УДК 517.946+517.43

М.М.Притула, А.К.Прикарпатський

АЛГЕБРАЇЧНА СХЕМА ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Припустимо, що в дійсному банаховому просторі $\mathcal{B} \subset C(\Lambda; \mathbb{R}^p)$ задана лінійна динамічна система

$$u_t = K(t; x, \partial) u + f(t; x), \qquad /1/$$

де $x \in \Lambda \subset \mathbb{R}^q$ – замкнута область в $\mathbb{R}^q$; $K(\cdot; \cdot, \partial): \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathrm{Mat}(\mathbb{R}^p)$ – неперервне матричнозначне відображення на $\mathbb{R} \times \Lambda$, поліноміальне по q -мірному аргументу $\partial = \partial x$; $f: \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^p$ – неперервна вектор-функція; $\mathbb{Z}_+ \ni q, p < \infty$ і $t \in \mathbb{R}^1$ – еволюційна змінна.

Наша мета – розвиток нового алгебраїчного підходу "точної" дискретної апроксимації заданої динамічної системи, основаного на методах теорії лінійних зображень скінченномірних алгебр Лі. З цією метою вивчимо властивості основних алгебраїчних операцій, що задають динамічну систему /1/ в $\mathcal{B}$ –операції диференціювання $\partial_{x_j}: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ і множення на незалежну змінну $x_k \in \mathbb{R}$, $j, k = \overline{1, q}$. Маємо:

$$[x_j, x_k] = 0, [x_j, \partial x_k] = -\delta_{jk}, [x_j, \delta_{ks}] = 0 = [\partial x_j, \delta_{ks}], \qquad /2/$$

де $s, j, k = \overline{1, q}$, а $[\cdot, \cdot]$ – звичайний комутатор в $\mathcal{B}$. Із /2/ випливає, що множина операторів $\mathcal{G} = \{x_j, \frac{\partial}{\partial x_k}, \delta_{s\ell} : j, k, s = \overline{1, q}\}$ утворює замкнуту скінченномірну алгебру Лі, причому, очевидно, $\mathcal{G} = \oplus_{j=1}^{q} \mathcal{G}_j$,

де $\mathcal{G}_j = \{x_j, \frac{\partial}{\partial x_j}, 1\}$, $j = \overline{1, q}$ –тримірні алгебри Лі Гейзенберга-Вейля. Звідси можна зробити висновок, що в найбільш загальному випадку оператор $K(t; x, \partial) \in U(\mathcal{G})$ належить універсальній огортуючій алгебрі вихідної алгебри Лі Гейзенберга-Вейля /2/ / 1 /. Оскільки вивчення орбіт динамічної системи /1/ при $u|_{t=0} = \varphi \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \{u \in C^m(\Lambda; \mathbb{R}^p): u_\Gamma = 0\}$, $\Gamma = \{x \in \Lambda : \Psi(x) = 0\}$ /$\Psi: \Lambda \to \mathbb{R}^1$ – гладке відображення/ з допомогою аналітичних методів в загальному випадку практично неможливе, то необхідно використати чисельні підходи до цієї задачі, переходячи до аналізу її спеціальних дискретних / 3 / апроксимацій. Припустимо, що є послідовність банахових просторів $\mathcal{B}_{(n)}$ скінченної розмірності $\dim \mathcal{B}_{(n)} = n \in \mathbb{Z}_+$ разом з асоційованою послідовністю лінійних гомоморфізмів $\Phi_{(n)}: \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{(n)}$. Кажуть, що банахові простори $\mathcal{B}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ апроксимують банаховий простір $\mathcal{B}$, коли $\|\Phi_{(n)}\| \leq \mathrm{const}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $\lim_{n\to\infty} \|\Phi_{(n)} u\|_{(n)} = \|u\|$ для всіх $u \in \mathcal{B}$. Відповідно [2] послідовність $\{u_{(n)} \in \mathcal{B}_{(n)} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається до $u \in \mathcal{B}$, коли $\lim_{n\to\infty} \| u_{(n)} - \Phi_{(n)} u\|_{(n)} \to 0$, і послідовність операторів $\{K_{(n)} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається до оператора $K : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, якщо для будь-якого

$$u \in \mathcal{B} \quad \lim_{n\to\infty} \|K_{(n)} \Phi_{(n)} u - \Phi_{(n)} K u\|_{(n)} = 0 .$$

