УДК 517.9

Ю.М.Сибіль

ІСНУВАННЯ РОЗВ"ЯЗКУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ТА НЕЙМАНА У ВИПАДКУ РОЗІМКНУТИХ ГРАНИЦЬ

У праці [4] розглянуто двомірну задачу Діріхле для рівняння Гельмгольца

$$\Delta u(x) + \varkappa^2 u(x) = 0, \quad \operatorname{Im} \varkappa \leq 0, \; x \in \mathbb{R}^2 \setminus L,$$
$$u_\pm(x) = \gamma_\pm(x), \qquad x \in L, \qquad /1/$$

де $L = \bigcup_{j=1}^{m} L_j$ – об"єднання гладких розімкнутих контурів без спільних точок; c_{2j-1}, c_{2j} – точки кінців L_j. Крім того, функція $u(x)$ задовольняє умову на кінцях L та умову на нескінченності. Показано, що ця задача еквівалентна інтегральному рівнянню першого роду

$$K\tau \equiv \int_L Q(x,y)\tau(y)\,ds_y = g(x), \quad x \in L, \qquad /2/$$

яке має єдиний розв"язок для довільної функції $g \in C^{1,\alpha}(L)$. Тут $Q(x,y) = 1/4i\, H_0^{(2)}(\varkappa\, r(x,y))$ – фундаментальний розв"язок рівняння /1/.

Нехай $\omega(y)$ – деяка гладка функція, що обертається в нуль порядку $0 < \gamma_j < 1$ у кінці c_j, $j = \overline{1,2m}$. Розглянемо гільбертові простори $\mathcal{L}_2(\omega, L)$ і $W_2^1(\omega, L)$ зі скалярними добутками:

$$(\sigma, \gamma)_2 = \int_L \sigma(y)\overline{\gamma(y)}\omega(y)\,ds_y,$$
$$(f, g)_{1,2} = (f,g)_2 + \left(\frac{df}{ds_y}, \frac{dg}{ds_y}\right)_2,$$

де $\vec{s_y}$ – дотична до L у точці y.

<u>Теорема 1</u>. Рівняння /2/ має єдиний розв"язок для довільної функції $g \in W_2^1(\omega, L)$. Існує обмежений обернений оператор $K^{-1}: W_2^1(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L)$.

<u>Доведення</u>. Продиференціюємо ліву та праву частини /2/:

$$F\tau \equiv \int_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x}\tau(y)\,ds_y = \frac{dg(x)}{ds_x} = \varphi(x), \quad x \in L. \qquad /3/$$

Оператор $F: \mathcal{L}_2(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L)$ обмежений, бо складається із сингулярного оператора, обмеженого в $\mathcal{L}_2(\omega, L)$ [1, 2] і цілком неперервного доданку. Розглянемо оператор F^*, спряжений до F. Із рівності $(F\tau, \sigma)_2 = (\tau, F^*\sigma)_2$ маємо

$$F^*\sigma = \frac{1}{\omega(y)} \int_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x}\sigma(x)\omega(x)\,ds_x.$$

Знайдемо $\ker F^*$; $б(x) \in \ker F^*$, якщо

$$\int_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x} \overline{б(x)}\, \omega(x)\, ds_x = 0 . \qquad /4/$$

Можна показати, що функція $z(x) = \overline{б(x)}\,\omega(x)$ обертається в нуль на кінцях L. Тому рівняння /4/ можна записати у такому вигляді:

$$\int_L Q(x,y) \frac{dz(x)}{ds_x}\, ds_x = 0 .$$

З теореми єдиності дістаємо $z(x) = \mathrm{const}$, тобто $б(x) \equiv 0$ на L. Отже, $\ker F^* = \emptyset$. Оскільки оператор F замкнутий і $\ker F^* = \emptyset$, то $\mathrm{im}\, F = \overline{\mathrm{im}\, F} = \mathcal{L}_2(\omega, L)$. Використовуючи зв"язок між операторами K і F, бачимо, що $\mathrm{im}\, K = W_2^1(\omega, L)$. Таким чином, для довільної функції $g \in W_2^1(\omega, L)$ існує єдиний розв"язок $\tau \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$ рівняння /2/. Оскільки обмежений оператор K взаємно однозначно відображає $\mathcal{L}_2(\omega, L)$ на $W_2^1(\omega, L)$, то за теоремою Банаха існує обмежений обернений оператор $K^{-1}: W_2^1(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L)$.

