Розв"язуючи /10/ ітераційним методом на ЕОМ, з допомогою оберненого відображення $\Phi_{(n)}^{-1} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ вигляду /11/ дістаємо наближений розв"язок заданої нелінійної динамічної системи Кортевега-де Фріза. Причому виявляється, що викладена вище "нелінійна" схема алгебраїчної дискретної апроксимації легко узагальнюється на широкий клас нелінійних динамічних систем $u_t = K(t; x, u)$, K – оператор яких має в $\mathcal{B}$ регулярну похідну Фреше.

1. Г л и м м Дж., Д ж а ф ф е А. Математические методы квантовой физики. М., 1984. 2. Р и х т м а й е р Р., М о р т о н К. Разностные методы решения краевых задач. М., 1972. 3. Т р и б е л ь Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980. 4. C a l o g e r o F. Isospectral matrices and classical polynomials // Zinear algebra and its applications. 1982. Vol. 44. N 1. P. 55-60. 5. C a l o g e r o F. Integralle dynamical systems and related mathematical results // Zect. Notes Phys. 1983. N 189. P. 46-109.

Стаття надійшла до редколегії 12.03.87

УДК 518:517.9

М.В.Жук

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y) \qquad /1/$$

при однорідній крайовій умові

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = \left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x) + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y)\right]_\Gamma = 0\,, \qquad /2/$$

де Γ – межа області $\mathcal{D}$, обмеженої по x прямими $x = a$ і $x = b$, а по y кривими $y = g(x)$ і $y = h(x)$, причому $g(x) < h(x)$.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $p(x,y)$, $q(x,y)$ додатні обмежені, тобто $0 < \alpha_1 \le p(x,y) \le \beta_1$, $0 < \alpha_2 \le q(x,y) \le \beta_2$.

Функція $f(x,y)$ належить гільбертовому простору $H = L_2(\mathcal{D})$ і задовольняє необхідну умову розв"язності задачі Неймана

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = 0\,. \qquad /3/$$

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину двічі неперервно диференційовних функцій $u(x,y)$ у замкнутій області $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + \Gamma$, що задовольняють крайову умову /2/ і умову

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} u(x,y)\, dx\, dy = 0 . \qquad /4/$$

Введемо допоміжний оператор T, що визначається формулами

$$Tu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} , \qquad /5/$$

$$u|_{\Gamma} = 0 \qquad /6/$$

з $D(T) = D(L)$. Із нерівності Пуанкаре та умови /4/ випливає, що оператор T додатно визначений, тобто, для довільного $u \in D(T)$ виконується

$$(Tu, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 , \quad \gamma = \mathrm{const} > 0 . \qquad /7/$$

Позначимо через $H_0 \subset H$ його енергетичний простір, тобто замикання множини $D(T)$ у метриці

$$[u,v]_0 = (Tu, v), \ |u|_0^2 = [u,u]_0 = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy .$$

З нерівності /7/ у результаті граничного переходу для довільного $u \in H_0$ отримуємо

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} |u|_0 . \qquad /8/$$

При цьому функції з енергетичного простору H_0 оператора T мають перші узагальнені похідні, сумовані з квадратом в області $\mathcal{D}$, і задовольняють умову /4/, що отримується в результаті граничного переходу при $n \to \infty$ у рівності $\iint\limits_{\mathcal{D}} u_n\, dx\, dy = 0$.

Для довільних $u, v \in H_0$ формально введемо білінійну форму

$$L(u,v) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\, dy . \qquad /9/$$

Тоді для довільного $u \in H_0$ виконуються нерівності

$$\mu |u|_0^2 \leq L(u,u) \leq \eta |u|_0^2 , \qquad /10/$$

де $\mu = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$; $\eta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$.

Узагальненим розв"язком задачі /1/-/2/ називається функція $u(x,y)$, що належить простору H_0 і для якої виконується тотожність

$$L(u,v) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left[p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dx\, dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} f v\, dx\, dy \qquad /11/$$

при довільній функції $v(x,y)$ із простору H_0, причому виконання лівої нерівності /10/ забезпечує його існування та єдиність.

