УДК 518:517.948

М.В.Дорошенко

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНОМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ МЕТОДАМИ КОЛОКАЦІЇ ТА САМОРЕГУЛЯРИЗАЦІЇ

При розрахунку електростатичних полів електронно-оптичних систем у плоскому випадку виникають одномірні інтегральні рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_L \mu(P)\,R(P,M)\,d\ell_p = U_0(M),\quad M\in L, \qquad /1/$$

де $L=\bigcup_{i=1} L_i$ – довільні плоскі криві без точок самоперетину; $\mu(P)$ – невідома густина; $R(P,M)=\ln(1/|P-M|)$ – ядро; $U_0(M)\in C(L)$ – задане значення потенціалу на L .

Невідома густина у рівнянні /1/ має сингулярну поведінку на краю розімкнутої кривої, а також в точках її зламу, ядро – логарифмічну особливість при суміщенні точки спостереження з точкою інтегрування.

У цій праці пропонуємо криві L_i зображати за допомогою граничних елементів $\ell_m^{(i)}(m=\overline{1,N_i})$, для яких декартові координати довільної точки виражаються через координати вузлових точок $r_m^{\ell(i)}$ і базисні функції $N^{\ell}(\alpha)$ таким чином [4]:

$$r_m^{(i)}(\alpha)=\sum_{\ell=1}^{n} N^{\ell}(\alpha)\,r_m^{\ell(i)}\ ,\quad r=(x,y)\ . \qquad /2/$$

При n = 2,3,4 – дістаємо відповідно лінійну, квадратичну та кубічну апроксимації. Шукану густину записуємо як

$$\mu\ (\alpha)=\sum_{m=1}^{N_i} \mu_m^{(i)}(\alpha)\,\theta_m^{(i)}(\alpha)\ , \qquad /3/$$

де

$$\mu_m^{(i)}(\alpha)=\begin{cases}\sum_{\ell=1}^{n} N^{\ell}(\alpha)\,\mu_m^{\ell(i)} & ,\ \alpha\in\ell_m^{(i)}\ ;\\ 0 & ,\ \alpha\notin\ell_m^{(i)}\ ;\end{cases}$$

$\mu_m^{\ell(i)}$ – невідоме значення густини у вузлі $(x_m^{\ell(i)},\,y_m^{\ell(i)})$;
$\theta_m^{(i)}(\alpha)$ – функція, яка враховує особливість у густині на краю розімкнутої кривої [3].

Враховуючи /2/, /3/, рівняння /1/ набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{M}\left\{\sum_{m=1}^{N_i}\left\{\sum_{\ell=1}^{n}\mu_m^{\ell(i)}\int_{-1}^{1}N^{\ell}(\alpha)F_m^{(i)}(\alpha)\Theta_m^{(i)}(\alpha)R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha})\,d\alpha\right\}\right\} = U_{op}^{(j)}(\bar{\alpha}), \quad \bar{\alpha}\in\ell_p^{(j)}, \qquad /4/$$

де $F_m^{(i)}(\alpha)$ – елемент довжини дуги кривої L_i ;

$$R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha}) = \ln\left(1/\left((x_m^{(i)}(\alpha)-x_p^{(j)}(\bar{\alpha}))^2+(y_m^{(i)}(\alpha)-y_p^{(j)}(\bar{\alpha}))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Для визначення коефіцієнтів $\mu_m^{\ell(i)}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна отримати двома шляхами [1]. Перший – метод колокації, при цьому коефіцієнти матриці є інтегралами від функцій з особливостями в ядрі та густині на краю L, другий – за рахунок виділення особливості в ядрі, при цьому інтегральне рівняння першого роду зводиться до рівняння другого роду, яке розв"язується методом саморегуляризації [5].

У праці [2] описано алгоритм чисельного розв"язування рівняння /4/ методом колокації. Особливість у густині виділяли заміною змінних, а в ядрі – адитивним перетворенням типу Канторовича. На основі методу саморегуляризації рівняння першого роду зводиться до рівняння другого [5]. Методика зведення /4/ до рівняння другого роду грунтується на можливості виділення головної частини особливості ядра в достатньо малому околі особливої точки й апріорному припущенні про характер поведінки шуканого розв"язку.

