ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК
29
1988

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
Виходить з 1965 р.
Випуск 29

ЗАДАЧІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1988

УДК 518

В "Вестнике" помещены статьи по численным методам решения уравнений математической физики и задач оптимизации, статистические и динамические задачи механики сплошной среды.

Для научных работников, преподавателей и студентов старших курсов.

Библиогр. в конце статей.

Адреса редакційної колегії
290000 Львів-центр, вул. Університетська, 1,
кафедра прикладної математики

Редакція науково-технічної літератури
Зав.редакцією М.П.Парцей

В $\frac{1702050000-001}{М 225/04/-88}$ Замовне

УДК 519.95

М.Я. Бартіш

ПРО ОДИН КЛАС МЕТОДІВ ТИПУ НЬЮТОНА РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ЕКСТРЕМУМ

Розглянемо задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in E^n, \qquad /1/$$

де E^n - n - мірний евклідовий простір.

Для розв"язування задачі /1/ у випадку "доброго" початкового наближення ефективно використовують метод Ньютона /1/ або його модифікації. Розглянемо деяку нову модифікацію методу Ньютона з прискоренням швидкості збіжності. Нехай деяка послідовність $\{x_n\}$, визначена за формулою

$$x_{n+1} = \Phi(x_n), \quad n = 0,1,\ldots \qquad /2/$$

збігається до x_* - розв"язку задачі /1/ зі швидкістю $\tau \geq 1$, тобто

$$\|\Phi(x) - x_*\| \leq K\|x - x_*\|^{\tau}, \qquad /3/$$

причому $K\|x - x_*\|^{\tau-1} < 1$

Розглянемо ітераційну формулу

$$x_{n+1} = x_n - \left[f''\left(\frac{x_n + \Phi(x_n)}{2}\right)\right]^{-1} f'(x_n), \quad n = 0,1,\ldots \qquad /4/$$

Для $\{x_n\}$, визначеної за /4/, наявна така теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови

1/ для $x \in \Omega_0 = \{x / x \in E^n, f(x) \leq f(x_0)\}$

$$m\|y\|^2 \leq (f''(x)y, y) \leq M\|y\|^2, \quad m > 0, y \in E^n;$$

2/ для $x, y \in \Omega_0$

$$\|f'''(x)\| \leq N_3$$

$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \leq N_4\|x - y\|^{\tau-1}, 1 \leq \tau \leq 2;$$

3/ початкове наближення x_0 вибране так, що виконується

$$\|f'(x_0)\| \leq \eta_0, \quad q^{\tau} = \frac{\Gamma}{m}\left(\frac{\eta_0}{m}\right)^{\tau} < 1,$$

де

$$\Upsilon = \left(N_3 K + \frac{N_4}{2^{\tilde{\iota}} \cdot \tilde{\iota}(\tilde{\iota}+1)} \left(1 + K \left(\frac{\ell_0}{m} \right)^{\tilde{\iota}-1} \right)^{1+\tilde{\iota}} \right) .$$

Тоді $\{x_n\}$, визначена за /4/, збігається до розв"язку рівняння /I/, і наявна оцінка

$$\| x_n - x_* \| \leq q^{(\tilde{\iota}+1)^n - 1} \| x_0 - x_* \| .$$

<u>Доведення.</u> З умови I випливає обмеженість функції $f(x)$ знизу в області Ω_0, а також єдиність точки мінімума, причому для довільної точки $x \in \Omega_0$ норма матриці $(f''(x))^{-1}$ обмежена. Тепер можна отримати оцінки швидкості збіжності методу /4/. Згідно з розкладом оператора в ряд Тейлора маємо

$$\| x_{k+1} - x_* \| \leq \frac{1}{m} \Big\{ N_3 \| x_k - x_* \| \, \| \Phi(x_k) - x_* \| + \frac{N_4}{\tilde{\iota}(\tilde{\iota}+1) 2^{\tilde{\iota}+1}} \times$$

$$\times \Big[\| x_k - \Phi(x_k) \|^{1+\tilde{\iota}} + \| 2x_* - x_k - \Phi(x_k) \|^{1+\tilde{\iota}} \Big] \Big\} \leq \frac{\Upsilon}{m} \| x_k - x_* \|^{1+\tilde{\iota}} .$$

З останньої оцінки отримуємо

$$\| x_1 - x_0 \| \leq \frac{\Upsilon}{m} \| x_0 - x_* \|^{1+\tilde{\iota}} \leq q^{\tilde{\iota}} \| x_0 - x_* \|$$

і відповідно

$$\| x_{k+1} - x_* \| \leq \frac{\Upsilon}{m} \| x_k - x_* \|^{1+\tilde{\iota}} \leq q^{(1+\tilde{\iota})^{k+1} - 1} \| x_0 - x_* \| . \quad /5/$$

Теорема доведена.

У випадку $\tilde{\iota}$ = I умова 2 теореми послаблюється, а саме: для доведення квадратичної збіжності /2 = I + $\tilde{\iota}$ / потрібно, щоб $f''(x)$ задовольняло умову Ліпшица. При виконанні відповідних умов для $\{x_n\}$, отриманої за формулою /4/ / $\tilde{\iota}$ = I/, наявне співвідношення

$$\frac{\| x_n - x_* \|}{\| u_n - x_* \|} \leq C q_1^{2^n} ,$$

де $q_1 <$ I, $C = const < \infty$, $\{u_n\}$ - отримане за класичним методом Ньютона, причому $u_0 = x_0$.

Відзначимо, Φ на практиці можна вибирати так, щоб трудність виконання однієї ітерації за /4/ небагато перевищувала трудність виконання однієї ітерації за класичним методом Ньютона / I /. Тоді кінцевий результат отримаємо за менше число обчислень.

Як випливає з теореми, під час реалізації методу /4/ стикаємося з труднощами у виборі "доброго" початкового наближення.

Тому на практиці доцільно використовувати певну модифікацію названого методу. Досить ефективним виявився процес виду:

$$u_n = x_n - \alpha_n \left[f''\left(\frac{x_n + \varphi(x_n)}{2} \right) \right]^{-1} f'(x_n);$$

$$x_{n+1} = \frac{u_n + \varphi(x_n)}{2} + \mathrm{sign}(f(x_n) - f(\varphi(x_n))) \frac{u_n - \varphi(x_n)}{2}(1 - \beta_n), \quad /6/$$

$$n = 0, 1, \ldots,$$

де параметри $0 < \alpha_n \leq 1$, $\beta_n \geq 0$ вибирають з умов мінімума функції $f(x)$ у відповідному напрямку, аналогічно як це зроблено у методі Ньютона з регулюванням кроку. Перша формула у /6/ є не що інше як метод Ньютона з прискоренням швидкості збіжності та регулюванням кроку, а друга формула в /6/ досить ефективно працює у випадку функції типу "яру" / 2 /.

1. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М., 1975. 2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.87

УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

КВАЗІНЬЮТОНІВСЬКА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ LDL^T-РОЗКЛАДУ ХОЛЕСЬКОГО

Нехай $x \in R^n$, де R^n – n-мірний евклідів простір. Опишемо чисельний метод для розв"язування загальної задачі нелінійного програмування :

$$\min_x \{ f_0(x) : f_i(x) \leq 0, \ i \in J = \{1, 2, \ldots, m\} \}. \quad /1/$$

Тут $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ – неперервно диференційовані функції.

Поставимо у відповідність точці x задачу квадратичного програмування

$$\min_p \{ \langle f_0'(x), p \rangle + \frac{1}{2} \langle p, Ap \rangle : \langle f_i'(x), p \rangle + f_i(x) \leq 0, \ i \in J_\delta(x) \}, \quad /2/$$

де A – симетрична додатно визначена матриця,

$$J_\delta(x) = \{ i \in J : f_i(x) \geq F(x) - \delta \}, \quad \delta > 0,$$

$$F(x) = \max \{ 0, f_1(x), \ldots, f_m(x) \},$$

а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток векторів.