Застосовуючи до задачі /1/-/2/ метод Канторовича /1 /, наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\, \varphi_k(x,y) \quad , \tag{12}$$

де заздалегідь вибрані лінійно незалежні у проміжку $[g(x), h(x)]$ функції $\varphi_k(x,y)$ задовольняють умову

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \varphi_k(x,y)\, dy = 0\,, \quad k = 1,2,\ldots \tag{13}$$

і які вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{x_\ell(x)\varphi_k(x,y)\} \in H_0$ була повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_0. Невідомі шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаємо з системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (Lu_n - f)\varphi_i\, dy + \varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\partial u_n}{\partial v}\Big|_{y=g(x)} + \varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\partial u_n}{\partial v}\Big|_{y=h(x)} = 0 \tag{14}$$

при умовах

$$\int_{g(a)}^{h(a)} \frac{\partial u_n}{\partial v}\varphi_i\Big|_{x=a} dy = 0\,, \quad \int_{g(b)}^{h(b)} \frac{\partial u_n}{\partial v}\varphi_i\Big|_{x=b} dy = 0, \quad i = 1,2,\ldots n. \tag{15}$$

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду $v_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, \varphi_k(x,y)$. Нехай для деякої функції $u_n(x,y) \in H_n \cap H_0$ справедлива тотожність

$$L(u_n, v_n) \equiv \iint_{\mathcal{D}} \Big[p\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial v_n}{\partial x} + q\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial v_n}{\partial y}\Big] dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} f\, v_n\, dx\,dy\,, \tag{16}$$

в якій $v_n(x,y)$ довільна функція із $H_n \cap H_0$. Тоді $u_n(x,y)$ називається узагальненим розв"язком системи методу Канторовича /14/-/15/. При цьому аналогічно, як і в праці / 2 /, доводиться теорема.

<u>Теорема</u>. Якщо обмеження на вихідні дані задачі /1/-/2/ такі, що виконуються нерівності /10/, то для довільної функції $f(x,y)$ із H, що задовольняє умову /3/, задача /1/-/2/ має єдиний узагальнений розв"язок $u(x,y) \in H_0$; при довільному n система методу Канторовича /14/-/15/ має єдиний узагальнений розв"язок $u_n(x,y) \in H_n \cap H_0$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$|u-u_n|_0 \le c\,|u-v_n|_0 \quad , \qquad /17/$$

де $c=\sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}$, а елемент v_n реалізує мінімум функціонала $|u-v_n|_0$.

Повною, лінійно незалежною системою функцій $\{\chi_\ell(x)\varphi_k(x,y)\}$ у просторі H_0 є, наприклад, система

$$\left\{\cos\frac{\ell\pi(x-a)}{b-a}\cos\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)}\right\},\quad k,\ell=0,1,2,\dots .$$

При цьому наближений розв"язок шукають у вигляді

$$u_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n} c_k(x)\cos\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)} .$$

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.;Л., 1962. 2. Лучка А.Ю., Жук М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.87

УДК 519.21

О.П.Гнатишин, Є.В.Москв"як

ОЦІНКА РЕСУРСУ НА ОСНОВІ ЗРІЗАНОЇ ВИБІРКИ

Нехай $t_1, t_2, \dots, t_n$ - напрацювання n однотипних технічних пристроїв. Деякі технічні пристрої працювали до відмови F , інші були зупинені S , хоча і могли ще працювати. Нехай k пристроїв з n працювали до відмови, а решта $n-k$ були зупинені.

Позначимо через $\bar{j}$ сподіваний ранг фактичної j -ї відмови у спільному варіаційному ряді. Методика обчислення сподіваних рангів відмов наведена у праці / 1 /. Зрізана медіанна емпірична ймовірність безвідмовної роботи пристрою до моменту t обчислюється за формулою

$$\hat{R}(t)=\frac{n+0{,}7-\bar{j}}{n+0{,}4}-\frac{\overline{(j+1)}-\bar{j}}{n+0{,}4}\,\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\,,\qquad \begin{array}{l} t_j\le t\le t_{j+1}\,,\\ j=1,2,\dots,k-1\,,\\ n=2,3,\dots \end{array} \qquad /1/$$

У праці [2] визначено емпіричний гама-процентний ресурс $\hat{t}_\gamma$ як розв"язок рівняння

$$\hat{R}(t)=\frac{\gamma}{100}\quad,\quad 0<\gamma<100. \qquad /2/$$