Згідно з принципом дискретної апроксимації банахового простору $\mathcal{B}$ одержуємо послідовність дискретних динамічних систем

$$\frac{du_{(n)}}{dt} = K_{(n)}(t)\, u_{(n)} + f_{(n)}(t) \qquad /3/$$

у банахових просторах $\mathcal{B}_{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки динамічна система в /3/ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$ легко розв"язується чисельним /ітераційним/ методом як задача Коші, то вивчимо більш детально структуру правої частини /3/. Оператор $K_{(n)}(t) : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)}$ і вектор $f_{(n)}(t) \in \mathcal{B}_{(n)}$ при всіх $t \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, одержуємо з допомогою очевидних формул $K_{(n)}(t) = \Phi_{(n)} K(t; x, \partial) \Phi_{(n)}^{-1}$ і $f_{(n)}(t) = \Phi_{(n)} f(t; x)$. Тому що відображення $\Phi_{(n)}^{-1} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}$ визначене неоднозначно, то критерієм його вибору є така необхідна умова: відображення $\Phi_{(n)} : (\Phi_{(n)}^{-1} \mathcal{B}_{(n)}) \to \mathcal{B}_{(n)}$ – це гомоморфізм алгебри Лі Гейзенберга-Вейля $\mathcal{G}$ /2/ і її матричного зображення у просторі $\mathcal{B}_{(n)}$. Тобто, якщо $x_j \to X_j^{(n)}, \frac{\partial}{\partial x_j} \to Z_j^{n}$, $j = \overline{1, q}$ – зображення у $\mathcal{B}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, алгебри Лі Гейзенберга-Вейля $\mathcal{G}$, тоді необхідно, щоб на $\mathcal{B}_{(n)}$ виконувалась тотожно рівність $[Z_j^{(n)}, X_K^{(n)}]|_{\Phi_{(n)}\mathcal{B}} = \mathbb{1}^{(n)} \delta_{jK}$ для всіх j , $K = \overline{1, q}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, що будемо вважати надалі завжди виконаним.

З метою практичного використання запропонованого вище алгебраїчного алгоритму побудови дискретного наближення /3/ для динамічної системи /I/ розглянемо одне з конкретних зображень алгебри Лі Гейзенберга-Вейля $\mathcal{G}$ [4, 5]:

$$x_j \longrightarrow X_j^{(nj)} = \| x_j^{(K)} \delta_{sK}^{(nj)} \| , \quad K, s = \overline{1, n_j} \; ; \qquad /4/$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longrightarrow Z_j^{(nj)} = \| \delta_{Ks}^{(nj)} \sum_{m \neq K}^{nj} (x_j^{(K)} - x_j^{(m)})^{-1} + (1 - \delta_{Ks}^{(nj)})(x_j^{(K)} - x_j^{(s)})^{-1} \|$$

для всіх $j = \overline{1, q}$, $\mathbb{Z}_+ \ni n_j < \infty$, $x_j^{(K)} \neq x_j^{(s)}$ при $K \neq S$, причому $\mathcal{B}_{(n)} = \bigoplus_{(P)} \bigotimes_{j=1}^{q} \mathbb{R}^{n_j}$, $\dim \mathcal{B}_{(n)} = p \prod_{j=1}^{q} n_j$. В цьому випадку оператор