Розглянемо задачу Неймана для рівняння Гельмгольца, тобто задачу з крайовою умовою

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial n_x}\right)^{\pm} = \gamma^{\pm}(x), \quad x \in L .$$

У праці [3] доведено еквівалентність цієї задачі та сингулярного інтегро-диференціального рівняння першого роду

$$H\tau \equiv \int_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x} \frac{d\tau(y)}{ds_y} ds_y + \varkappa^2 \int_L Q(x,y)(\vec{n}_x \cdot \vec{n}_y)\, \tau(y)\, ds_y = g(x) \qquad /5/$$

з умовою

$$\tau(c_i) = 0, \qquad i = \overline{1, 2m}. \qquad /6/$$

Розглянемо гільбертів простір $\overset{0}{W}{}_2^1(\omega, L)$ функцій з $W_2^1(\omega, L)$, що обертаються в нуль на кінцях L.

<u>Теорема 2</u>. Рівняння /5/ має єдиний розв"язок $\tau \in \overset{0}{W}{}_2^1(\omega, L)$ для довільної функції $g \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$. Існує обмежений обернений оператор $H^{-1}: \mathcal{L}_2(\omega, L) \to \overset{0}{W}{}_2^1(\omega, L)$.

<u>Доведення</u>. Оператор H можна зобразити у вигляді

$$H\tau = F_0 \tau' + T\tau , \qquad /7/$$

де $T: \overset{0}{W}{}_2^1(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L)$ – цілком неперервний оператор, а

$$F_0 \varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial s_x} \ln r(x,y)\, \varphi(y)\, ds_y .$$

Аналогічно, як і для оператора F, можна показати, що $\ker F_0^* = \emptyset$. Тому $\mathrm{im}\, F_0 = \mathcal{L}_2(\omega, L)$, $\dim \ker F_0 = m$, тобто існує m лінійно незалежних функцій $\varphi_k^{(0)}(y)$, $k = \overline{1, m}$, таких, що $F_0 \varphi_k^{(0)} = 0$, причому $\varphi_k^{(0)}(y) = 0$, $y \in L_j$, $j \neq k$.

Розглянемо оператор $H_0 : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L)$;

$$H_0 \tau = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial s_x} \ln z(x,y) \frac{d\tau(y)}{ds_y} ds_y .$$

Оскільки $\operatorname{im} F_0 = \mathcal{L}_2(\omega, L)$, то для довільної функції $f \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$ існує функція $\tau(y)$ така, що $H_0 \tau = f$, $\tau(y) = \tau_j(y)$, $y \in L_j$, а $\tau_j(y)$ можна зобразити як

$$\tau_j(y) = g_j^*(y) + a_j \tau_j^{(0)}(y) + d_j ,$$

де $\varphi_j^{(0)}(y) = \dfrac{d\tau_j^{(0)}(y)}{ds_y}$, a_j і d_j – довільні константи; $H_0 g^* = f$.

Покажемо, що константи a_j і d_j можна підібрати таким чином, коли $\tau_j(c_{2j-1}) = \tau_j(c_{2j}) = 0$, тобто система

$$\begin{cases} a_j \tau_j^{(0)}(c_{2j-1}) + d_j = -g_j^*(c_{2j-1}), \\ a_j \tau_j^{(0)}(c_{2j}) + d_j = -g_j^*(c_{2j}) \end{cases}$$

має єдиний розв"язок. Нехай $\tau_j^{(0)}(c_{2j-1}) = \tau_j^{(0)}(c_{2j}) = p$. Тоді функція $\tau_j^*(y) = \tau_j^{(0)}(y) - p$ є розв"язком рівняння $H\tau^* = 0$ з умовою /6/. З теореми єдиності / 3 / отримуємо $\tau_j^*(y) = 0$, тобто $\tau_j^{(0)}(y) \equiv p$, що неможливо.

Таким чином, ми показали, що для довільної функції $f \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$ існує єдина функція $\tau \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega, L)$ така, що $H_0 \tau = f$. Тому оператор H_0 є нетерівським і $\operatorname{ind} H_0 = 0$. З /7/ випливає, що $\operatorname{im} H = \mathcal{L}_2(\omega, L)$, бо $\operatorname{ind} H = 0$, а $\dim \ker H = 0$. Отже, рівняння /6/ має єдиний розв"язок $\tau(y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega, L)$ для довільної функції $g \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$. Існування обмеженого оператора $H^{-1} : \mathcal{L}_2(\omega, L) \to \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega, L)$ випливає з теореми Банаха.

1. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973. 2. Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения // Усп. мат. наук. 1948. Т.3. Вып.3. С.29-112. 3. Сибіль Ю.М. Задача Неймана для рівняння Гельмгольца на площині у випадку розімкнутих границь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 25. С. 40–44. 4. Hayashi J. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary // J. Math Anal. Appl. 1973 Vol.44 P.489-530

Стаття надійшла до редколегії 27.II.97