При практичних розрахунках обмежуємось частинною сумою ряду /20/. За допомогою підбору параметра $\varkappa$ можна досягнути потрібної точності розв"язання задачі на певному проміжку часу з невеликою кількістю членів ряду /20/.

Перевага даного методу - отримання розв"язку в аналітичному вигляді, що дає змогу знайти його значення при будь-яких аргументах і необхідності диференціювання.

1. Бакалец В.А., Людкевич И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Львов, 1986. 2. Галазюк В.А., Людкевич И.В., Музычук А.Е. Метод интегральных уравнений в нестационарных задачах дифракции. Львов, 1984. Рукопись деп в УкрНИИНТИ № 602 Ук - 85 Дп. 3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981. 4. Справочник по специальным функциям /Под ред. Абрамовица М., Стигана М. М., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.87

УДК 518:517.948

Е.Собхі

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ В ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма, що часто зустрічаються під час розрахунку потенціальних стаціонарних полів різної фізичної природи [6]. Мова йтиме про одномірні рівняння

$$\int_a^b \mu(t)F(t)\,\ln\frac{1}{d(t,\bar{x},\bar{y})}\,dt = f_0(\bar{x},\bar{y}) \qquad /1/$$

Тут $\mu(t)$ - шукана функція, контур заданий рівняннями $\{x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b\}$, $F(t) = \{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\}^{1/2}$, елемент довжини дуги $d(t,\bar{x},\bar{y}) = \{[x(t)-\bar{x}]^2 + [y(t)-\bar{y}]^2\}^{1/2}$, $\bar{x} = x(\bar{t})$, $\bar{y} = y(\bar{t})$, $a \le \bar{t} \le b$;

$$\int_a^b \mu(t)F(t)K(k)/d(t,\bar{r},\bar{z})\,dt = f_0(\bar{r},\bar{z})\ . \qquad /2/$$

Тут контур описується у циліндричній системі координат $\{r = r(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b\}$; $K(k)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду [6].

Двовимірне рівняння

$$\int_a^b \int_c^d \sigma(u,v)\, F(u,v) / R(u,v,\hat{x})\, du\, dv = f_0(\hat{x}) \ , \qquad /3/$$

де поверхня S задана параметричними рівняннями

$$\{ x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in \Delta,\ \Delta : a \leq u \leq b,\ c \leq v \leq d \} ;$$

$\sigma(u,v)$ – шукана функція; $F(u,v)$ – елемент площі; $R(u,v,\hat{x})$ – відстань від точки спостереження $\hat{x} = \{x, y, z\}$ $\hat{x} \in S$ до точки інтегрування $(u,v) \in \Delta$. У всіх рівняннях /1/ – /3/ праві частини задані кусково неперервні функції.

Граничний контур /або поверхню/ в усіх трьох рівняннях у загальному випадку пропонується задавати за допомогою апарату граничних елементів [5], кожен з яких задається таким чином:

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \varphi_j(t)\, r_j^{(i)} \ , \quad r = (x,y) \ , \quad i = \overline{1,m} \qquad /4/$$

у плоскому випадку, де $\varphi_j(t)$ – базисні функції; $r_j^{(i)}$ – вузли елемента; $N^{(i)}$ – степінь апроксимації; m – кількість граничних елементів. Аналогічно у просторовому випадку [3]

$$x_i(u,v) = \sum_{j=1}^{N^{(i)}} P_j(u,v)\, \hat{x}_j^{(i)} \ , \quad \hat{x} = (x,y,z) \ , \ i = \overline{1,m} \ . \qquad /5/$$

Відзначимо, що у всіх рівняннях /1/ – /3/ невідома густина має сингулярну поведінку на краю границі, а також в точках її злому. Врахувати це можна відповідним зображенням густини на кожному елементі:

$$\mu_i(t) = \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \varphi_j(t)\, \mu_j^{(i)}\, \theta_i(t) \qquad /6/$$

для плоского випадку, де $\mu_j^{(i)}$ – значення функції $\mu_i(t)$ в точках $r_j^{(i)}$; $\theta_i(t)$ – функції, які задають особливість на краю контура [1]. Для двомірного рівняння задання аналогічне і має вигляд

$$\sigma_i(u,v) = \sum_{j=1}^{N^{(i)}} P_j(u,v)\, \mu_j^{(i)}\, \theta_i(u,v). \qquad /7/$$

