За формулами /4/ - /5/ - /6/ для y маємо задачу

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = 0{,}1x^3 + 0{,}1\tilde{y} \; .$$

$$\tilde{y}|_{x=0} = 1 \; .$$

Звідси [2]

$$\tilde{y} = 6001e^{0{,}1x} - [x^3 + 30x^2 + 600x + 6000] = \\ = 1 + 0{,}1x + 5\cdot 10^{-3}x^2 + 1{,}7\cdot 10^{-4}x^3 + 2{,}5\cdot 10^{-2}x^4 + \ldots \quad . \qquad (12)$$

При $x \in [0,1]$ точний розв"язок за формулою /11/ відрізняється від наближеного за формулою /12/ щонайбільше на 1 %.

На закінчення відзначимо, що запропонований метод еквівалентної лінеаризації можна узагальнити на системи нелінійних рівнянь першого порядку спеціального виду, а також нелінійні рівняння вищих порядків.

1. Кунц К.С. Численный анализ. К., 1964. 2. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. К., 1984. 3. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Модифікований метод еквівалентної лінеаризації для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.27. С. 55-57.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.86

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ЕКВІВАЛЕНТНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЛЬЄНАРА

Рівняння Льєнара, що відіграють важливу роль у теорії нелінійних коливань, мають такий вигляд [3]:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad , \qquad /1/$$

де штрихом позначаємо диференціювання по незалежній змінній t.

Детальний якісний аналіз цього рівняння наведено у праці [1].

Це рівняння еквівалентне такій системі:

$$x' + F(x) - y = 0 \; ,$$
$$y' + g(x) = 0 \quad , \qquad /2/$$

де

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx \quad . \qquad /3/$$

Тому надалі розглядаємо систему /2/ у припущенні, що функції $F(x)$ і $g(x)$ визначені у проміжку $[a, b]$ та задовольняють на ньому умову Ліпшиця зі сталими M та N :

$$\begin{gathered} |F(x_1) - F(x_2)| \le M\,|x_1 - x_2| \,, \\ |g(x_1) - g(x_2)| \le N\,|x_1 - x_2| \,, \\ x_1,\, x_2 \in [a, b] \,. \end{gathered} \qquad /4/$$

Якщо $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то $F(x)$ визначена формулою /3/ і задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $M = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ [2].

Розв"язок системи /2/ шукаємо при умові *

$$\begin{aligned} x|_{t=t_0} &= x_0 \ne 0 \,, \\ y|_{t=t_0} &= y_0 \,. \end{aligned} \qquad /5/$$

За наближений розв"язок задачі /2/-/5/ візьмемо розв"язок такої лінійної задачі Коші:

$$\begin{aligned} \tilde{x}' + K_1 \tilde{x} - \tilde{y} &= 0 \,, \\ \tilde{y}' + K_2 \tilde{x} &= 0 \,; \end{aligned} \qquad /6/$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}|_{t=t_0} &= x_0 \,, \\ \tilde{y}|_{t=t_0} &= y_0 \,, \end{aligned} \qquad /7/$$

де

$$K_1 = \frac{F(x_0)}{x_0} \;; \qquad K_2 = \frac{g(x_0)}{x_0} \,. \qquad /8/$$

Функції $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ легко виписати за відомими методами [2]. При цьому коливні незатухаючі розв"язки отримаємо, коли $K_1 = 0$, $K_2 > 0$, а коливні затухаючі $-K_1^2 - 4K_2 < 0$, $K_1 > 0$.

Для оцінки близькості так отриманого наближеного і точного розв"язків зауважимо, що їх різниця $u = x - \tilde{x}$, $v = y - \tilde{y}$ є розв"язком такої системи інтегральних рівнянь :

$$\begin{aligned} u &= -\int_{t_0}^{t} [F(x) - K_1 \tilde{x} - v]\, d\tau \,, \\ v &= -\int_{t_0}^{t} [g(x) - K_2 \tilde{x}]\, d\tau \,. \end{aligned} \qquad /9/$$

---

* Якщо $x_0 = 0$, то заміною $z = x + c$ можна для z отримати ненульову початкову умову при $t = t_0$.