$K_{(n)}(t) : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)}$ як елемент універсальної огортуючої алгебри вихідної алгебри Лі $\mathcal{G}_{(n)}$ /4/ записується у вигляді тензорного добутку зображень складових операторів у заданому виразі для $K(t; x, \partial)$ в просторі $\mathcal{B}$. Відповідно вектор $f_{(n)}(t) \in \mathcal{B}_{(n)}$ подаємо у вигляді $f_{(n)}(t) = (f^{(1)}_{(n)}, f^{(2)}_{(n)}, \ldots, f^{(p)}_{(n)})^{\tau}$, τ – знак транспонування, причому для всіх $\kappa = \overline{1, p}$, $f^{(\kappa)}_{(n)}(t) = \bigotimes_{j=1}^{q} \mathbb{R}^{n_j}$, де

$$f^{(\kappa)}_{(n)}(t) = f^{(\kappa)}(t; X^{(n)})\, Q^{-1}_{(n)}\, \bar{u}_{(n)}. \qquad /5/$$

Тут $\bar{u}_{(n)} = \bigotimes_{j=1}^{q} \bar{u}_j$,

$$Q_{(n)} = \bigotimes_{j=1}^{q} \| \delta^{(n_j)}_{\kappa s} \prod_{m \neq \kappa}^{n_j} (x_j^{(\kappa)} - x_j^{(m)}) \| , \qquad /6/$$

де $\bar{u}_j = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n_j}$ для всіх $j = \overline{1, q}$.
Переконаємося ще, що виконана умова узгодженості $[Z_j^{(n)}, X_\kappa^{(n)}]|_{\varphi_{(n)}\mathcal{B}} = \delta_{j\kappa} \mathbb{1}^{(n)}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Із /4/ маємо

$$[Z_j^{(n_j)}, X_j^{(n_j)}] = \| \delta^{(n_j)}_{\kappa s} \| - \| J^{(n_j)}_{\kappa s} \| , \qquad /7/$$

для всіх $\kappa, s = \overline{1, n_j}$, $J^{(n_j)}_{\kappa s} = 1$. Оскільки

$$J^{(n_j)} Z_j^{(n_j)} = 0 \quad і \quad J^{(n_j)} (X^{(n)})^{m_j} Q^{-1}_{n_j} \bar{u}_j = 0$$

для всіх $j = \overline{1, q}$, $m_j = \overline{0, n_j - 2}$, то із /7/ випливає, що відображення $\varphi_{(n)} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{(n)}$, яке реалізує /4/, є узгодженим гомоморфізмом алгебр Лі $\mathcal{G}$ і $\mathcal{G}_{(n)}$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Це необхідна умова при побудові коректної дискретної апроксимації /3/ заданої динамічної системи /1/.

Розвинута загальна алгебраїчна схема дискретної апроксимації для лінійних динамічних систем переноситься також з допомогою невеликої модифікації і на нелінійні системи. Для її опису розглянемо добре відомий приклад нелінійної динамічної системи Кортевега-де Фріза:

$$u_t = 6 u u_x + u_{xxx} , \qquad /8/$$

де $u \in C^{(3)}([0, 1]; \mathbb{R}^1)$, $u(0) = u(1) = 0$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, причому, очевидно, виконано $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Зробимо у /8/ "граничне" перетворення $u = x(1-x)v$, де $v \in C^{(3)}([0,1]; \mathbb{R}^1)$

$|v(0)|<\infty, |v(1)|<\infty$. Тоді $v \in \mathcal{B}$,

$$v_t = v_{xxx} + \frac{3(1-2x)}{x(1-x)} v_{xx} - 6[(1-2x)v +$$
$$+ x(1-x)v_x]v - 6[x(1-x)]^{-1} v_x \quad . \qquad /9/$$

Позначаючи вираз $(1-2x)v + x(1-x)v_x = \alpha(t;x) \in \mathcal{B}$ і переходячи до дискретної апроксимації $\Phi_{(n)} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, отримуємо

$$\frac{d}{dt} v_{(n)} = [Z_x^3 + 3(\mathbb{1} - 2X)[X(\mathbb{1}-X)]^{-1} Z_x^2 +$$
$$+ \alpha(t;X) - 6[X(\mathbb{1}-X)]^{-1} Z_x] v_{(n)} \quad , \qquad /10/$$

