліпшиця;

3/ існує розв"язок задачі /2/ при довільному $x \in \Omega$, причому $\sum\limits_{i \in J_\delta(x)} u^i(x) \le N$.

Тоді $p(x_k) \to 0$, $F(x_k) \to 0$ при $k \to \infty$ і в довільній граничній точці послідовності $\{x_k\}$ задовольняються необхідні умови екстремума для задачі /I/.

Якщо ж, крім цього, функції $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ двічі неперервно диференційовані в Ω, x_* - єдина точка з Ω, в якій виконані необхідні умови екстремума, і

4/ градієнти $f_i'(x)$, $i \in J_* = \{i \in J : f_i(x_*) = 0\}$ лінійно незалежні, $u_*^i = u^i(x_*) > 0$, $i \in J_*$;

5/ $<L''_{xx}(x_*, u_*)p, p> > 0$ для всіх p, які задовольняють рівностям $<f_i'(x_*), p> = 0$, $i \in J_*$, причому матриця $L''_{xx}(x_*, u_*)$ невироджена;

6/ $\| [A_k - L''_{xx}(x_*, u_*)] p_k \| \le \mu(x_k) \| p_k \|$,

$$\mu(x_k) > 0 \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{і} \quad \lim_{x \to x_*} \mu(x) = 0 ,$$

то послідовність $\{x_k\}$ збігається до x_* надлінійно.

При практичній реалізації описаного алгоритму доцільно замість /2/ розв"язувати двоїсту до неї задачу

$$\min_{u \ge 0} \{ \tfrac{1}{2} < Cu, u > + < b, u > \} , \qquad /5/$$

де u - вектор розмірності $|J_\delta(x)|$; C - симетрична матриця, яка складається з елементів $\{< R^{-1} f_i'(x), R^{-1} f_j'(x) >\}$, $i, j \in J_\delta(x)$; $R = LD^{1/2}$ - нижня трикутна матриця, а i -та компонента вектора b дорівнює $< R^{-1} f_0'(x), R^{-1} f_i'(x) > - f_i(x)$, $i \in J_\delta(x)$.

Задачу /5/ зручно розв"язувати методом спряжених напрямків / I /. У результаті розв"язування отримуємо множники Лагранжа $u^i(x)$, а вектор $p(x)$ - розв"язок задачі /2/ - обчислюється за формулою

$$p(x) = -R^{-1T} R^{-1} [f_0'(x) + \sum_{i \in J_\delta(x)} u^i(x) f_i'(x)] .$$

Відзначимо, що при використанні задачі /5/ в алгоритмі необхідні лише значення діагональних елементів матриці A_k. Тому доцільно замість обчислення матриці A_k з наступним розкладом Холеського /порядка n^3 операцій/ безпосередньо перераховувати її фактори Холеського L_K і D_K /порядка n^2 операцій/ / 2 /.

1. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.
2. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.87

УДК 519.6

Б.М.Голуб

МЕТОД ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ НА ПРОСТІЙ МНОЖИНІ ТИПУ "ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА"

Розглянемо систему рівнянь і нерівностей

$$\begin{aligned} &f_i(x) \le 0, \quad i \in J^-, \\ &f_i(x) = 0, \quad i \in J^0, \\ &x \in X, \end{aligned} \qquad /1/$$

де $X = \{x \in R^n : -\infty \le a^i \le x^i \le b^i \le \infty,\ i \in I = \{1, 2, \dots, n\}\}$; J^-, J^0 – скінченні множини індексів; R^n – n-мірний евклідів простір. Верхніми індексами позначені компоненти векторів.

Кожне рівняння $f_i(x) = 0$ еквівалентне двом нерівностям $f_i(x) \le 0$, $-f_i(x) \le 0$. Тому задачу /1/ можна записати у вигляді

$$f_i(x) \le 0, \quad i \in J = \{1, 2, \dots, m\}, \ x \in X. \qquad /2/$$

Нехай всі функції $f_i(x)$, $i \in J$, неперервно диференційовані.

Введемо множини

$$I(x) = \{i \in I : a^i + \tau < x^i < b^i - \tau\},$$

$$I_S(x,\lambda) = \{i \in I : \partial L(x,\lambda)/\partial x^i > 0,\ x^i = a^i, \quad \partial L(x,\lambda)/\partial x^i < 0,\ x^i = b^i\},$$

$$I_a(x,\lambda) = \{i \in I \setminus I_S(x,\lambda) : x^i \le a^i + \tau\},$$

$$I_b(x,\lambda) = \{i \in I \setminus I_S(x,\lambda) : x^i \ge b^i - \tau\},$$