Розв"язок задачі /2/ і її множники Лагранжа / I / позначимо відповідно через $p(x)$ і $u^i(x)$, $i \in J_\delta(x)$.

Перейдемо до побудови алгоритму. Матрицю A в задачі /2/ перераховуємо під час роботи алгоритму наступним чином. Нехай відома додатно визначена симетрична матриця A_K. Використовуючи довільну квазіньютонівську формулу / 2 /, на K-й ітерації перераховуємо матрицю $\bar{A}_{K+1}$:

$$\bar{A}_{K+1} = A_K + B_K . \qquad /3/$$

Симетрична матриця B_K малого рангу визначає конкретний тип квазіньютонівського перерахунку.

З допомогою модифікованого LDL^T-розкладу Холеського / 2 / будуємо додатно визначену матрицю

$$A_{K+1} = L_{K+1} D_{K+1} L_{K+1}^T = \bar{A}_{K+1} + E_{K+1} , \qquad /4/$$

де L_{K+1} – одинична нижня трикутна матриця; D_{K+1} – додатна діагональна матриця; E_{K+1} – деяка матриця, яка дорівнює нульовій матриці у випадку, якщо $\bar{A}_{K+1}$ – суттєво додатно визначена. Через T позначено транспонування матриці.

Нехай обрані / I / числа $N > 0$, $S > 0$, $\delta > 0$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $c_0 > 0$, $0 < \gamma <$ I і початкове наближення x_0. Приймемо $A_0 = I_n$ (I_n – одинична матриця порядку n /.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка x_K, матриця A_K і число c_K вже побудовані.

I. Розв"язуючи задачу /2/ при $x = x_K$, $A = A_K$, обчислити $p_K = p(x_K)$, $u^i(x_K)$, $i \in J_\delta(x_K)$. Прийняти $u^i(x_K) = 0$ для $i \notin J(x_K)$.

2. Якщо $\| p_K \| > c_K$ або $f_0(x_K + p_K) + NF(x_K + p_K) > f_0(x_0) + NF(x_0)$, то прийняти $c_{K+1} = c_K$ і перейти до кроку 3. Інакше прийняти $x_{K+1} = x_K + p_K$, $c_{K+1} = \gamma \| p_K \|$ і перейти до кроку 4.

3. Починаючи з α = I, дробити його шляхом ділення навпіл до першого виконання нерівності

$$f_0(x_K + \alpha p_K) + NF(x_K + \alpha p_K) \le f_0(x_K) + NF(x_K) - \alpha\varepsilon \langle p_K , A_K p_K \rangle .$$

Прийняти $x_{K+1} = x_K + \alpha p_K$.

4. Перерахувати матрицю A_{K+1} за формулами /3/–/4/. Якщо $\max\limits_i a_{K+1}^i / \min\limits_i d_{K+1}^i \le S$, то перейти до кроку I / a_{K+1}^i і d_{K+1}^i – i-ті діагональні елементи матриць A_{K+1} і D_{K+1} /. Інакше прийняти $A_{K+1} = I_n$ і перейти до кроку I.

Процес обчислень припинити, якщо $\| p_K \| \le \omega$, де ω – задана точність.

Позначимо $L(x,u) = f_0(x) + \sum\limits_{i \in J_\delta(x)} u^i(x) f_i(x)$.

Достатні умови збіжності алгоритму дає наступна теорема.

Теорема. Нехай виконуються такі умови:

1/ множина $\Omega = \{x : f_0(x) + NF(x) \le f_0(x_0) + NF(x_0)\}$ обмежена;

2/ градієнти функцій $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ в Ω задовольняють умову Ліпшиця;

3/ існує розв"язок задачі /2/ при довільному $x \in \Omega$, причому $\sum\limits_{i \in J_\delta(x)} u^i(x) \le N$.

Тоді $p(x_k) \to 0$, $F(x_k) \to 0$ при $k \to \infty$ і в довільній граничній точці послідовності $\{x_k\}$ задовольняються необхідні умови екстремума для задачі /1/.

Якщо ж, крім цього, функції $f_i(x)$, $i \in \{0\} \cup J$ двічі неперервно диференційовані в Ω, x_* - єдина точка з Ω, в якій виконані необхідні умови екстремума, і

4/ градієнти $f_i'(x)$, $i \in J_* = \{i \in J : f_i(x_*) = 0\}$ лінійно незалежні, $u_*^i = u^i(x_*) > 0$, $i \in J_*$;

5/ $\langle L''_{xx}(x_*, u_*)p, p \rangle > 0$ для всіх p, які задовольняють рівностям $\langle f_i'(x_*), p \rangle = 0, i \in J_*$, причому матриця $L''_{xx}(x_*, u_*)$ невироджена;

6/ $\| [A_k - L''_{xx}(x_*, u_*)] p_k \| \le \mu(x_k) \| p_k \|$,

$$\mu(x_k) > 0 \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{і} \ \lim_{x \to x_*} \mu(x) = 0 ,$$

то послідовність $\{x_k\}$ збігається до x_* надлінійно.

При практичній реалізації описаного алгоритму доцільно замість /2/ розв"язувати двоїсту до неї задачу

$$\min_{u \ge 0} \left\{ \frac{1}{2} \langle Cu, u \rangle + \langle b, u \rangle \right\} , \qquad /5/$$

де u - вектор розмірності $|J_\delta(x)|$; C - симетрична матриця, яка складається з елементів $\{\langle R^{-1} f_i'(x), R^{-1} f_j'(x) \rangle\}, i, j \in J_\delta(x)$; $R = LD^{1/2}$ - нижня трикутна матриця, а i-та компонента вектора b дорівнює $\langle R^{-1} f_0'(x), R^{-1} f_i'(x) \rangle - f_i(x)$, $i \in J_\delta(x)$.

Задачу /5/ зручно розв"язувати методом спряжених напрямків / 1 /. У результаті розв"язування отримуємо множники Лагранжа $u^i(x)$, а вектор $p(x)$ - розв"язок задачі /2/ - обчислюється за формулою

$$p(x) = -R^{-1T} R^{-1} [f_0'(x) + \sum_{i \in J_\delta(x)} u^i(x) f_i'(x)] .$$

Відзначимо, що при використанні задачі /5/ в алгоритмі необхідні лише значення діагональних елементів матриці A_k. Тому доцільно замість обчислення матриці A_k з наступним розкладом Холеського /порядка n^3 операцій/ безпосередньо перераховувати її фактори Холеського L_K і D_K /порядка n^2 операцій/ / 2 /.

1. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.
2. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., 1985.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.87

УДК 519.6

Б.М.Голуб

МЕТОД ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ НА ПРОСТІЙ МНОЖИНІ ТИПУ "ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА"

Розглянемо систему рівнянь і нерівностей

$$\begin{aligned} &f_i(x) \le 0, \quad i \in J^-, \\ &f_i(x) = 0, \quad i \in J^0, \\ &x \in X, \end{aligned} \qquad /1/$$

де $X = \{x \in R^n : -\infty \le a^i \le x^i \le b^i \le \infty,\ i \in I = \{1, 2, \dots, n\}\}$; J^-, J^0 – скінченні множини індексів; R^n – n -мірний евклідів простір. Верхніми індексами позначені компоненти векторів.

Кожне рівняння $f_i(x) = 0$ еквівалентне двом нерівностям $f_i(x) \le 0$, $-f_i(x) \le 0$. Тому задачу /1/ можна записати у вигляді

$$f_i(x) \le 0, \quad i \in J = \{1, 2, \dots, m\},\ x \in X. \qquad /2/$$

Нехай всі функції $f_i(x)$, $i \in J$, неперервно диференційовані.

