1. Б а к а л е ц В.А., Г р и ц ю к Н.П., О с т у д и н Б.А. и др. О двух методах численного решения двумерных интегральных уравнений со слабой особенностью // Вычислительная и прикл. математика. 1985. Вып. 57. С. 12-20. 2. Б а к а л е ц В.А., Д о р о ш е н к о Н.В. Исследование алгоритмов выделения особенностей при решении одномерных интегральных уравнений первого рода. Львов, 1986. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 1195 - Ук86. 3. Б а к а л е ц В.А., Л ю д к е в и ч И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Львов, 1986. 4. Б е н е р д ж и П., Б а т т е р ф и л д Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 5. Д м и т р и е в В.И., З а х а р о в Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // Вычислительные методы и программирование. М., 1986. Вып. 10. С.49-54.

Стаття надійшла в редколегію 22.01.87

УДК 517.947:534

Р.С.Хапко

# ПЕРША КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО РІВНЯННЯ НА НЕЗАМКНУТИХ КОНТУРАХ

Постановка задачі та зведення її до послідовності інтегральних рівнянь. Нехай на площині $xOy$ задана крива $L$

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\tau) \\ y &= y(\tau) \end{aligned}\right\}, \qquad T_1 \le \tau \le T_2 \quad ,$$

яка може бути як замкнена, так і незамкнена. Необхідно знайти функцію $u(x,y,t)$, що задовольняє телеграфне рівняння

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} - cu = \Delta u \;, \qquad /1/$$

початкові умови

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \;, \qquad /2/$$

граничну умову

$$u|_L = f(M,t)\;,\; M \in L \;, \qquad /3/$$

умову погодженості

$$f|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad /4/$$

і в кожен момент часу $t$ умову

$$\lim_{\rho\to 0} \rho \operatorname{grad} u = 0, \qquad /5/$$

де $\rho$ - радіус кола, проведеного в кожному кінці кривої $L$. Вважатимемо також, що $a\neq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$, функція $u(x,y,t)$ обмежена на безмежності, а розв"язок задачі /1/ - /5/ існує та єдиний.

Для розв"язання задачі /1/ - /5/ використаємо так званий комбінований метод, що полягає у поєднанні інтегрального перетворення і методу інтегральних рівнянь. Застосовуючи перетворення з ядром Чебишева-Лагерра [ 2 ] до /1/ - /5/, дістаємо

$$\Delta u_n - \left(\frac{\varkappa^2}{a^2} + b\varkappa - c\right)u_n = \sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{\varkappa^2}{a^2}(n-m+1) + b\varkappa\right)u_m, \qquad /6/$$

$$u_n\big|_L = f_n(M), \quad M\in L, \qquad /7/$$

$$\lim_{\infty} \rho \operatorname{grad} u_n = 0, \qquad /8/$$

де $u_n = \int_0^\infty u(x,y,t)\, e^{-\varkappa t} L_n(\varkappa t)\, dt$,

$f_n = \int_0^\infty f(x,y,t)\, e^{-\varkappa t} L_n(\varkappa t)\, dt$ - зображення по Чебишеву-Лагерру функції $u(x,y,t)$ і $f(x,y,t)$.

Можна показати, що розв"язок $n$ -ї стаціонарної задачі послідовності /6/ - /8/ зображається у вигляді

$$u_n(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \int_{T_1}^{T_2} q_m(\tau)\varphi_{n-m}(x,y,\tau)\, F(\tau)\, d\tau, \qquad /9/$$

де $q_m(\tau)$ - невідомі функції, які назвемо густинами; $\varphi_k$ - фундаментальний розв"язок $k$ -го рівняння послідовності /6/; $F(\tau)$ - елемент дуги.

Задовольняючи граничні умови /7/ і /8/, для знаходження невідомих густин отримуємо послідовність інтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду:

$$\int_{T_1}^{T_2} q_n(\tau)\varphi_0(x,y,\tau)F(\tau)d\tau = f_n(x,y) - \sum_{m=0}^{n-1}\int_{T_1}^{T_2} q_m(\tau)\varphi_{n-m}(x,y,\tau)\, F(\tau)\, d\tau. \qquad /10/$$

Таким чином, з допомогою інтегрального перетворення Чебишева-Лагерра вихідна крайова задача зводиться до послідовності стаціонарних граничних задач для неоднорідних рівнянь

Гельмгольца на площині. Далі шляхом зображення розв"язків цих задач в інтегральному виді можна одержати послідовність інтегральних рівнянь. Важливою особливістю їх є те, що невідомі густини, визначені з попередніх рівнянь, входять у праву частину наступних.

Знаходження фундаментальних розв"язків. Легко показати, що фундаментальний розв"язок рівняння /1/ має вигляд

$$\xi(x,y,t)=\frac{\operatorname{ch}\left(\alpha\sqrt{(t)^2-R^2/a^2}\right)}{\sqrt{t^2-R^2/a^2}}e^{-\frac{ba^2}{2}t}\cdot S_+(t-R/a), \qquad /11/$$

де $\alpha^2=\frac{a^4b^2}{4}+ca^2$; $S_+(x)$ – асиметрична функція Хевісайда; $R$ – відстань.

Можна довести, що зображення по Чебишеву-Лагерру функції /11/ – це фундаментальні розв"язки послідовності /6/, які мають вигляд

$$\varphi_n(x,y)=\int_0^\infty \xi(x,y,t)e^{-\varkappa t}L_n(\varkappa t)\,dt, \qquad /12/$$

де

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d_k^{(n)}(-1)^k x^k \qquad /13/$$

поліноми Чебишева-Лагерра; $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$; $d_k^{(n)}$ – відомі коефіцієнти [ 4 ].

