розкладом Холеського /порядка n^3 операцій/ безпосередньо перераховувати її фактори Холеського L_K і D_K /порядка n^2 операцій/ / 2 /.

1. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.
2. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.87

УДК 519.6

Б.М.Голуб

МЕТОД ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ НА ПРОСТІЙ МНОЖИНІ ТИПУ "ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА"

Розглянемо систему рівнянь і нерівностей

$$\begin{aligned} &f_i(x) \le 0, \quad i \in J^-, \\ &f_i(x) = 0, \quad i \in J^0, \\ &x \in X, \end{aligned} \qquad /1/$$

де $X = \{x \in R^n : -\infty \le a^i \le x^i \le b^i \le \infty,\ i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}\}$; J^-, J^0 – скінченні множини індексів; R^n – n -мірний евклідів простір. Верхніми індексами позначені компоненти векторів.

Кожне рівняння $f_i(x) = 0$ еквівалентне двом нерівностям $f_i(x) \le 0$, $-f_i(x) \le 0$. Тому задачу /1/ можна записати у вигляді

$$f_i(x) \le 0, \quad i \in J = \{1, 2, \ldots, m\},\ x \in X. \qquad /2/$$

Нехай всі функції $f_i(x)$, $i \in J$, неперервно диференційовані.

Введемо множини

$$I(x) = \{i \in I : a^i + \tau < x^i < b^i - \tau\},$$

$$I_S(x, \lambda) = \{i \in I : \partial L(x, \lambda)/\partial x^i > 0,\ x^i = a^i,$$
$$\partial L(x, \lambda)/\partial x^i < 0,\ x^i = b^i\},$$

$$I_a(x, \lambda) = \{i \in I \setminus I_S(x, \lambda) : x^i \le a^i + \tau\},$$

$$I_b(x, \lambda) = \{i \in I \setminus I_S(x, \lambda) : x^i \ge b^i - \tau\},$$

$$Q(x,\lambda) = \{ p \in R^n : p^i \geq -\theta^i(x),\ i \in I_\alpha(x,\lambda),$$
$$p^i \leq \theta^i(x),\ i \in I_\beta(x,\lambda),\ p^i = 0,\ i \in I_s(x,\lambda)\},$$

де $\theta^i(x) = x^i - \alpha^i,\ i \in I_\alpha(x,\lambda);\ \theta^i(x) = \beta^i - x^i;\ i \in I_\beta(x,\lambda);$

$0 < \tau < \min\{1, \min_i (\beta^i - \alpha^i)/2\}$; $L(x,\lambda) = \sum_{i \in J} \lambda^i f_i(x),\ \lambda \in R^m$.

Поставимо у відповідність точкам x і λ допоміжну задачу квадратичного програмування

$$\min_{p \in Q(x,\lambda)} \left\{ \frac{1}{2} \|p\|^2 : \langle f_i'(x), p \rangle + f_i(x) \leq 0,\ i \in J_\delta(x) \right\}, \qquad /3/$$

де $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – скалярний добуток векторів; $\| \cdot \|$ – евклідова норма вектора,

$$J_\delta(x) = \{ i \in J : f_i(x) \geq F(x) - \delta \},\quad \delta > 0,$$
$$F(x) = \max\{0, f_1(x), \ldots, f_m(x)\}.$$

Розв"язок задачі /3/ та її множники Лагранжа позначимо відповідно через $p(x)$ і $u^i(x)$, $i \in J_\delta(x)$.

Нехай обрані числа $\delta > 0$, $\tau > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ і початкове наближення $x_0 \in X$. Приймемо $u_{-1} = 0$, $u_{-1} \in R^m$.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка x_k і множники Лагранжа u_{k-1} вже обчислені.

I. Розв"язуючи задачу /3/ при $x = x_k$, $\lambda = u_{k-1}$ обчислити $p_k = p(x_k)$, $u_k^i = u^i(x_k), i \in J_\delta(x_k)$. Прийняти $u_k^i = 0, i \notin J_\delta(x_k)$.