Введемо множини

$$I(x) = \{i \in I : a^i + \tau < x^i < b^i - \tau\},$$

$$I_S(x,\lambda) = \{i \in I : \partial L(x,\lambda)/\partial x^i > 0,\ x^i = a^i,\ \partial L(x,\lambda)/\partial x^i < 0,\ x^i = b^i\},$$

$$I_a(x,\lambda) = \{i \in I \setminus I_S(x,\lambda) : x^i \le a^i + \tau\},$$

$$I_b(x,\lambda) = \{i \in I \setminus I_S(x,\lambda) : x^i \ge b^i - \tau\},$$

$$Q(x,\lambda)=\{p\in R^n : p^i \geq -\theta^i(x),\ i\in I_\alpha(x,\lambda),$$
$$p^i\leq\theta^i(x)\ ,\ i\in I_\beta(x,\lambda),\ p^i=0\ ,\ i\in I_s(x,\lambda)\},$$

де $\theta^i(x)=x^i-\alpha^i,\ i\in I_\alpha(x,\lambda);\ \theta^i(x)=\beta^i-x^i;\ i\in I_\beta(x,\lambda);$

$0<\tau<\min\{1,\min_i(\beta^i-\alpha^i)/2\}$; $L(x,\lambda)=\sum_{i\in J}\lambda^i f_i(x),\ \lambda\in R^m$.

Поставимо у відповідність точкам x і λ допоміжну задачу квадратичного програмування

$$\min_{p\in Q(x,\lambda)}\left\{\frac{1}{2}\|p\|^2 : \langle f_i'(x),p\rangle+f_i(x)\leq 0,\ i\in J_\delta(x)\right\}, \qquad /3/$$

де $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ – скалярний добуток векторів; $\|\cdot\|$ – евклідова норма вектора,

$$J_\delta(x)=\{i\in J : f_i(x)\geq F(x)-\delta\}\ ,\quad \delta>0\ ,$$
$$F(x)=\max\{0,\ f_1(x),\ \dots,\ f_m(x)\}.$$

Розв"язок задачі /3/ та її множники Лагранжа позначимо відповідно через $p(x)$ і $u^i(x)$, $i\in J_\delta(x)$.

Нехай обрані числа $\delta>0,\ \tau>0,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ і початкове наближення $x_0\in X$. Приймемо $u_{-1}=0,\ u_{-1}\in R^m$.

Опишемо загальний крок алгоритму. Нехай точка x_k і множники Лагранжа u_{k-1} вже обчислені.

I. Розв"язуючи задачу /3/ при $x=x_k$, $\lambda=u_{k-1}$ обчислити $p_k=p(x_k),\ u_k^i=u^i(x_k),\ i\in J_\delta(x_k)$. Прийняти $u_k^i=0,\ i\notin J_\delta(x_k)$.

2. Знайти найбільше число β_k , яке задовольняє умови
$$\beta_k\leq 1\ ,\ x_k+\beta_k p_k\in X\ .$$

3. Починаючи з $\alpha=\beta_k$, дробимо α шляхом ділення навпіл до першого виконання нерівності

$$F(x_k+\alpha p_k)\ \leq (1-\varepsilon\alpha)\,F(x_k)\ . \qquad /4/$$

Прийняти $x_{k+1}=x_k+\alpha p_k$ і перейти до кроку I.

Критерій останова: $\|p_k\|\leq w$, де w – задана точність.

Конкретизуючи необхідні умови мінімуму для загальної задачі математичного програмування [I] на випадок задачі /3/, отримуємо, що $p(x)$ – це розв"язок задачі /3/ лише в тому випадку, якщо існують такі числа $u^i(x)\geq 0$, $i\in J_\delta(x)$, і $v^i(x)$, $i\in I$, що

$$p(x)+\sum_{i\in J_\delta(x)}u^i(x)\ f_i'(x)=v(x)\ ,$$

$$u^i(x)[\langle f_i'(x),p(x)\rangle+f_i(x)]=0\ ,\ i\in J_\delta(x)\ , \qquad /5/$$
$$v^i(x)(p^i(x)+\theta^i(x))=0,\ v^i(x)\geq 0,\ i\in I_\alpha(x,\lambda),$$

$$v^i(x)(p^i(x)-\theta^i(x))=0,\ v^i(x)\le 0,\ i\in \dot I_\beta(x,\lambda),$$
$$v^i(x)=0,\ i\in \dot I(x),\ p^i(x)=0,\ i\in \dot I_s(x,\lambda).$$

Припустимо, що

I/ множина $\Omega=\{x\in X: F(x)\le F(x_0)\}$ компактна;

2/ градієнти функцій $f_i(x),\ i\in J$ задовольняють в Ω умову Ліпшиця;

3/ задача /3/ має розв"язок при довільному $x\in\Omega$, причому $\sum_{i\in J_\delta(x)} u^i(x)\le N$, де $N>0$ – константа.

Помноживши перше співвідношення з /5/ скалярно на $p(x)$, отримаємо

$$\|p(x)\|^2=\langle v(x),p(x)\rangle-\sum_{i\in J_\delta(x)} u^i(x)\langle f_i'(x),p(x)\rangle=$$
$$=-\sum_{i\in \dot I_\alpha(x,\lambda)} v^i(x)\,\theta^i(x)+\sum_{i\in \dot I_\beta(x,\lambda)} v^i(x)\,\theta^i(x)+ \qquad /6/$$
$$+\sum_{i\in J_\delta(x)} u^i(x) f_i(x)\le \sum_{i\in J_\delta(x)} u^i(x) f_i(x).$$

Покажемо, що $x_k\in X$, $k=0,1,2,\dots$. Оскільки $p_k\in Q(x_k,u_{k-1})$, то $p_k^i\ge-\theta^i(x_k)$, якщо $x_k^i\le\alpha^i+\tau$ і $p_k^i\le\theta^i(x_k)$, коли $x_k^i\ge\beta^i-\tau$. Тому існує таке число $\beta_k\ge\tau$, що $x_k+\beta_k p_k\in X$, коли тільки $x_k\in X$. Тоді з огляду на випуклість множини X при всіх α, які лежать між 0 і β_k, $x_k+\alpha p_k\in X$. Отже, якщо $x_k\in X$, то і $x_{k+1}\in X$. А тому що $x_0\in X$, то і вся послідовність $\{x_k\}$ лежить в X.

Враховуючи сказане і оцінку /6/, аналогічно як і в праці / 2 /, можна довести теорему.

Теорема. Якщо виконані допущення I–3, то справедлива нерівність

$$F(x_k)\le q^k F(x_0),\ k=0,1,2,\dots,$$

де $0<q<1$.

I. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. М., 1982. 2. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. М., 1983.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.87

УДК 517.946+517.43

М.М.Притула, А.К.Прикарпатський

АЛГЕБРАЇЧНА СХЕМА ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Припустимо, що в дійсному банаховому просторі $\mathcal{B} \subset C(\Lambda; \mathbb{R}^p)$ задана лінійна динамічна система

$$u_t = K(t; x, \partial)u + f(t; x), \qquad /1/$$

де $x \in \Lambda \subset \mathbb{R}^q$ – замкнута область в $\mathbb{R}^q$; $K(\cdot; \cdot, \partial)$: $\mathbb{R} \times \Lambda \to \mathrm{Mat}(\mathbb{R}^p)$ – неперервне матричнозначне відображення на $\mathbb{R} \times \Lambda$, поліноміальне по q -мірному аргументу $\partial = \partial x$; $f: \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^p$ – неперервна вектор-функція; $\mathbb{Z}_+ \ni q, p < \infty$ і $t \in \mathbb{R}^1$ – еволюційна змінна.

