УДК 539.3

Р.І.Мокрик, Ю.О.Пир"єв

ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕСУ ПОШИРЕННЯ ЗБУРЕНЬ У ТВЕРДОМУ ТІЛІ З УРАХУВАННЯМ ЗВ"ЯЗНОСТІ МЕХАНІЧНИХ, ТЕПЛОВИХ І ДИФУЗІЙНИХ ЯВИЩ

Поширення збурень у твердому тілі з урахуванням зв"язності механічних, теплових і дифузійних явищ описує система диференціальних рівнянь [4, 6] відносно вектора переміщень $\vec{u}$, приросту температури θ_1 і хімічного потенціалу θ_2 :

$$\square_2 \vec{u} + (\lambda' + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \vec{X} = \vec{\nabla}(\gamma_1\theta_1 + \gamma_2\theta_2), \qquad /1/$$

$$\hat{D}_n\theta_n = \gamma_n\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + d\dot{\theta}_m - W_n, \quad n = 1,2, \quad n+m = 3,$$

де $\hat{D}_n = \delta_n\Delta - a_n\partial_t$; $\square_1 = \square_2 + (\lambda' + \mu)\Delta$; $\square_2 = \mu\Delta - \rho\partial_t^2$; Δ – оператор Лапласа; $\vec{\nabla}$ – оператор Гомільтона; λ', μ, γ_n, δ_n, d, $a_n (n=1,2)$ – відомі пружні, теплові та дифузійні постійні; $\vec{X}$ – вектор масової сили; W_1, W_2 – відповідно джерело тепла та маси, яка дифундує в тілі.

Використовуючи інтегральне перетворення Фур"є, розв"язок системи рівнянь /1/ можна записати у формі

$$\vec{u} = \hat{P}_6(\Delta, \partial_t)\vec{f} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\hat{\Gamma}\vec{f}) + \hat{P}_1\vec{\nabla}\Psi_1 + \hat{P}_2\vec{\nabla}\Psi_2,$$

$$\theta_n = \square_2\hat{P}_n\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{f}} + \hat{D}_{1m}\Psi_n + \hat{B}\Psi_m, \quad n+m=3, \quad n=1,2, \qquad /2/$$

де функції $\vec{f}$, Ψ_n повинні бути розв"язками рівнянь

$$\square_2\hat{P}_6(\Delta, \partial_t)\vec{f} = -\vec{X}, \quad \hat{P}_6(\Delta, \partial_t)\Psi_n = -W_n, n=1,2. \qquad /3/$$

Введені в /2/, /3/ оператори мають вигляд

$$\hat{D}_{1n} = \square_1\hat{D}_n - \gamma_n^2\Delta\partial_t, \quad \hat{P}_n = \gamma_n\hat{D}_m + \gamma_m d\partial_t, \quad n=1,2, \; n+m=3,$$

$$\hat{\Gamma} = (\lambda' + \mu)\square_{34} + (\gamma_2\hat{P}_2 + \gamma_1\hat{P}_1)\partial_t, \quad \hat{B} = d\square_1 + \gamma_1\gamma_2\Delta\partial_t,$$

$$\square_{34} = \hat{D}_1\hat{D}_2 - d^2\partial_t^2, \quad \hat{P}_6(\Delta, \partial_t) = \varkappa_0\sum_{m/2=0}^{3}\Delta^{m/2}a_m(\partial_t),$$

$$a_0(\partial_t) = -(\varepsilon_3/c_1^2)\partial_t^4, \quad a_2(\partial_t) = (\varepsilon_3 + \varepsilon_4)\partial_t^2 + (\varepsilon_1/c_1^2)\partial_t^3,$$

$$a_4(\partial_t) = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\partial_t - c_1^{-2}\partial_t^2, \quad a_6(\partial_t) = 1, \quad \varkappa_0 = \delta_1\delta_2(\lambda' + 2\mu),$$

