зменшується за рахунок зв"язності дифузійних і теплових явищ. Ці висновки випливають також з розв"язку задачі про точкове збурення полів, яке отримують з допомогою методу перевалу / 5 /.

I. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Динамические свойства решений задач термоупругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 4. С. 44-47. 2. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Свойства решений динамических задач обобщенной связанной термоупругости // Прикл. математика и механика. 1981. Т.45. Вып. 5. С. 912-918. 3. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Обобщенная задача Коши для линейных дифференциальных уравнений связанных физико-механических полей // Прикл. математика и механика. 1985. Т.49. Вып. 6. С. 935-942. 4. Підстригач Я.С. Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі // Доп. АН УРСР. 1961. № 2. С. 169-171. 5. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М., 1978. 6. Nowacki W. Termodyfuzja w ciele stalym // Mech. Teoret. i Stos. 1975. Vol. 13. N 2. P. 143-158.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.87

УДК 539.3

В.К.Опанасович

СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо ізотропну пластинку, бокові поверхні якої теплоізольовані. Уважаємо, що в пластинці міститься включення іншого матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності K_0, а на лінії розділу матеріалів L виконуються умови ідеального теплового контакту. Введемо декартову систему координат Oxy з початком у деякій точці включення. Приймаємо, що пластинка на нескінченості знаходиться під дією теплового потоку інтенсивності q_∞, напрямок якого утворює кут α з віссю Ox. Крім того, відома функція, яка відображає контур L на одиничне коло γ, має вигляд

$$z = x + iy = \omega'(\sigma) = R(\sigma + \sum_{K=1}^{n} c_K \sigma^{-K})\ \sigma \in \gamma . \qquad /1/$$

Оскільки ми розглядаємо стаціонарну задачу теплопровідності, то температура $T(x,y)$ задовольнятиме і рівнянню Лапласа [1]. Отже, функція $T(x,y)$ – гармонійна, а тому її можна подати у вигляді

$$\kappa T(x,y) = \mathrm{Re}\, g(z),$$

де $g(z)$ – аналітична функція комплексної змінної $z = x + iy$.

Граничні умови задачі на лінії L записуємо як

$$T = T_0 \quad , \quad \kappa_0 \frac{\partial T_0}{\partial n} = \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \quad , \qquad /2/$$

де n – нормаль до контура L, всі величини, які пов"язані з включенням, записуватимемо з індексом 0.

Використовуючи результати монографії [2], маємо

$$\Phi(\sigma) - \sigma^{-2}\overline{\Phi(\sigma)} = -2i\kappa/\omega'(\sigma)/\sigma^{-1}\frac{\partial T}{\partial S} \quad \sigma \in \gamma,$$

$$\Phi(\sigma) + \sigma^{-2}\overline{\Phi(\sigma)} = 2/\omega'(\sigma)/\sigma^{-1}\frac{\partial T}{\partial n}\kappa \quad \sigma \in \gamma, \qquad /3/$$

де $\Phi(\sigma) = \omega'(\sigma) g'(\omega(\sigma))$; S – дугова координата контура L.

Враховуючи співвідношення /3/, на основі /2/ отримуємо таку крайову задачу:

$$[\Phi(\sigma) - \sigma^{-2}\overline{\Phi(\sigma)}]/K = [\Phi_0(\sigma) - \sigma^{-2}\overline{\Phi_0(\sigma)}]/K_0 \quad ,$$

$$\Phi(\sigma) + \sigma^{-2}\overline{\Phi(\sigma)} = \Phi_0(\sigma) + \sigma^{-2}\overline{\Phi_0(\sigma)}. \qquad /4/$$

Функцію $\Phi_0(\zeta)$ шукаємо у вигляді

$$\Phi_0(\zeta) = \sum_{K=-M}^{N} a_K \zeta^K \quad . \qquad /5/$$

Тут a_K – невідомі коефіцієнти, для визначення яких з граничних умов задачі дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{m=0}^{N}(a_m \mathcal{D}_{j,-1-m} - \frac{c}{c_0}\bar{a}_m \mathcal{D}_{j,1+m}) = \mathcal{D}_{j,1} R\bar{A}(c^2 - c_0^2)/c_0, \quad j = \overline{1, N+1},$$

$$a_{-1} = 0,$$

$$a_{-2} = -\frac{c}{c_0}\bar{a}_0 - cR\bar{A}\left(\frac{c_0}{c} - \frac{c}{c_0}\right),$$