Наша мета – розвиток нового алгебраїчного підходу "точної" дискретної апроксимації заданої динамічної системи, основаного на методах теорії лінійних зображень скінченномірних алгебр Лі. З цією метою вивчимо властивості основних алгебраїчних операцій, що задають динамічну систему /1/ в $\mathcal{B}$ –операції диференціювання $\partial_{x_j}: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ і множення на незалежну змінну $x_k \in \mathbb{R}$, $j, k = \overline{1,q}$. Маємо:

$$[x_j, x_k] = 0, [x_j, \partial x_k] = -\delta_{jk}, [x_j, \delta_{ks}] = 0 = [\partial x_j, \delta_{ks}], \qquad /2/$$

де $s, j, k = \overline{1,q}$, а $[\cdot, \cdot]$ – звичайний комутатор в $\mathcal{B}$. Із /2/ випливає, що множина операторів $\mathcal{G} = \{x_j, \frac{\partial}{\partial x_k}, \delta_{s\ell} : j, k, s = \overline{1,q}\}$ утворює замкнуту скінченномірну алгебру Лі, причому, очевидно, $\mathcal{G} = \oplus_{j=1}^{q} \mathcal{G}_j$,
де $\mathcal{G}_j = \{x_j, \frac{\partial}{\partial x_j}, 1\}$, $j = \overline{1,q}$ –тримірні алгебри Лі Гейзенберга-Вейля. Звідси можна зробити висновок, що в найбільш загальному випадку оператор $K(t; x, \partial) \in U(\mathcal{G})$ належить універсальній огортуючій алгебрі вихідної алгебри Лі Гейзенберга-Вейля /2/ / 1 /. Оскільки вивчення орбіт динамічної системи /1/ при $u|_{t=0} = \varphi \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \{u \in C^m(\Lambda; \mathbb{R}^p): u_\Gamma = 0\}$, $\Gamma = \{x \in \Lambda : \psi(x) = 0\}$ /$\psi: \Lambda \to \mathbb{R}^1$ – гладке відображення/ з допомогою аналітичних методів в загальному випадку практично неможливе, то необхідно використати чисельні підходи до цієї задачі, переходячи до аналізу її спеціальних дискретних / 3 / апроксимацій. Припустимо, що є послідовність банахових просторів $\mathcal{B}_{(n)}$ скінченної розмірності $\dim \mathcal{B}_{(n)} = n \in \mathbb{Z}_+$ разом з асоційованою послідовністю лінійних гомоморфізмів $\Phi_{(n)}: \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{(n)}$. Кажуть, що

банахові простори $\mathcal{B}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ апроксимують банаховий простір $\mathcal{B}$, коли $\|\Phi_{(n)}\| \leq \text{const}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi_{(n)} u\|_{(n)} = \|u\|$ для всіх $u \in \mathcal{B}$. Відповідно [2] послідовність $\{u_{(n)} \in \mathcal{B}_{(n)} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається до $u \in \mathcal{B}$, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_{(n)} - \Phi_{(n)} u\|_{(n)} \to 0$, і послідовність операторів $\{K_{(n)} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається до оператора $K : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, якщо для будь-якого

$u \in \mathcal{B}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \|K_{(n)} \Phi_{(n)} u - \Phi_{(n)} K u\|_{(n)} = 0 .$

Згідно з принципом дискретної апроксимації банахового простору $\mathcal{B}$ одержуємо послідовність дискретних динамічних систем

$$\frac{du_{(n)}}{dt} = K_{(n)}(t)\, u_{(n)} + f_{(n)}(t) \qquad /3/$$

у банахових просторах $\mathcal{B}_{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки динамічна система в /3/ при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$ легко розв"язується чисельним /ітераційним/ методом як задача Коші, то вивчимо більш детально структуру правої частини /3/. Оператор $K_{(n)}(t) : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)}$ і вектор $f_{(n)}(t) \in \mathcal{B}_{(n)}$ при всіх $t \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, одержуємо з допомогою очевидних формул $K_{(n)}(t) = \Phi_{(n)} K(t;\, x,\, \partial)\, \Phi^{-1}_{(n)}$ і $f_{(n)}(t) = \Phi_{(n)} f(t\,;x)$. Тому що відображення $\Phi^{-1}_{(n)} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}$ визначене неоднозначно, то критерієм його вибору є така необхідна умова: відображення $\Phi_{(n)} : (\Phi^{-1}_{(n)}\ \mathcal{B}_{(n)}) \to \mathcal{B}_{(n)}$ – це гомоморфізм алгебри Лі Гейзенберга-Вейля $\mathcal{G}$ /2/ і її матричного зображення у просторі $\mathcal{B}_{(n)}$. Тобто, якщо $x_j \to X_j^{(n)}, \frac{\partial}{\partial x_j} \to Z_j^{n}$, $j = \overline{1, q}$ – зображення у $\mathcal{B}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, алгебри Лі Гейзенберга-Вейля $\mathcal{G}$, тоді необхідно, щоб на $\mathcal{B}_{(n)}$ виконувалась тотожно рівність $[Z_j^{(n)}, X_K^{(n)}]|_{\Phi_{(n)}\mathcal{B}} = \mathbb{1}^{(n)} \delta_{jK}$ для всіх j, $K = \overline{1, q}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, що будемо вважати надалі завжди виконаним.

З метою практичного використання запропонованого вище алгебраїчного алгоритму побудови дискретного наближення /3/ для динамічної системи /I/ розглянемо одне з конкретних зображень алгебри Лі Гейзенберга-Вейля $\mathcal{G}$ [4, 5]:

$$x_j \longrightarrow X_j^{(nj)} = \| x_j^{(K)}\, \delta_{SK}^{(nj)} \|, \quad K,\ S = \overline{1, n_j}\ ; \qquad /4/$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \longrightarrow Z_j^{(nj)} = \| \delta_{KS}^{(nj)} \sum_{m \neq K}^{nj} (x_j^{(K)} - x_j^{(m)})^{-1} + (1 - \delta_{KS}^{(nj)})(x_j^{(K)} - x_j^{(s)})^{-1} \|$$

для всіх $j = \overline{1, q}$, $\mathbb{Z}_+ \ni n_j < \infty$, $x_j^{(K)} \neq x_j^{(s)}$ при $K \neq S$, причому $\mathcal{B}_{(n)} = \bigoplus\limits_{(P)} \bigotimes\limits_{j=1}^{q} \mathbb{R}^{n_j}$, $\dim \mathcal{B}_{(n)} = p \prod\limits_{j=1}^{q} n_j$. В цьому випадку оператор

$K_{(n)}(t): \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)}$ як елемент універсальної огортуючої алгебри вихідної алгебри Лі $\mathcal{G}_{(n)}$ /4/ записується у вигляді тензорного добутку зображень складових операторів у заданому виразі для $K(t;\ x, \partial)$ в просторі $\mathcal{B}$. Відповідно вектор $f_{(n)}(t) \in \mathcal{B}_{(n)}$ подаємо у вигляді $f_{(n)}(t) = (f_{(n)}^{(1)}, f_{(n)}^{(2)}, \ldots, f_{(n)}^{(p)})^{\tau}$, τ – знак транспонування, причому для всіх $\kappa = \overline{1, p}$, $f_{(n)}^{(\kappa)}(t) = \otimes_{j=1}^{q} \mathbb{R}^{n_j}$, де

$$f_{(n)}^{(\kappa)}(t) = f^{(\kappa)}(t;\ X^{(n)})\ Q_{(n)}^{-1}\ \overline{u}_{(n)}. \qquad /5/$$

Тут $\overline{u}_{(n)} = \otimes_{j=1}^{q} \overline{u}_j$,

$$Q_{(n)} = \otimes_{j=1}^{q} \| \delta_{\kappa s}^{(n_j)} \prod_{m \neq \kappa}^{n_j} (x_j^{(\kappa)} - x_j^{(m)}) \| , \qquad /6/$$

де $\overline{u}_j = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n_j}$ для всіх $j = \overline{1, q}$. Переконаємося ще, що виконана умова узгодженості $[Z_j^{(n)}, X_\kappa^{(n)}]|_{\varphi_{(n)}\mathcal{B}} = \delta_{j\kappa} \mathbb{1}^{(n)}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Із /4/ маємо

$$[Z_j^{(n_j)}, X_j^{(n_j)}] = \| \delta_{\kappa s}^{(n_j)} \| - \| \mathcal{J}_{\kappa s}^{(n_j)} \| , \qquad /7/$$

для всіх $\kappa, s = \overline{1, n_j}$, $\mathcal{J}_{\kappa s}^{(n_j)} = 1$. Оскільки

$$\mathcal{J}^{(n_j)} Z_j^{(n_j)} = 0 \quad і \quad \mathcal{J}^{(n_j)} (X^{(n)})^{m_j} Q_{n_j}^{-1} \overline{u}_j = 0$$

для всіх $j = \overline{1, q}$, $m_j = \overline{0, n_j - 2}$, то із /7/ випливає, що відображення $\varphi_{(n)}: \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{(n)}$, яке реалізує /4/, є узгодженим гомоморфізмом алгебр Лі $\mathcal{G}$ і $\mathcal{G}_{(n)}$ при всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Це необхідна умова при побудові коректної дискретної апроксимації /3/ заданої динамічної системи /1/.

