УДК 533.6.013.42

О.В. Блажиєвська

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ТИСКУ У СИСТЕМІ "РІДКИЙ ПІВПРОСТІР – ПРУЖНА ПЛАСТИНА"

Відомо [2], що при дослідженні поля тисків у достатньо віддалених від пластини точках спостереження слід враховувати нелінійні властивості рідини навіть у тому випадку, коли амплітуди хвиль деформації малі.

Дослідимо поле тисків в ідеальній стисливій рідині, яка заповнює півпростір і стикається з безмежною пружною пластиною.

Введемо позначення: x^*, z^*, t^* – декартові координати і час; w^*, $2h^*$ – прогин і товщина пластинки; ρ_1^* – густина матеріалу пластинки; ρ_0^* – початкова густина рідини; c_0^* – швидкість звуку у незбуреній рідині; p^* – збурення тиску; q_0^* – постійна, яка має розмірність тиску; $t = c_0^* t^* (2h^*)^{-1}$; $\rho_1 = \rho_1^* / \rho_0^*$; $p = p^* / q_0^*$; $(x, z, w, 2h) = (x^*, z^*, w^*, 2h^*)/(2h^*)$.

Припустимо, що пластинка виводиться зі стану спокою рівномірно розподіленою нормальною силою $q^* = q_0^* \, q(t) \times [H(t) - H(t-t_0)]$, де $q(t)$ – задана неперервна функція; H – функція Хевісайда.

У лінійній постановці одержимо наступну початково-крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \; ; \qquad /1/$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{q_0^*}{\rho_1^* c_0^{*2}} \left[q(t)\,(H(t) - H(t-t_0)) - p(z,t)\big|_{z=0} \right] ; \qquad /2/$$

$$p\big|_{t=0} = \frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{t=0} = w\big|_{t=0} = \frac{dw}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \; ; \qquad /3/$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{\rho_0^* c_0^{*2}}{q_0^*} \frac{dw}{dt^2} \; ; \qquad /4/$$

$$\lim_{z \to \infty} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \; . \qquad /5/$$

Легко переконатись, що шуканий безрозмірний тиск визначається за формулою

$$p = \frac{\rho_0^*}{\rho_1^*} \int_0^{t-z} q(\tau) \left[H(\tau) - H(\tau - t_0) \exp\left\{ -\frac{\rho_0^*}{\rho_1^*} (t - z - \tau) \right\} \right] d\tau \; . \qquad /6/$$

Очевидно, що $p = 0$, коли $t \geq z$;

$$p = \frac{\rho_0^*}{\rho_1^*} \int_0^{t_0} q(\tau) \exp\left\{-\frac{\rho_0^*}{\rho_1^*} (t - z - \tau)\right\} d\tau, \quad t \geq z + t_0 \; . \qquad /7/$$

При записі нелінійної моделі враховуємо, що рух одновимірний. Позначимо через v^* і ρ^* проекцію швидкості рідини на вісь z^* і густину. Нехай $v = v^*/c_0^*$, $\rho = \rho^*/\rho_0^*$. Тоді одержуємо таку математичну модель задачі:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{q_0^*}{\rho_0^* c_0^{*2}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \; ; \qquad /8/$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = 0 \; ; \qquad /9/$$

$$p = B(\rho^{\varkappa} - 1) \; ; \qquad /10/$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{q_0^*}{\rho_1^* c_0^{*2}} \left\{ q(t)\left[H(t) - H(t - t_0)\right] - p(z, t)\big|_{z=w} \right\}; \qquad /11/$$

$$w\big|_{t=0} = \frac{dw}{dt}\Big|_{t=0} = v\big|_{t=0} = 0 \, , \quad \rho\big|_{t=0} = 1 \; ; \qquad /12/$$

$$v\big|_{z=w} = \frac{dw}{dt} \; ; \qquad /13/$$

$$\lim_{z \to \infty} p = 0 \; . \qquad /14/$$

Тут $\varkappa$ - показник адіабати; $B = B_0/q_0^*$; B_0 - відома постійна [1].

Використовуючи підхід Рімана [3] до побудови розв"язку задачі про просту розбіжну хвилю, /8/-/14/ зводимо до наступної початково-крайової задачі для визначення функцій $p(z,t)$ і $w(t)$:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{q_0^*}{\rho_1^* c_0^*} \left\{ q(t)[H(t) - H(t - t_0)] - B\left[\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{dw}{dt}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}} - 1\right]\right\}; \qquad /15/$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\left(1 + \frac{p}{B}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa}} - \frac{2}{\varkappa - 1}\right]\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \; ; \qquad /16/$$

$$p\big|_{t=0} = 0 \; ; \qquad /17/$$

$$w\big|_{t=0} = \frac{dw}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \quad ; \qquad /18/$$

$$p\big|_{z=w} = B\left[\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}\,\frac{dw(t)}{dt}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}-1\right] . \qquad /19/$$

Таким чином, знаходження прогину пластинки зводиться до розв"язування задачі Коші для звичайного нелінійного диференціального рівняння /15/ при умовах /18/. Якщо $dw/dt = 1/c_0^* \; dw/dt^* \ll 1$ то

$$w(t) = \frac{1}{\varkappa B}\int_0^t q(\tau)\left[H(\tau)-H(\tau-t_0)\right]\left[1-\exp\left\{-\frac{\rho_0^*}{\rho_1^*}(t-\tau)\right\}\right]d\tau . \qquad /20/$$

Неявний розв"язок задачі /16/, /17/, /19/ визначається формулами

$$p(z,t) = B\left\{\left[1+\frac{\varkappa-1}{2}\,\frac{dw(\varphi)}{d\varphi}\right]^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}-1\right\} , \qquad /21/$$

де функцію φ знаходимо з рівняння

$$z = w(\varphi) + \left[1+\frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{dw(\varphi)}{d\varphi}\right](t-\varphi) .$$

Так само, як у лінійному наближенні /7/, маємо $p(z,t) \equiv 0, z \geq t$.

1. Г а л и е в Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем. К., 1981. 2. Н и г у л У.К. Эхо-сигналы от упругих объектов. Таллин, 1976. 3. У и з е м Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.87