2. Знайти найбільше число β_k, яке задовольняє умови

$$\beta_k \leq 1,\ x_k + \beta_k p_k \in X.$$

3. Починаючи з $\alpha = \beta_k$, дробимо α шляхом ділення навпіл до першого виконання нерівності

$$F(x_k + \alpha p_k) \leq (1 - \varepsilon\alpha) F(x_k). \qquad /4/$$

Прийняти $x_{k+1} = x_k + \alpha p_k$ і перейти до кроку I.

Критерій останова: $\|p_k\| \leq w$, де w – задана точність.

Конкретизуючи необхідні умови мінімуму для загальної задачі математичного програмування [I] на випадок задачі /3/, отримуємо, що $p(x)$ – це розв"язок задачі /3/ лише в тому випадку, якщо існують такі числа $u^i(x) \geq 0$, $i \in J_\delta(x)$, і $v^i(x)$, $i \in I$, що

$$\left. \begin{aligned} & p(x) + \sum_{i \in J_\delta(x)} u^i(x) f_i'(x) = v(x), \\ & u^i(x) [\langle f_i'(x), p(x) \rangle + f_i(x)] = 0,\ i \in J_\delta(x), \\ & v^i(x)(p^i(x) + \theta^i(x)) = 0,\ v^i(x) \geq 0,\ i \in I_\alpha(x,\lambda), \end{aligned} \right\} \qquad /5/$$

$$v^i(x)(p^i(x)-\theta^i(x))=0,\ v^i(x)\le 0,\ i\in \dot I_\beta(x,\lambda),$$
$$v^i(x)=0,\ i\in \dot I(x),\ p^i(x)=0,\ i\in \dot I_S(x,\lambda).$$

Припустимо, що

I/ множина $\Omega=\{x\in X: F(x)\le F(x_0)\}$ компактна;

2/ градієнти функції $f_i(x),\ i\in J$ задовольняють в Ω умову Ліпшиця;

3/ задача /3/ має розв"язок при довільному $x\in\Omega$, причому $\sum_{i\in J_\delta(x)} u^i(x)\le N$, де $N>0$ – константа.

Помноживши перше співвідношення з /5/ скалярно на $p(x)$, отримаємо

$$\|p(x)\|^2=\langle v(x),p(x)\rangle-\sum_{i\in J_\delta(x)} u^i(x)\langle f_i'(x),p(x)\rangle=$$
$$=-\sum_{i\in \dot I_\alpha(x,\lambda)} v^i(x)\,\theta^i(x)+\sum_{i\in \dot I_\beta(x,\lambda)} v^i(x)\,\theta^i(x)+ \qquad /6/$$
$$+\sum_{i\in J_\delta(x)} u^i(x)f_i(x)\le\sum_{i\in J_\delta(x)} u^i(x)f_i(x).$$

Покажемо, що $x_K\in X$, $K=0,1,2,\dots$. Оскільки $p_K\in Q(x_K,u_{K-1})$, то $p_K^i\ge-\theta^i(x_K)$, якщо $x_K^i\le\alpha^i+\tau$ і $p_K^i\le\theta^i(x_K)$, коли $x_K^i\ge\beta^i-\tau$. Тому існує таке число $\beta_K\ge\tau$, що $x_K+\beta_Kp_K\in X$, коли тільки $x_K\in X$. Тоді з огляду на випуклість множини X при всіх α, які лежать між 0 і β_K, $x_K+\alpha p_K\in X$. Отже, якщо $x_K\in X$, то і $x_{K+1}\in X$. А тому що $x_0\in X$, то і вся послідовність $\{x_K\}$ лежить в X.

Враховуючи сказане і оцінку /6/, аналогічно як і в праці /2/, можна довести теорему.

Теорема. Якщо виконані допущення I–3, то справедлива нерівність

$$F(x_K)\le q^K F(x_0),\quad K=0,1,2,\dots,$$

де $0<q<1$.

1. П ш е н и ч н ы й Б.Н. Необходимые условия экстремума. М., 1982. 2. П ш е н и ч н ы й Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.87