Розвинута загальна алгебраїчна схема дискретної апроксимації для лінійних динамічних систем переноситься також з допомогою невеликої модифікації і на нелінійні системи. Для її опису розглянемо добре відомий приклад нелінійної динамічної системи Кортевега–де Фріза:

$$u_t = 6 u u_x + u_{xxx} , \qquad /8/$$

де $u \in C^{(3)}([0,1];\ \mathbb{R}^1)$, $u(0) = u(1) = 0$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, причому, очевидно, виконано $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Зробимо у /8/ "граничне" перетворення $u = x(1-x)v$, де $v \in C^{(3)}([0,1];\ \mathbb{R}^1)$

$|v(0)|<\infty, |v(1)|<\infty$. Тоді $v \in \mathcal{B}$,

$$v_t = v_{xxx} + \frac{3(1-2x)}{x(1-x)} v_{xx} - 6[(1-2x)v +$$
$$+ x(1-x)v_x]v - 6[x(1-x)]^{-1} v_x \quad . \qquad /9/$$

Позначаючи вираз $(1-2x)v + x(1-x)v_x = \alpha(t;x) \in \mathcal{B}$ і переходячи до дискретної апроксимації $\Phi_{(n)} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, отримуємо

$$\frac{d}{dt} v_{(n)} = [Z_x^3 + 3(\mathbb{1} - 2X)[X(\mathbb{1}-X)]^{-1} Z_x^2 +$$
$$+ \alpha(t;X) - 6[X(\mathbb{1}-X)]^{-1} Z_x] v_{(n)} \quad , \qquad /10/$$

де $v_{(n)} \in \mathcal{B}_{(n)}$. У припущенні, що функція $\alpha(t;x) \in \mathcal{B}$ відома, дискретна динамічна система /10/ визначає вектор $v_{(n)}(t;x) \in \mathcal{B}$, причому $v_{(n)}(0;x) = [X(\mathbb{1}-X)]^{-1} \times \varphi(X) Q_{(n)}^{-1} \bar{u}_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$. Згідно з формулою

$$u_n(t;x) = \langle q_{(n)}(x), u_{(n)}(t) \rangle \quad , \qquad /11/$$

де $\quad q_{(n)}(x) = q_{n_x}(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^1$;

$$q_{n_x}(x) = \Big(\prod_{j \neq m}^{n_x} \frac{\pi}{\ell_x} \sin[\pi(x - x^{(m)})/\ell_x] : j = \overline{1, n_x}\Big)^{\tau} \in \mathbb{R}^{n_x}$$

і $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – згортка векторів у $\mathbb{R}^{n_x}$, для функції $\alpha(t;x) \in \mathcal{B}$ знаходимо її "дискретне" зображення:

$$\alpha(t;x) = (1-2x) \langle q_n(x), v_{(n)}(t) \rangle +$$
$$+ x(1-x) \frac{d}{dx} \langle q_n(x), v_{(n)}(t) \rangle \quad . \qquad /12/$$

Матриця $\alpha(t;X) : \mathcal{B}_{(n)} \rightarrow \mathcal{B}_{(n)}$ в /10/ має вигляд

$$\alpha(t;X) = \langle q_n(X), v_{(n)}(t) \rangle (\mathbb{1} - 2X) +$$
$$+ X(\mathbb{1} - X) Z_x \langle q_n(X), v_{(n)}(t) \rangle \quad . \qquad /13/$$

Підставляючи матрицю /13/ у вираз /10/, отримуємо нелінійну самоузгоджену дискретну апроксимацію заданої нелінійної динамічної системи /8/ або /9/.

Розв"язуючи /10/ ітераційним методом на ЕОМ, з допомогою оберненого відображення $\Phi_{(n)}^{-1} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ вигляду /11/ дістаємо наближений розв"язок заданої нелінійної динамічної системи Кортевега-де Фріза. Причому виявляється, що викладена вище "нелінійна" схема алгебраїчної дискретної апроксимації легко узагальнюється на широкий клас нелінійних динамічних систем $u_t = K(t; x, u)$, K - оператор яких має в $\mathcal{B}$ регулярну похідну Фреше.

1. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. М., 1984. 2. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., 1972. 3. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980. 4. Calogero F. Isospectral matrices and classical polynomials // Zinear algebra and its applicutions. 1982. Vol. 44. N 1. P. 55-60. 5. Calogero F. Integralle dynamical systems and related mathematical results // Zect. Notes Phys. 1983. N 189. P. 46-109.

Стаття надійшла до редколегії 12.03.87

УДК 518:517.9

М.В.Жук

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$Lu \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x,y) \qquad /1/$$

при однорідній крайовій умові

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = \left[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\nu,x) + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\nu,y)\right]_\Gamma = 0\,, \qquad /2/$$

де Γ - межа області $\mathcal{D}$, обмеженої по x прямими $x=a$ і $x=b$, а по y кривими $y=g(x)$ і $y=h(x)$, причому $g(x)<h(x)$.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $p(x,y)$, $q(x,y)$ додатні обмежені, тобто $0<\alpha_1 \le p(x,y) \le \beta_1$, $0<\alpha_2 \le q(x,y) \le \beta_2$.

Функція $f(x,y)$ належить гільбертовому простору $H = L_2(\mathcal{D})$ і задовольняє необхідну умову розв"язності задачі Неймана

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = 0\,. \qquad /3/$$

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину двічі неперервно диференційовних функцій $u(x,y)$ у замкнутій області $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + \Gamma$, що задовольняють крайову умову /2/ і умову

$$\iint_{\mathcal{D}} u(x,y)\,dx\,dy = 0 . \qquad /4/$$

Введемо допоміжний оператор T, що визначається формулами

$$Tu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} , \qquad /5/$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0 \qquad /6/$$

з $D(T) = D(L)$. Із нерівності Пуанкаре та умови /4/ випливає, що оператор T додатно визначений, тобто, для довільного $u \in D(T)$ виконується

$$(Tu, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2 , \quad \gamma = \text{const} > 0 . \qquad /7/$$

Позначимо через $H_0 \subset H$ його енергетичний простір, тобто замикання множини $D(T)$ у метриці

$$[u,v]_0 = (Tu, v), \ |u|_0^2 = [u,u]_0 = \iint_{\mathcal{D}} \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2\Big]\,dx\,dy .$$

З нерівності /7/ у результаті граничного переходу для довільного $u \in H_0$ отримуємо

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\gamma} |u|_0 . \qquad /8/$$

При цьому функції з енергетичного простору H_0 оператора T мають перші узагальнені похідні, сумовані з квадратом в області $\mathcal{D}$, і задовольняють умову /4/, що отримується в результаті граничного переходу при $n \to \infty$ у рівності $\iint_{\mathcal{D}} u_n\,dx\,dy = 0$.

Для довільних $u, v \in H_0$ формально введемо білінійну форму

$$L(u,v) = \iint_{\mathcal{D}} \Big[p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\Big]\,dx\,dy . \qquad /9/$$

Тоді для довільного $u \in H_0$ виконуються нерівності

$$\mu |u|_0^2 \leqslant L(u,u) \leqslant \eta |u|_0^2 , \qquad /10/$$

де $\mu = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$; $\eta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$.

Узагальненим розв"язком задачі /1/-/2/ називається функція $u(x,y)$, що належить простору H_0 і для якої виконується тотожність

$$L(u,v) = \iint_{\mathcal{D}} \Big[p\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + q\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\Big]\,dx\,dy = \iint_{\mathcal{D}} f v\,dx\,dy \qquad /11/$$

при довільній функції $v(x,y)$ із простору H_0, причому виконання лівої нерівності /10/ забезпечує його існування та єдиність.