$$a_{-j} = -\frac{c}{c_0}\bar{a}_{j-2} \qquad 3 \le j \le M = N + 2,$$

де $A = -q_\infty e^{-i\alpha}$; $c = -(1+\beta)/2$; $c_0 = (1-\beta)/2$; $\beta = K_0/K$;

$$\mathcal{D}_{0,0} = 1, \quad \mathcal{D}_{0,j} = 0 \quad j \ne 1;$$

$$m \geq 1 \begin{cases} \mathcal{D}_{m,j} = R(\mathcal{D}_{m-1,j-1} + \sum_{p=1}^{n} c_p \mathcal{D}_{m-1,j+p}) & j = \overline{-nm, m} \\ \mathcal{D}_{m,j} = 0 & j > m \vee j < -mn. \end{cases}$$

На основі співвідношень /4/ і /5/ знаходимо вираз для функції $\Phi(\zeta)$:

$$\Phi(\zeta) = R\left(A + \frac{c_0}{c}\,\frac{\bar{A}}{\zeta^2}\right) - \frac{1}{c}\sum_{K=2}^{N+2} a_{-K}\,\zeta^{-K} .$$

Слід зауважити, що як частковий випадок розв"язку задачі випливають такі розв"язки задач: для пластинки без включення $\beta=1$ і для пластинки з теплоізольованим отвором $\beta=0$.

Проведено числовий аналіз задачі, коли $\alpha=\frac{\pi}{2}$ для прямокутного включення з заокругленими кутами з осями координат, паралельними сторонам прямокутника, та з початком координат в його центрі. При цьому / 3 / коефіцієнти c_p

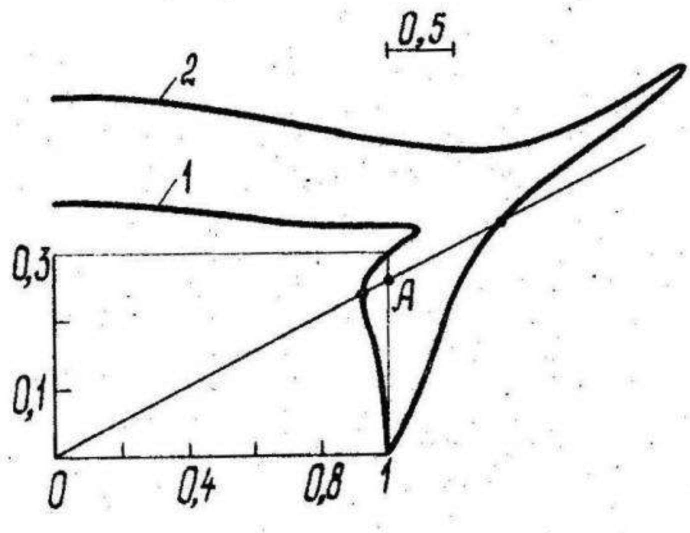
$$c_{2i}=0 \quad i=1,6 , \quad c_1=\cos 2\delta , \quad c_3=-(1-\cos 4\delta)/12 ,$$

$$c_5 = 20^{-1}\sin 4\delta\cdot\sin 2\delta , \qquad \delta=\pi/6 ,$$

$$c_7=(5\cos 8\delta-4\cos 4\delta-1)/448 ,$$

$$c_9=(7\cos 10\delta-5\cos 6\delta-2\cos 2\delta)/1152 ,$$

$$c_{11}=(21\cos 12\delta)-14\cos 8\delta-5\cos 4\delta-2)/5632 .$$



Стаціонарна задача теплопровідності для пластинки з включенням

На рисунку показана графічна залежність відносної інтенсивності теплового потоку $\frac{K}{q_{\infty}}\frac{\partial T}{\partial n}$ на контурі L

/кривая I $\beta = K_0/K$ = 0,I, кривая 2 - β = I0/. Щоб отримати значення даної величини у деякій точці A контура L, необхідно з"єднати цю точку з центром прямокутника і провести промінь, при цьому довжина відрізка променя між точкою A і його точкою перетину з кривою дає у певному масштабі шукану величину.

I. Л и к о в А.В. Теория теплопроводности. М., I967. 2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., I966. 3. С а в и н Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. К., I968.

Стаття надійшла до редколегії I8.09.86