С. 14-17. 5. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 6. Ильин В.П. Численные методы задач электрофизики. М., 1985. 7. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.86

УДК 517.944:947

Марія Д. Мартиненко, Михайло Д. Мартиненко

ПРО МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У праці [3] запропоновано модифікований метод еквівалентної лінеаризації для розв"язування задачі Коші

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(y)b(x) + c(x) , \qquad /1/$$

$$y|_{x=x_0} = y_0 \neq 0 , \qquad /2/$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - неперервні функції на проміжку $[x_1, x_2]$, що містить в середині точку x_0; $f(y)$ - однозначна та неперервна на деякому проміжку $[y_1, y_2]$ функція, яка задовольняє на ньому умову Ліпшица

$$|f(y) - f(z)| \leq K|y - z| , \qquad /3/$$

$$K = \text{const} , \quad y, z \in [y_1, y_2] ,$$

причому $y_1 < y_0 < y_2$. Як відомо [2], при цих умовах задача /1/ - /2/ має єдиний розв"язок.

Позначимо через $\tilde{y}(x)$ розв"язок такої лінійної задачі Коші:

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + a(x)\tilde{y} = k\,b(x)\tilde{y} + c(x) , \qquad /4/$$

$$\tilde{y}|_{x=x_0} = y_0 , \qquad /5/$$

де

$$k = \frac{f(y_0)}{y_0} . \qquad /6/$$

Явний вигляд $\tilde{y}(x)$ можна записати у квадратурах за відомими формулами *.

Звичайними міркуваннями, пов"язаними з використанням еквівалентних задачам /I/ - /2/ та /4/ - /5/ інтегральних рівнянь, можна довести оцінки близькості їх розв"язків

$$\max_{|x-x_0|\le h} |y-\tilde{y}| \le A h \max_{|x-x_0|\le h} |\tilde{y}(x) - y_0| ,$$

$$A = \max_{|x-x_0|\le h} |b(x)| \cdot \left[K + \left|\frac{f(y_0)}{y_0}\right|\right] \cdot \left\{1 - h\left[\max_{|x-x_0|\le h} |a(x)| + K \max_{|x-x_0|\le h} |b(x)|\right]\right\}^{-1} ; \qquad /7/$$

$$\max_{|x-x_0|\le h} |y-\tilde{y}| \le \frac{B\left[K + \left|\frac{f(y_0)}{y_0}\right|\right]}{1 - BKh} \max_{|x-x_0|\le h} |\tilde{y} - y_0| \cdot h ;$$

$$B = \left(\max_{|x-x_0|\le h} e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\right) \cdot \left(\max_{|x-x_0|\le h} e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\right) \max_{|x-x_0|\le h} |b(x)| . \qquad /8/$$

Ці нерівності вдається уточнити, оскільки розв"язок задачі /4/ - /5/ виписується в явному вигляді і тому можна оцінити $\max_{|x-x_0|\le h} |\tilde{y} - y_0|$ через $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ та h .

Нерівності /7/ та /8/ показують, що $\tilde{y}$ можна розглядати як наближений розв"язок нелінійної задачі /I/-/2/.

Як приклад візьмемо задачу [I]

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}1(x^3 + y^3) , \qquad /9/$$

$$y|_{x=0} = 1 . \qquad /10/$$

Точний розв"язок цієї задачі будуємо з допомогою методу рядів:

$$y = 1 + 10^{-1}x + 10^{-2}x^2 + 10^{-3}x^3 + 2{,}51\cdot 10^{-2}x^4 + 1{,}101\cdot 10^{-3}x^5 +$$
$$+ 1{,}17\cdot 10^{-4}x^6 + 1{,}3\cdot 10^{-5}x^7 + 1{,}5\cdot 10^{-6}x^8 + \ldots \qquad /11/$$

---

* Якщо $y_0 = 0$, то за допомогою заміни $y = d + z$ одержуємо для нової невідомої функції z ненульову початкову умову.

За формулами /4/ – /5/ – /6/ для y маємо задачу

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = 0{,}1x^3 + 0{,}1\tilde{y} \; .$$

$$\tilde{y}|_{x=0} = 1 \; .$$

Звідси [2]

$$\tilde{y} = 6001e^{0{,}1x} - [x^3 + 30x^2 + 600x + 6000] =$$

$$= 1 + 0{,}1x + 5\cdot 10^{-3}x^2 + 1{,}7\cdot 10^{-4}x^3 + 2{,}5\cdot 10^{-2}x^4 + \ldots \qquad (12)$$

При $x \in [0,1]$ точний розв"язок за формулою /11/ відрізняється від наближеного за формулою /12/ щонайбільше на 1 %.

На закінчення відзначимо, що запропонований метод еквівалентної лінеаризації можна узагальнити на системи нелінійних рівнянь першого порядку спеціального виду, а також нелінійні рівняння вищих порядків.

1. К у н ц К.С. Численный анализ. К., 1964. 2. Л о п а т и н с к и й Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. К., 1984. 3. М а р т и н е н к о Марія Д., М а р т и н е н к о Михайло Д. Модифікований метод еквівалентної лінеаризації для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.27. С. 55-57.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.86

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ЕКВІВАЛЕНТНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЛЬЄНАРА

Рівняння Льєнара, що відіграють важливу роль у теорії нелінійних коливань, мають такий вигляд [3]:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad , \qquad /1/$$

де штрихом позначаємо диференціювання по незалежній змінній t .

Детальний якісний аналіз цього рівняння наведено у праці [1].

Це рівняння еквівалентне такій системі:

$$x' + F(x) - y = 0 \; ,$$

$$y' + g(x) = 0 \; , \qquad /2/$$