Застосовуючи до задачі /1/-/2/ метод Канторовича /1 /, наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$u_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)\,\varphi_k(x,y) , \qquad /12/$$

де заздалегідь вибрані лінійно незалежні у проміжку $[g(x), h(x)]$ функції $\varphi_k(x,y)$ задовольняють умову

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \varphi_k(x,y)\,dy = 0 , \quad k = 1, 2, \ldots \qquad /13/$$

і які вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{x_\ell(x)\varphi_k(x,y)\} \in H_0$ була повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_0. Невідомі шукані коефіцієнти $c_k(x)$ визначаємо з системи

$$\int_{g(x)}^{h(x)} (Lu_n - f)\varphi_i\,dy + \varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\Big|_{y=g(x)} + \varphi_i\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\partial u_n}{\partial \nu}\Big|_{y=h(x)} = 0 \qquad /14/$$

при умовах

$$\int_{g(a)}^{h(a)} \frac{\partial u_n}{\partial \nu}\varphi_i\Big|_{x=a} dy = 0 , \quad \int_{g(b)}^{h(b)} \frac{\partial u_n}{\partial \nu}\varphi_i\Big|_{x=b} dy = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots n . \qquad /15/$$

Позначимо через $H_n \subset H$ простір функцій вигляду $v_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,\varphi_k(x,y)$. Нехай для деякої функції $u_n(x,y) \in H_n \cap H_0$ справедлива тотожність

$$L(u_n, v_n) \equiv \iint_{\mathcal{D}} \Big[p\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial v_n}{\partial x} + q\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial v_n}{\partial y}\Big]dxdy = \iint_{\mathcal{D}} f\,v_n\,dxdy , \qquad /16/$$

в якій $v_n(x,y)$ довільна функція із $H_n \cap H_0$. Тоді $u_n(x,y)$ називається узагальненим розв"язком системи методу Канторовича /14/-/15/. При цьому аналогічно, як і в праці / 2 /, доводиться теорема.

<u>Теорема</u>. Якщо обмеження на вихідні дані задачі /1/-/2/ такі, що виконуються нерівності /10/, то для довільної функції $f(x,y)$ із H, що задовольняє умову /3/, задача /1/-/2/ має єдиний узагальнений розв"язок $u(x,y) \in H_0$; при довільному n система методу Канторовича /14/-/15/ має єдиний узагальнений розв"язок $u_n(x,y) \in H_n \cap H_0$, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою

$$|u-u_n|_0 \le c\,|u-v_n|_0 \quad , \qquad /17/$$

де $c=\sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}$, а елемент v_n реалізує мінімум функціонала $|u-v_n|_0$.

Повною, лінійно незалежною системою функцій $\{\chi_\ell(x)\varphi_k(x,y)\}$ у просторі H_0 є, наприклад, система

$$\left\{\cos\frac{\ell\pi(x-a)}{b-a}\cos\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)}\right\}, \quad k,\ell=0,1,2,\dots .$$

При цьому наближений розв"язок шукають у вигляді

$$u_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n} c_k(x)\cos\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)} .$$

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.;Л., 1962. 2. Лучка А.Ю., Жук М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., 1975.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.87

УДК 519.21

О.П.Гнатишин, Є.В.Москв"як

ОЦІНКА РЕСУРСУ НА ОСНОВІ ЗРІЗАНОЇ ВИБІРКИ

Нехай $t_1, t_2, \dots, t_n$ – напрацювання n однотипних технічних пристроїв. Деякі технічні пристрої працювали до відмови F , інші були зупинені S , хоча і могли ще працювати. Нехай k пристроїв з n працювали до відмови, а решта $n-k$ були зупинені.

Позначимо через $\bar{j}$ сподіваний ранг фактичної j -ї відмови у спільному варіаційному ряді. Методика обчислення сподіваних рангів відмов наведена у праці / 1 /. Зрізана медіанна емпірична ймовірність безвідмовної роботи пристрою до моменту t обчислюється за формулою

$$\hat{R}(t)=\frac{n+0{,}7-\bar{j}}{n+0{,}4}-\frac{\overline{(j+1)}-\bar{j}}{n+0{,}4}\,\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}\,, \quad \begin{array}{l} t_j\le t\le t_{j+1}\,,\\ j=1,2,\dots,k-1\,,\\ n=2,3,\dots \end{array} \qquad /1/$$

У праці [2] визначено емпіричний гама-процентний ресурс $\hat{t}_\gamma$ як розв"язок рівняння

$$\hat{R}(t)=\frac{\gamma}{100}\;, \quad 0<\gamma<100. \qquad /2/$$

На практиці для визначення емпіричного гама-процентного ресурсу у випадку зрізаної вибірки обчислюємо значення емпіричної ймовірності безвідмовної роботи технічного пристрою до моменту t_j $(j=1,2,\dots,k)$ за формулою /I/ і використовуємо лінійну інтерполяцію.

Значення сподіваного або середнього емпіричного ресурсу $\hat{\tau}$ обчислюємо за формулою

$$\hat{\tau}=\int_0^{t_K}\hat{R}(t)dt=\frac{1}{n+0{,}4}\Big\{\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k-1}t_j\{\overline{(j+1)}-\overline{(j-1)}\}+$$

$$+t_K\{n+0{,}7-\frac{\overline{k}+\overline{(k-1)}}{2}\}-t_1\{0{,}65-\frac{\overline{1}+\overline{2}}{2}\}\Big\}. \qquad /3/$$

У випадку повної вибірки, коли $n=k$, формула /3/ значно спрощується і записується у вигляді

$$\hat{\tau}=\frac{1}{n+0{,}4}\{\sum_{j=1}^{n}t_j+0{,}2\,t_n-0{,}15\,t_1\}. \qquad /4/$$

Приклад. На основі багатократно зрізаної вибірки незалежних напрацювань F і зупинок S однотипних технічних одиниць дано багатократно зрізаний емпіричний варіаційний ряд:

2300 S	2750 S	3200 S	3400 S	3650 S
3800 S	4200 S	5320 S	5500 S	I6500 S
20550 F	22400 F	237I0 F	26825 S	273I5 F
29000 S	3I270 F	32000 S	37750 F	38I20 F
43600 F	48455 F			

Тут n = 22, k = 9.

Моменти відмов t_j, сподівані ранги відмов $\bar{j}$ і значення емпіричної ймовірності безвідмовної роботи $\hat{R}(t_j)$ відповідно дорівнюють:

t_j	$\bar{j}$	$\hat{R}(t_j)$
20550	I,7692	0,9344
22440	3,5385	0,8554
237I0	5,3077	0,7764
27375	7,2735	0,6887
3I270	9,520I	0,5884
37750	I2,2I6I	0,4680
38I25	I4,9I2I	0,3477
43600	I7,6080	0,2273
48455	20,3040	0,I070

Використовуючи лінійну ітерполяцію та екстраполяцію, знаходимо емпіричний гама-процентний ресурс:

γ	$\hat{t}_\gamma$	γ	$\hat{t}_\gamma$	γ	$\hat{t}_\gamma$
10	48596	50	36358	80	23100
20	44963	60	30765	90	21572
30	40000	70	26890	95	19919
40	38052				

За формулою /3/ середній емпіричний ресурс дорівнює $\hat{\tau}$ = 34090 і збігається з 54,0551 гама-процентним ресурсом.

1. К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, 1982. 2. К в і т І.Д., М о с к в " я к Є.В. Оцінка залишкового ресурсу. У цьому ж Віснику.

Стаття надійшла до редколегії 30.01.87

УДК 519.21

І.Д.Квіт, Е.В.Москвяк

ОЦІНКА ЗАЛИШКОВОГО РЕСУРСУ

Нехай τ – напрацювання до відмови технічної одиниці. Позначимо через $R(t)$ ймовірність безвідмовної роботи технічної одиниці впродовж часу t

$$R(t) = P\{\tau > t\}, \quad t > 0 \ . \qquad /1/$$

Функція /1/ монотонно спадає від одиниці до нуля.