Таким чином, і геометрія, і невідома функція в рівняннях /1/ – /3/ задаються з допомогою так званого апарату ізопараметричних перетворень / 7 /. Задовольняючи рівняння /1/ – /3/ у відповідній кількості точок спостереження, вибраних на контурі L рівняння /1/, /2/ і на поверхні S рівняння /3/, для визначення невідомих коефіцієнтів отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнтами якої будуть значення відповідних інтегралів. Вказані інтеграли матимуть у загальному випадку дві особливості: в ядрі при суміщенні точки спостереження з точкою інтегрування та густині у крайніх /згідно з зображенням/ граничних елементах. Вказані особливості виділяються аналітично / 4 /, так, що коефіцієнти матриці завжди можна визначити із заданою точністю.

Зазначимо, що дослідження ефективних способів обчислення інтегралів із заданими особливостями проведено в праці [1], результати якої свідчать на користь методу аналітичного виділення особливостей.

Таким чином, для розв"язання всіх трьох рівнянь теорії потенціалу /1/ - /3/ пропонуємо єдиний підхід, який полягає у наступному:

1/ границя і невідома густина зображаються граничними елементами з заданими особливостями;

2/ метод розв"язування - метод колокації;

3/ особливості в коефіцієнтах матриці систем лінійних алгебраїчних рівнянь виділяються аналітично;

4/ точність отриманих розв"язків перевіряється задоволенням рівнянь /1/ - /3/ у проміжкових точках. Причому ядра рівнянь /1/ - /3/ гарантують досягнення максимальної похибки саме у проміжних точках.

Розрахунки тестових прикладів і конкретних задач [2] дають змогу стверджувати, що при належному виборі степені апроксимації на елементі та кількості елементів гарантована похибка розв"язку для рівнянь /1/, /2/ не перевищує 0,1 %, а для рівняння /3/ - 0,5 %.

1. Бакалец В.А., Дорошенко Н.В. Исследование алгоритмов выделения особенностей при решении одномерных интегральных уравнений первого рода. Львов, 1986. Рукопись доп. в УкрНИИНТИ, № 1195. Ук-86. 2. Бакалец В.А., Дорошенко Н.В. Численное решение двумерных интегральных уравнений в электронной оптике с использованием изопараметрических преобразований // Теоретическая электротехника. 1984. Вып. 37. С. 96-100. 3. Бакалец В.А., Людкевич И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Львов, 1986. 4. Бакалец В.А., Щирий И.И. Выделение особенностей в плотности и ядре двумерного интегрального уравнения для сложных граничных поверхностей // Вычислительная и прикладная математика. 1985. № 56.

С. 14-17. 5. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 6. Ильин В.П. Численные методы задач электрофизики. М., 1985. 7. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.86

УДК 517.944:947

Марія Д. Мартиненко, Михайло Д. Мартиненко

ПРО МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У праці [3] запропоновано модифікований метод еквівалентної лінеаризації для розв"язування задачі Коші

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(y)b(x) + c(x) , \qquad /1/$$

$$y|_{x=x_0} = y_0 \neq 0 , \qquad /2/$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - неперервні функції на проміжку $[x_1, x_2]$, що містить в середині точку x_0; $f(y)$ - однозначна та неперервна на деякому проміжку $[y_1, y_2]$ функція, яка задовольняє на ньому умову Ліпшица

$$|f(y) - f(z)| \leq K|y - z| , \qquad /3/$$

$$K = \text{const} , \quad y, z \in [y_1, y_2] ,$$

причому $y_1 < y_0 < y_2$. Як відомо [2], при цих умовах задача /1/ - /2/ має єдиний розв"язок.

Позначимо через $\tilde{y}(x)$ розв"язок такої лінійної задачі Коші:

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + a(x)\tilde{y} = k b(x)\tilde{y} + c(x) , \qquad /4/$$

$$\tilde{y}|_{x=x_0} = y_0 , \qquad /5/$$

де

$$k = \frac{f(y_0)}{y_0} . \qquad /6/$$