де

$$\varepsilon_1=(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2)^{-1};\quad \varepsilon_2=(\varepsilon_\theta\lambda_2+\varepsilon_\varphi\lambda_1)(\lambda_1\lambda_2)^{-1};$$

$$\varepsilon_3=(1-\delta^2)(\lambda_1\lambda_2)^{-1};\quad \varepsilon_4=(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi-2\sqrt{\varepsilon_\theta\varepsilon_\varphi}\,\delta)(\lambda_1\lambda_2)^{-1};$$

$$\lambda_1=\delta_1/a_1;\quad \lambda_2=\delta_2/a_2;\quad \delta=d/\sqrt{a_1a_2};$$

$$\varepsilon_\theta=\gamma_1^2a_1^{-1}(\lambda'+2\mu)^{-1};\quad \varepsilon_\varphi=\gamma_2^2a_2^{-1}(\lambda'+2\mu)^{-1},$$

ε_θ, ε_φ, δ – відповідно безрозмірні коефіцієнти зв"язності теплових і дифузійних явищ з механічними, а також між собою.

Зауважимо, що наведене зображення має оператори меншої розмірності, ніж аналогічні оператори у зображених у праці [6].

Представлення /2/ /3/ дає змогу записати дисперсійне рівняння

$$[(-iK)^2-c_2^2(-i\omega)^2]\hat{P}_6((-iK)^2,-i\omega)=0,\quad K^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2,$$

яке має вісім коренів $K_j(\omega)$ $j=\overline{1,8}$ /характеристичних параметрів/, причому $K_{1,3,5,7}(\omega)=-K_{2,4,6,8}(\omega)$, $K_1(\omega)=\omega/c_2$.

Для характеристичних параметрів притаманні такі властивості:

1. $$K_3(\omega)\sim\omega/c_1+i\eta,\quad \omega\to\infty,\quad \eta=\varepsilon_2c_1/2;$$

$$K_j(\omega)\sim i\sqrt{-i\omega m_j},\quad \omega\to\infty,\quad j=5,7;$$

$$m_j=(\varepsilon_1\pm\sqrt{\varepsilon_1^2-4\varepsilon_3})/2,\quad j=5,7;$$

2. $$K_3(\omega)\sim\omega/(c_1c_0)+i\omega^2\tau^2/4,\quad \omega\to0,\quad c_0=\sqrt{1+\varepsilon_4/\varepsilon_3};$$

$$K_j(\omega)\sim i\sqrt{-i\omega n_j},\quad \omega\to0,\quad j=5,7;$$

$$\tau^2=2(c_0^5c_1^3)^{-1}[\lambda_1(\sqrt{\varepsilon_\theta}-\delta\sqrt{\varepsilon_\varphi})^2+\lambda_2(\sqrt{\varepsilon_\varphi}-\delta\sqrt{\varepsilon_\theta})^2](1-\delta^2)^{-2};$$

$$n_j=(\varepsilon_1+\varepsilon_2\pm\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-4(\varepsilon_3+\varepsilon_4)})/2,\quad j=5,7;$$

3. $\operatorname{Im}K_j(\omega)>0$, $j=1,3,5,7$, якщо $\operatorname{Im}\omega>0$.

Кожному кореню $K_j(\omega)$ $j=1,3,5,7$ дисперсійного рівняння відповідає свій тип хвилі. Наприклад, кореню $K_1(\omega)$ відповідає поперечна хвиля, яка описується хвильовим рівнянням з оператором $\square_2$ і поширюється зі швидкістю c_2 . Вона безпосередньо не залежить від температурних і дифузійних явищ. Кореням $K_j(\omega)$ $j=3,5,7$ відповідають модифікована повздовжна, теплова і дифузійна хвилі.

Проводячи викладки, аналогічно як у працях [1, 2], можна показати, що коли задані функції $\vec{X}$, W_n $(n=1,2)$ належать простору узагальнених функцій повільного росту S', які дорівнюють нулю для $t<0$

$$(\vec{X}, W_n)\, e^{-\omega_2 t} \in S', \quad \omega_2 \geq 0,$$

то і розв"язок системи /1/ належить цьому ж простору:

$$(\vec{u}, \theta_n)\, e^{-\omega_2 t} \in S', \; \omega_2 \geq 0, \; n=1,2.$$

Розглянута модель належить до моделей середовищ з дисперсією і поглинанням. При поширенні імпульсів у цьому середовищі з допомогою аналізу коренів дисперсійного рівняння можна виділити деякі характерні властивості.