де $v_{(n)} \in \mathcal{B}_{(n)}$. У припущенні, що функція $\alpha(t;x) \in \mathcal{B}$ відома, дискретна динамічна система /10/ визначає вектор $v_{(n)}(t;x) \in \mathcal{B}$, причому $v_{(n)}(0;x) = [X(\mathbb{1}-X)]^{-1} \times \varphi(X) Q_{(n)}^{-1} \bar{u}_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Згідно з формулою

$$u_n(t;x) = \langle q_{(n)}(x), u_{(n)}(t) \rangle \quad , \qquad /11/$$

де $\quad q_{(n)}(x) = q_{n_x}(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^1 ;$

$$q_{n_x}(x) = \Big(\prod_{j \neq m}^{n_x} \frac{\pi}{\ell_x} \sin[\pi(x - x^{(m)})/\ell_x] : j = \overline{1, n_x}\Big)^{\tau} \in \mathbb{R}^{n_x}$$

і $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – згортка векторів у $\mathbb{R}^{n_x}$, для функції $\alpha(t;x) \in \mathcal{B}$ знаходимо її "дискретне" зображення:

$$\alpha(t;x) = (1-2x) \langle q_n(x), v_{(n)}(t) \rangle +$$
$$+ x(1-x)\frac{d}{dx} \langle q_n(x), v_{(n)}(t) \rangle \quad . \qquad /12/$$

Матриця $\alpha(t;X) : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)}$ в /10/ має вигляд

$$\alpha(t;X) = \langle q_n(X), v_{(n)}(t) \rangle (\mathbb{1} - 2X) +$$
$$+ X(\mathbb{1} - X) Z_x \langle q_n(X), v_{(n)}(t) \rangle \quad . \qquad /13/$$

Підставляючи матрицю /13/ у вираз /10/, отримуємо нелінійну самоузгоджену дискретну апроксимацію заданої нелінійної динамічної системи /8/ або /9/.

Розв"язуючи /10/ ітераційним методом на ЕОМ, з допомогою оберненого відображення $\Phi_{(n)}^{-1} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ вигляду /11/ дістаємо наближений розв"язок заданої нелінійної динамічної системи Кортевега-де Фріза. Причому виявляється, що викладена вище "нелінійна" схема алгебраїчної дискретної апроксимації легко узагальнюється на широкий клас нелінійних динамічних систем $u_t = K(t; x, u)$, K – оператор яких має в $\mathcal{B}$ регулярну похідну Фреше.

1. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. М., 1984. 2. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., 1972. 3. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980. 4. Calogero F. Isospectral matrices and classical polynomials // Zinear algebra and its applications. 1982. Vol. 44. N 1. P. 55-60. 5. Calogero F. Integralle dynamical systems and related mathematical results // Zect. Notes Phys. 1983. N 189. P. 46-109.

Стаття надійшла до редколегії 12.03.87

УДК 518:517.9

М.В.Жук

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y) \qquad /1/$$

при однорідній крайовій умові

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = \left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x) + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y)\right]_{\Gamma} = 0\,, \qquad /2/$$

де Γ – межа області $\mathcal{D}$, обмеженої по x прямими $x = a$ і $x = b$, а по y кривими $y = g(x)$ і $y = h(x)$, причому $g(x) < h(x)$.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $p(x,y)$, $q(x,y)$ додатні обмежені, тобто $0 < \alpha_1 \le p(x,y) \le \beta_1$, $0 < \alpha_2 \le q(x,y) \le \beta_2$.

Функція $f(x,y)$ належить гільбертовому простору $H = L_2(\mathcal{D})$ і задовольняє необхідну умову розв"язності задачі Неймана

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = 0\,. \qquad /3/$$