<u>Означення 1</u>. Гама-процентним ресурсом t_γ називається розв"язок рівняння

$$R(t) = \frac{\gamma}{100}, \quad 0 < \gamma < 100 \ . \qquad /2/$$

Рівняння /2/ при фіксованому значенні γ має єдиний розв"язок, оскільки функція /1/ монотонна. При γ = 10; 25; 50 маємо відповідно децильний, квартильний і медіанний ресурс.

<u>Приклад 1.</u> Нехай напрацювання до відмови технічної одиниці описується розподілом Вейбула з параметром масштабу σ та параметром форми ν

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\nu}, \quad t > 0, \ (\sigma > 0, \ \nu > 0) \ . \qquad /3/$$

Тоді гама-процентний ресурс

$$t_\gamma = \sigma\left[-\ln\frac{\gamma}{100}\right]^{\frac{1}{\nu}}, \quad 0 < \gamma < 100, (\sigma > 0, \ \nu > 0) \ . \qquad /4/$$

Зокрема, децильний, квартильний і медіанний ресурс

$$t_{10} = \sigma[\ln 10]^{\frac{1}{\nu}}, \quad t_{25} = \sigma[\ln 4]^{\frac{1}{\nu}}, \quad t_{50} = \sigma[\ln 2]^{\frac{1}{\nu}}.$$

При ν = 1 і 2 маємо експонентний ресурс та ресурс Релея.

Нехай $\tilde{\tau}_T$ -напрацювання до відмови технічної одиниці після часу T, якщо технічна одиниця не відмовила до моменту T

$$\tilde{\tau}_T = (\tau - T) | (\tau > T). \qquad /5/$$

Зокрема T може позначати гарантійний строк експлуатації технічної одиниці. Умовна ймовірність безвідмовної роботи технічної одиниці впродовж часу t, якщо технічна одиниця не відмовила до моменту T,

$$R_T(t) = \mathcal{P}\{(\tau - T > t)|(\tau > T)\} = \frac{\mathcal{P}\{(\tau > T+t)\cap(\tau > T)\}}{\mathcal{P}\{\tau > T\}} = \frac{R(T+t)}{R(T)}, t>0, (T>0). \qquad /6/$$

Функція /6/ монотонно спадає від одиниці при t = 0 до нуля при $t = \infty$.

Означення 2. Гама-процентним залишковим ресурсом $t_\gamma(T)$ називається розв"язок рівняння

$$\frac{R(T+t)}{R(T)} = \frac{\gamma}{100}, \quad 0 < \gamma < 100 \qquad /7/$$

Рівняння /7/ при фіксованому значенні γ має єдиний розв"язок, оскільки функція /6/ монотонна. При γ = 10; 25; 50 маємо відповідно децильний, квартильний і медіанний залишковий ресурс.

Приклад 2. У випадку розподілу Вейбула /3/ умовна надійність /6/ набуває вигляду

$$\frac{R(T+t)}{R(T)} = e^{\left(\frac{T}{\sigma}\right)^\nu - \left(\frac{T+t}{\sigma}\right)^\nu}.$$

Отже, гама-процентний залишковий ресурс

$$t_\gamma(T) = \sigma\left[\left(\frac{T}{\sigma}\right)^\nu - \ln\frac{\gamma}{100}\right]^{\frac{1}{\nu}} - T, \; 0<\gamma<100, (\sigma>0, \nu>0, T>0). \qquad /8/$$

Зазначимо, що при T = 0 вираз /8/ збігається з виразом /4/.

Нехай $t_1, \ldots, t_n$ напрацювання до відмови n однотипних технічних одиниць. Тоді емпірична ймовірність безвідмовної роботи технічної одиниці впродовж часу t

$$\hat{R}(t) = \frac{n+0{,}7-j}{n+0{,}4} - \frac{1}{n+0{,}4}\,\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}, \; t_j \le t \le t_{j+1}, (j=1,\ldots,n-1; n=2,3,\ldots); \qquad /9/$$

Емпіричний гама-процентний ресурс $\hat{t}_\gamma$ є розв"язком рівняння

$$\hat{R}(t) = \frac{\gamma}{100}, \quad 0 < \gamma < 100 . \qquad /10/$$

Емпіричний гама-процентний залишковий ресурс $\hat{t}_\gamma(T)$ – це розв"язок рівняння

$$\frac{\hat{R}(T+t)}{\hat{R}(T)} = \frac{\gamma}{100}, \quad 0 < \gamma < 100 . \qquad /11/$$

Приклад 3. Наведемо напрацювання до граничного стану 20 однотипних технічних одиниць:

187	295	377	447	512
572	631	688	746	803
862	923	987	1055	1129
1212	1307	1422	1576	1836

Емпірична ймовірність безвідмовної праці технічної одиниці до моменту t_j, $(j = 1, \ldots, 20)$ за формулою /9/ така:

0,9657	0,9167	0,8676	0,8186	0,7696
0,7206	0,6716	0,6225	0,5735	0,5245
0,4755	0,4265	0,3775	0,3284	0,2794
0,2304	0,1814	0,1324	0,0833	0,0343

Звідси, використовуючи лінійну інтерполяцію, знаходимо відповідно емпіричний гама-процентний ресурс:

γ	$\hat{t}_\gamma$	γ	$\hat{t}_\gamma$	γ	$\hat{t}_\gamma$
10	1524	50	833	90	323
20	1271	60	715	95	222
25	1179	70	597	99	54
30	1098	75	536		
40	958	80	472		

Емпірична умовна ймовірність безвідмовної роботи технічної одиниці впродовж часу t = 12; 72; 131; 188; 246; 303; 362; 423; 487; 555; 629; 712; 807; 922; 1076; 1336, якщо технічна одиниця не відмовила до моменту T=500 згідно з формулою /9/ та лівою частиною формули /11/:

$$\frac{\hat{R}(512)}{\hat{R}(500)} = 0,9884; \qquad \frac{\hat{R}(572)}{\hat{R}(500)} = 0,9254; \qquad \frac{\hat{R}(631)}{\hat{R}(500)} = 0,8625 \ \ldots,$$

тобто

				0,9884
0,9254	0,8625	0,7995	0,7366	0,6736
0,6107	0,5477	0,4847	0,4218	0,3588
0,2959	0,2329	0,1700	0,1070	0,0441

Звідси, використовуючи лінійну інтерполяцію, знаходимо відповідно емпіричний гама-процентний залишковий ресурс:

γ	$\hat{t}_{\gamma}(500)$	γ	$\hat{t}_{\gamma}(500)$	γ	$\hat{t}_{\gamma}(500)$
10	1105	50	471	90	96
20	867	60	372	95	49
25	781	70	279	99	10
30	707	75	234		
40	581	80	188		

Зауваження. У випадку зрізаної вибірки формули /9/, /10/ і /11/ відповідно модифікуються *.

Стаття надійшла до редколегії 08.12.86

УДК 517.949:517.956

А.М.Кузик, І.І.Чулик

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЛОКАЛЬНО-ОДНОВИМІРНИХ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ У КЛАСІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Метод сумарної апроксимації /МСА/ - один з ефективних методів побудови економних різницевих схем для багатовимірних задач математичної фізики [1, 2, 5-8]. У праці [3] отримані оцінки швидкості збіжності локально-одновимірної різницевої схеми МСА з розпаралелюванням при мінімальних вимогах на гладкість розв"язку вихідної диференціальної задачі.

Побудуємо локально-одновимірні різницеві схеми і дослідимо швидкість збіжності розв"язку побудованих різницевих схем до розв"язку вихідної задачі у нормі сильнішій, ніж у праці [3].

Розглянемо крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)+q(x,t)u(x,t)=f(x,t) \quad ; \qquad /1/$$

---

* К в і т І.Д. Методичні вказівки до курсу "Теорія надійності". Львів, 1982.