З /9/ на основі /4/ маємо

$$\max_{t_1\le t\le t_2}|u| \le \frac{\left[M+\left|\frac{F(x_0)}{x_0}\right|\right]\max\limits_{t_1\le t\le t_2}|x-x_0|}{1-M\cdot|t_1-t_2|}\cdot|t_1-t_2| ,$$

$$\max_{t_1\le t\le t_2}|v| \le \left\{\frac{N\left[M+\left|\frac{F(x_0)}{x_0}\right|\right]}{1-M\cdot|t_1-t_2|}+\left[N+\left|\frac{g(x_0)}{x_0}\right|\right]\right\}\cdot\max_{t_1\le t\le t_2}|\tilde{x}-x_0|\cdot|t_1-t_2|. \qquad /10/$$

Оцінки /10/ мають загальний характер і їх можна уточнити для конкретних видів рівнянь Льєнара. Наприклад, для рівняння

$$x''+\omega^2 x+g(x)=0 , \qquad /11/$$

наближений розв"язок $\tilde{x}$ можна будувати на основі рівняння

$$\tilde{x}''+\omega^2\tilde{x}+\kappa_2\tilde{x}=0 , \qquad /12/$$

де $\kappa_2=\frac{g(x_0)}{x_0}$, а початкові умови збігаються з умовами Коші для рівняння /11/. Тоді різниця $u=x-\tilde{x}$ є розв"язком рівняння

$$u''+\omega^2 u+g(x)-\kappa_2\tilde{x}=0$$

при нульових початкових умовах.

Тому

$$u(x)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-\tau)\left[g(x(\tau))-\kappa_2\tilde{x}(\tau)\right]d\tau .$$

Звідси, враховуючи /4/, маємо

$$\max_{t_1\le t\le t_2}|u(t)|\le\frac{\left[N+\left|\frac{g(x_0)}{x_0}\right|\right]\max\limits_{t_1\le t\le t_2}\left|\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\omega}|\sin\omega(t-\tau)|d\tau\right|}{1-M\max\limits_{t_1\le t\le t_2}\left|\frac{1}{\omega}\int_{t_0}^{t}|\sin\omega(t-\tau)|d\tau\right|}\cdot\max_{t_1\le t\le t_2}|x-x_0| .$$

Ця оцінка записана у вигляді, що охоплює випадки $\omega\ne 0$ та $\omega=0$.

<u>Приклад</u>. Для ілюстрації ефективності запропонованого вище методу еквівалентної лінеаризації розв"яжемо таку задачу Коші *:

$$x''+\omega_0^2 x+hx^3=0 ,$$

$$x\big|_{t=0}=A_0 ,\quad x'\big|_{t=0}=0 . \qquad /13/$$

* У сучасній літературі цей частинний випадок рівняння Льєнара носить назву рівняння Дюффінга [1].

На основі /12/ наближений розв"язок задач /13/ має вигляд

$$\tilde{x} = A_0 \cos\sqrt{\omega_0^2 + hA_0^2}\,t \ . \qquad /14/$$

Точний розв"язок задачі /13/ виражаємо через еліптичну функцію Якобі

$$x = A_0 \operatorname{cn}\sqrt{\omega_0^2 + hA_0^2}\,t \ . \qquad /15/$$

З /14/ та /15/ випливає, що як точний, так і наближений розв"язки розглядуваної задачі є періодичними функціями t .

З /15/ маємо для періоду T точного розв"язку

$$T = \frac{4K(k)}{\sqrt{\omega_0^2 + hA_0^2}},$$

де $K(k)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду,

$$k^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{hA_0^2}{\omega_0^2 + hA_0^2} \ .$$

Розкладаючи $K(k)$ в ряд, записуємо

$$T = \tilde{T}\left\{1 + \frac{1}{8}\,\frac{hA_0^2}{\omega_0^2 + hA_0^2} + \frac{9}{256}\left(\frac{hA_0^2}{\omega_0^2 + hA_0^2}\right)^2 + \dots\right\} ,$$

причому

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + hA_0^2}}$$ - період наближеного розв"язку,

даного /14/.

Формули /14/, /15/ і /16/, /17/ показують, що метод еквівалентної лінеаризації привів до розв"язку, який досить наближає точний "у цілому".

1. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М., 1986. 2. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. К., 1984. 3. Рейсинг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.86