Функцію $R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha})$ зобразимо у вигляді

$$R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha}) = \begin{cases} \ln\frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|}+\ln\frac{1}{V_p(\alpha,\bar{\alpha})}, & \text{якщо } \bar{\alpha}\in\ell_p^{(i)}; \\ R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha}), & \text{якщо } \bar{\alpha}\notin\ell_p^{(i)}, \end{cases} \qquad /5/$$

$V_p(\alpha,\bar{\alpha})\in C[-1,1]$, що залежить від порядку граничного елементу. Функцію $\ln\frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|}$ перепишемо як

$$\ln\frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|} = K_h(\alpha,\bar{\alpha}) + H(\alpha,\bar{\alpha}), \qquad /6/$$

де

$$K_h(\alpha,\bar{\alpha}) = \begin{cases} \frac{h-|\alpha-\bar{\alpha}|}{h} \ln \frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|}, & |\alpha-\bar{\alpha}| \le h; \\ 0, & |\alpha-\bar{\alpha}| > h; \end{cases}$$

$$H(\alpha,\bar{\alpha}) = \begin{cases} \frac{|\alpha-\bar{\alpha}|}{h} \ln \frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|}, & |\alpha-\bar{\alpha}| \le h; \\ \ln \frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|}, & |\alpha-\bar{\alpha}| > h. \end{cases}$$

Вважаємо, що при $|\alpha-\bar{\alpha}| \le h$, $\int_{-1}^{1} \mu_p(\alpha) F_p(\alpha) K_h(\alpha,\bar{\alpha})\, d\alpha =$
$\mu_p(\bar{\alpha})\, \Theta_p^{-1}(\bar{\alpha}) \int_{-1}^{1} F_p(\alpha)\, \Theta_p(\alpha)\, K_h(\alpha,\bar{\alpha})\, d\alpha$.
Тоді, враховуючи /5/, /6/, рівняння /4/ зводиться до рівняння другого роду:

$$\mu_p(\bar{\alpha})\, \Theta_p^{-1}(\bar{\alpha}) \int_{-1}^{1} F_p(\alpha)\Theta_p(\alpha) K_h(\alpha,\bar{\alpha})\, d\alpha + \int_{-1}^{1} \mu_p(\alpha)\, F_p(\alpha) \left(H(\alpha,\bar{\alpha}) + \ln \frac{1}{V_p(\alpha,\bar{\alpha})}\right) d\alpha + \sum_{i=1}^{M} \left\{ \sum_{\substack{m=1 \\ m \ne p}}^{N_i} \int_{-1}^{1} \mu_m^{(i)}(\alpha)\, F_m^{(i)}(\alpha)\, R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha})\, d\alpha \right\} = U_{op}(\bar{\alpha}). \quad /7/$$

Описані методики чисельного розв"язування рівняння /I/ апробовано з допомогою тестового прикладу. Проведено чисельний розрахунок густини зарядів прямолінійного провідника, довжина якого дорівнює двом, зарядженого до одиничного потенціалу. Ця задача має аналітичний розв"язок [5].

Нижче наводимо значення максимальних Δ_{max} і середніх Δ_{cp} відхилень результатів чисельного розрахунку густини зарядів, отриманих методами колокації і саморегуляризації від аналітичного при різній кількості лінійних граничних елементів:

Кількість елементів	Метод колокації		Метод саморегуляризації	
	Δ_{max}	Δ_{cp}	Δ_{max}	Δ_{cp}
8	7,8 10^{-2}	1,01 10^{-2}	7,7 10^{-2}	1,02 10^{-2}
16	7,7 10^{-2}	9,3 10^{-3}	7,6 10^{-2}	9,1 10^{-3}
32	6,4 10^{-2}	6,5 10^{-3}	6,1 10^{-2}	6,1 10^{-3}

Експерименти показали, що для чисельного розв"язування рівняння /I/ достатньо застосовувати метод колокації без попереднього зведення його до рівняння другого роду. Стійкість розв"язку забезпечується структурою ядра з логарифмічною особливістю.

1. Б а к а л е ц В.А., Г р и ц ю к Н.П., О с т у д и н Б.А. и др. О двух методах численного решения двумерных интегральных уравнений со слабой особенностью // Вычислительная и прикл. математика. 1985. Вып. 57. С. 12-20. 2. Б а к а л е ц В.А., Д о р о ш е н к о Н.В. Исследование алгоритмов выделения особенностей при решении одномерных интегральных уравнений первого рода. Львов, 1986. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 1195 - Ук86. 3. Б а к а л е ц В.А., Л ю д к е в и ч И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Львов, 1986. 4. Б е н е р д ж и П., Б а т т е р ф и л д Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 5. Д м и т р и е в В.И., З а х а р о в Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // Вычислительные методы и программирование. М., 1986. Вып. 10. С.49-54.

Стаття надійшла в редколегію 22.01.87

УДК 517.947:534

Р.С.Хапко

ПЕРША КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО РІВНЯННЯ НА НЕЗАМКНУТИХ КОНТУРАХ

Постановка задачі та зведення її до послідовності інтегральних рівнянь. Нехай на площині xOy задана крива L

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\tau) \\ y &= y(\tau) \end{aligned}\right\}, \qquad T_1 \le \tau \le T_2 ,$$

яка може бути як замкнена, так і незамкнена. Необхідно знайти функцію $u(x, y, t)$, що задовольняє телеграфне рівняння

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} - cu = \Delta u , \qquad /1/$$

початкові умови

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 , \qquad /2/$$

граничну умову

$$u|_L = f(M, t) , \quad M \in L , \qquad /3/$$

умову погодженості

$$f|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad /4/$$