Згідно з властивістю /1/ точкове осесиметричне збурення полів поширюється з безмежною швидкістю /має дифузійний характер/. У момент часу $t=|x|/c_1$ /прибуття хвилі зі швидкістю повздовжної хвилі/ також наявне збурення полів, але воно експоненціально зникає при віддаленні від джерела. Коефіцієнт затухання γ , що пропорційний ε_2 , свідчить, що вплив дифузії приводить до збільшення коефіцієнта затухання, яке не залежить від зв"язності тепла і дифузії. Це випливає з розв"язку задачі про джерела, яка розв"язується з використанням перетворення Фур"є-Лапласа і теореми Абеля про відповідність малих значень часу великим значенням параметра $-i\omega$.

Згідно з властивістю /2/ основна частина збурень набуває характерної форми / 3 /, яка рухається зі швидкістю $c_1 c_0$. У випадку поширення імпульсу гаусоподібної форми його ширина зростає пропорційно $\sqrt{t}\,\tau$, а амплітуда падає пропорційно $1/\sqrt{t}\,\tau$. Вигляд сталих τ і c_0 дає змогу зробити висновок про те, що дифузія приводить до більш швидкого розповзання імпульсу, причому цей ефект зменшується за рахунок взаємозв"язку дифузійних і теплових процесів. Дифузія зумовлює також зростання швидкості поширення основної частини збурення, яка, в свою чергу, зменшується за рахунок зв"язності дифузійних і теплових явищ. Ці висновки випливають також з розв"язку задачі про точкове збурення полів, яке отримують з допомогою методу перевалу / 5 /.

1. М о к р и к Р.И., П ы р ь е в Ю.А. Динамические свойства решений задач термоупругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 4. С. 44-47. 2. М о к р и к Р.И., П ы р ь е в Ю.А. Свойства решений динамических задач обобщенной связанной термоупругости // Прикл. математика и механика. 1981. Т.45. Вып. 5. С. 912-918. 3. М о к р и к Р.И., П ы р ь е в Ю.А. Обобщенная задача Коши для линейных дифференциальных уравнений связанных физико-механических полей // Прикл. математика и механика. 1985. Т.49. Вып. 6. С. 935-942. 4. П і д с т р и г а ч Я.С. Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі // Доп. АН УРСР. 1961. № 2. С. 169-171. 5. Ф е л с е н Л., М а р к у в и ц Н. Излучение и рассеяние волн. М., 1978. 6. N o w a c k i W. Termodyfuzja w ciele stalym // Mech. Teoret. i Stos. 1975. Vol. 13. N 2. P. 143-158.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.87

УДК 539.3

В.К.Опанасович

СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо ізотропну пластинку, бокові поверхні якої теплоізольовані. Уважаємо, що в пластинці міститься включення іншого матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності κ_0 , а на лінії розділу матеріалів L виконуються умови ідеального теплового контакту. Введемо декартову систему координат Oxy з початком у деякій точці включення. Приймаємо, що пластинка на нескінченості знаходиться під дією теплового потоку інтенсивності q_∞ , напрямок якого утворює кут α з віссю Ox . Крім того, відома функція, яка відображає контур L на одиничне коло γ , має вигляд

$$z = x + iy = \omega'(\sigma) = R(\sigma + \sum_{k=1}^{n} c_k \sigma^{-k})\ \sigma \in \gamma . \qquad /1/$$

Оскільки ми розглядаємо стаціонарну задачу теплопровідності, то температура $T(x,y)$ задовольнятиме і рівнянню Лапласа [1]. Отже, функція $T(x,y)$ – гармонійна, а тому її можна