Застосовуючи перетворення Лапласа до /11/ і формулу /13/, із /12/ отримуємо

$$\varphi_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k d_k^{(n)}\varkappa^k\,\frac{d^kE(x,y)}{d\varkappa^k}. \qquad /14/$$

Оскільки $E(x,y)=K_0\left(\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}\,R\right)$, то з /14/ можемо знайти

$$\varphi_0(x,y)=E(x,y)=K_0\left(\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}\;R\right), \qquad /15/$$

$$\varphi_1(x,y)=E(x,y)+\varkappa\frac{dE}{d\varkappa}=K_0\left(\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}\,R\right)-$$

$$-\frac{\varkappa\left(\frac{2\varkappa}{a^2}+b\right)R}{2\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}}\cdot K_1\left(\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}\,R\right) \qquad /16/$$

і т.д., де $K_n(x)$ – модифіковані функції Ханкеля [ 4 ].

Розв"язування послідовності інтегральних рівнянь. Для знаходження розв"язків рівнянь /10/ використаємо метод колокації з наступним виділенням особливостей у густинах і ядрах [1].

Розіб"ємо проміжок $[T_1\ ;\ T_2]$ на $N$ -1 елемент довжиною $h$ ; зобразимо невідомі густини у вигляді

$$q_n(\tau) = \sum_{K=1}^{N} a_K^{(n)} \mu_K(\tau)\ , \qquad /17/$$

де $a_K^{(n)}$ - невідомі коефіцієнти; $\mu_K(\tau)$ - фінітні функції [3]. Причому $\mu_1(\tau)$ і $\mu_N(\tau)$ враховують особливість густин на краях у випадку розімкнутого контура " [1].

Підставивши /17/ в /10/ і задовольняючи граничні умови в $N$ точках колокації, для визначення $a_K^{(n)}$ одержимо послідовність систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{K=1}^{N} a_K^{(n)} A_{Kj}^{(0)} = f_n(x_j\,, y_j) - \sum_{m=0}^{n-1}\ \sum_{K=1}^{N} a_K^{(m)} A_{Kj}^{(n-m)}\quad , \qquad /18/$$

де

$$A_{Kj}^{(i)} = \int\limits_{\tau_{K-1}}^{\tau_{K+1}} \mu_K(\tau) F(\tau)\, \varphi_i(x_j\ , y_j\ , \tau)\, d\tau\ . \qquad /19/$$

Послідовність систем /18/ характерна тим, що матриці її однакові, а права частина на кожному кроці перераховується і містить інформацію про розв"язки,обчислені на попередніх етапах.

При суміщенні точок колокації з точками інтегрування в коефіцієнтах $A_{Kj}^{(i)}$ виникають логарифмічні особливості в ядрах за рахунок функції $K_0(x)$.

З формул /16/ і /17/ випливає, що будь-який фундаментальний розв"язок $\varphi_n(x,y)$, $(n=1,2,\ldots)$ можна зобразити у формі

$$\varphi_n(x,y) = \varphi_0(x,y) + \overline{\varphi}_n(x,y)\ ,$$

де $\overline{\varphi}_n\ (x\ ,y)$ при $(x\ ,y) \to 0$ мають скінченні границі.

Отже, у коефіцієнтах матриці та правих частинах системи маємо логарифмічну особливість, яку виділяємо згідно з методикою [1] лише один раз і використовуємо на кожному кроці.

Таким чином, розв"язавши $n$ разів систему /18/, густини $q_n(\tau)$ обчислюємо за формулою /17/, а розв"язки стаціонарних задач $U_n(x, y)$ - за формулами /9/.

Відомо [2], що за знайденими зображеннями $U_n$ оригінал шукають з допомогою формули

$$u(x,y,t) = \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)\, L_n(\varkappa t)\quad . \qquad /20/$$

При практичних розрахунках обмежуємось частинною сумою ряду /20/. За допомогою підбору параметра $\varkappa$ можна досягнути потрібної точності розв"язання задачі на певному проміжку часу з невеликою кількістю членів ряду /20/.

Перевага даного методу - отримання розв"язку в аналітичному вигляді, що дає змогу знайти його значення при будь-яких аргументах і необхідності диференціювання.

1. Бакалец В.А., Людкевич И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Львов, 1986. 2. Галазюк В.А., Людкевич И.В., Музычук А.Е. Метод интегральных уравнений в нестационарных задачах дифракции. Львов, 1984. Рукопись деп в УкрНИИНТИ № 602 Ук - 85 Дп. 3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981. 4. Справочник по специальным функциям /Под ред. Абрамовица М., Стигана М. М., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.87

УДК 518:517.948

Е.Собхі

# ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ В ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма, що часто зустрічаються під час розрахунку потенціальних стаціонарних полів різної фізичної природи [6]. Мова йтиме про одномірні рівняння

$$\int_a^b \mu(t) F(t) \ln \frac{1}{d(t,\bar{x},\bar{y})} dt = f_0(\bar{x},\bar{y}) \qquad /1/$$

Тут $\mu(t)$ - шукана функція, контур заданий рівняннями $\{x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b\}$, $F(t) = \{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{1/2}$, елемент довжини дуги $d(t,\bar{x},\bar{y}) = \{[x(t)-\bar{x}]^2 + [y(t)-\bar{y}]^2\}^{1/2}$, $\bar{x} = x(\bar{t})$, $\bar{y} = y(\bar{t})$, $a \le \bar{t} \le b$;

$$\int_a^b \mu(t) F(t) K(k) / d(t,\bar{r},\bar{z})\, dt = f_0(\bar{r},\bar{z}) . \qquad /2/$$

Тут контур описується у циліндричній системі координат $\{r = r(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b\}$; $K(k)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду [6].