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \quad (x,t) \in Q_T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad /2/$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_T,$$

де $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p): 0 < x_\alpha < 1;\ \alpha = \overline{1,p}\}$; Γ – границя області Ω, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \Gamma \times [0,T]$.

На проміжку $[0,T]$ введемо сітки

$$\bar\omega_\tau = \{t = t_j = j\tau : j = 0,1,\ldots,K;\ \tau = \frac{T}{K}\},$$

$$\bar\omega_\tau = \{t = t_{j,\beta} : \beta = 0,1,\ldots,p;\ t_{j,0} = t_j = j\tau;\ t_{j,\alpha} = (j + \sum_{i=1}^{\alpha} \eta_i)\tau;$$

$$\alpha = 1,2,\ldots,p;\ \eta_\alpha > 0;\ \sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha = 1;\ \tau = \frac{T}{K}\},$$

функції $f(x,t)$ і $q(x,t)$ зобразимо у вигляді суми $f(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha(x,t)$, $q(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{p} q_\alpha(x,t)$. Для розв"язування задачі /1/–/2/ використаємо схеми МСА, запропоновані О.А.Самарським [5, 6].

<u>Схема МСА 1</u> [5]. Шукаємо систему функцій $v_\alpha(x,t)$, які задовольняють співвідношення

$$\eta_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) + q_\alpha(x,t)\, v_\alpha(x,t) = f_\alpha(x,t), \qquad /3/$$

$$t \in (t_{j,\alpha-1}, t_{j,\alpha}], \quad \alpha = \overline{1,p};$$

$$v_1(x,0) = u_0(x),\ v_\alpha(x, t_{j,\alpha-1}) = v_{\alpha-1}(t_{j,\alpha-1}),\ \alpha = \overline{1,p};\ j = \overline{0,K-1}, \qquad /4/$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha = 1.$$

Наближеним розв"язком задачі /1/–/2/ при $t = t_{j+1}$ є функція $v(x, t_{j+1}) = v_p(x, t_{j+1})$, де $v_p(x,t) = v_p^{j+1}(x,t)$ – розв"язок задачі /3/, /4/ при $t \in (t_{j,p-1}, t_{j+1}]$. Початкове значення $v_0(x, t_{j,0}) = v(x, t_j)$ визначаємо із розв"язку тієї ж задачі при $t \in (t_{j-1,p-1}, t_j]$.

<u>Схема МСА 2</u> [6]. Необхідно знайти систему функцій $v_\alpha(x,t)$, які задовольняють співвідношення

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) + q_\alpha(x,t)\, v_\alpha(x,t) = f_\alpha(x,t), \qquad /5/$$

$$t \in (t_j, t_{j+1}], \quad \alpha = \overline{1,p};$$

$$v_1(x,0) = u_0(x),\ v_1(x,t_j) = v(x,t_j),\ \alpha = \overline{2,p},\ j = \overline{0,K-1} \qquad /6/$$

$$v_\alpha(x, t_j) = v_{\alpha-1}(x, t_{j+1}).$$

За наближений розв"язок задачі /1/-/2/ при $t = t_{j+1}$ приймаємо функцію $v(x, t_{j+1}) = v_p(x, t_{j+1})$, де $v_p(x,t) = v_p^{j+1}(x,t)$ - розв"язок задачі /5/, /6/ при $t \in (t_j, t_{j+1}]$ і $\alpha = p$.

Виходячи із схем МСА /3/, /4/ і /5/, /6/, побудуємо локально-одновимірні різницеві схеми /ЛОС/. Для цього в області $\bar{\Omega}$ введемо рівномірну сітку $\bar{\omega}_h = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) = (i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_p h_p) : i_\alpha = 0, N_\alpha ; N_\alpha h_\alpha = 1 ; \alpha = \overline{1,p}\}$. Позначимо: $|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2$, ω_h - множина внутрішніх вузлів сітки $\bar{\omega}_h$; $\omega_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$, $\gamma = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$ - множина граничних вузлів.

ЛОС 1. Задачу /1/, /2/ апроксимуємо різницевою схемою, в основі якої схема МСА /3/, /4/:

$$\frac{y_\alpha^{j,\alpha} - y_{\alpha-1}^{j,\alpha-1}}{\tau} + \Lambda_\alpha^{j+1} y_\alpha^{j,\alpha} = \frac{1}{\tau h_1 \dots h_p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} \dots \int_{x_p-\frac{h_p}{2}}^{x_p+\frac{h_p}{2}} f_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p, t)\, d\xi_p \dots d\xi_1\, dt, \quad /7/$$

$$(x_1, \dots, x_p) \in \omega_h, \quad j = \overline{0, k-1}, \quad \alpha = \overline{1,p},$$

$$y_p^0 = \frac{1}{h_1 \dots h_p} \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} \dots \int_{x_p-\frac{h_p}{2}}^{x_p+\frac{h_p}{2}} u_0(\xi_1, \dots, \xi_p)\, d\xi_p \dots d\xi_1, \; y_0^{j,0} = y_p^j, \quad /8/$$

$$y_\alpha^{j,\alpha}\Big|_\gamma = 0, \quad j = \overline{0, k-1},$$

де

$$\Lambda_\alpha^{j+1} v = -(a_\alpha^{j+1} v_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + d_\alpha^{j+1} v, \quad \Lambda^{j+1} = \Lambda_1^{j+1} + \dots + \Lambda_p^{j+1},$$

$$a_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 \dots h_p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} \dots \int_{x_\alpha - h_\alpha}^{x_\alpha} \dots \int_{x_p-\frac{h_p}{2}}^{x_p+\frac{h_p}{2}} k_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p, t)\, d\xi_p \dots d\xi_1\, dt,$$

$$d_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 \dots h_p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}} \dots \int_{x_p-\frac{h_p}{2}}^{x_p+\frac{h_p}{2}} q_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p, t)\, d\xi_p \dots d\xi_1\, dt, \alpha = 1,p.$$

ЛОС 2. Задачу /1/, /2/ апроксимуємо різницевою схемою, в основі якої схема МСА /5/, /6/:

$$\frac{y_\alpha^{j+1} - y_{\alpha-1}^{j+1}}{\tau} + \Lambda_\alpha^{j+1} y_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 \dots h_p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x-\frac{h_1}{2}}^{x+\frac{h_1}{2}} \dots \int_{x_p-\frac{h_p}{2}}^{x_p+\frac{h_p}{2}} f_\alpha(\xi_1, \dots, \xi_p, t)\, d\xi_p \dots d\xi_1\, dt, \quad /9/$$

$(x_1,\dots,x_p)\in\omega_h\ ,\quad j=\overline{0,K-1}\ ,\quad \alpha=\overline{1,p}\ ,$

$$y_p^0=\frac{1}{h_1\dots h_p}\int\limits_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}}\dots\int\limits_{x_p-\frac{h_p}{2}}^{x_p+\frac{h_p}{2}}u_0(\xi_1,\dots,\xi_p)\,d\xi_p\dots d\xi_1,\ y_0^{j+1}=y_p^j\ , \qquad /10/$$

$y_\alpha^j|_\gamma=0\ ,\quad j=\overline{0,K}\ .$

Аналізуючи ЛОС1 і ЛОС2, неважко переконатись, що достатньо довести збіжність наближеного розв"язку до розв"язку вихідної задачі для однієї зі схем.

Приймемо $p=2$ і позначимо через $\|\cdot\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)}$ норму

$$\|v\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)}=\Big(\int_\Omega\big(v^2+\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\big)^2\big)\,dx\Big)^{1/2}\ ,\quad \alpha=1,2\ ,$$

а через $\|\cdot\|_{W^1_{2}\alpha(\omega_h)}$ – її різницевий аналог

$$\|v\|_{W^1_{2},\alpha(\omega_h)}=\Big((v,v)+(v_{\bar x_\alpha}\ ,\ v_{\bar x_\alpha}]_\alpha\Big)^{1/2}\ ,$$

де

$$(u,v)=h_1h_2\sum_{\omega h}u\,v\ ;$$

$$(u,v]_\alpha\ =\ h_1h_2\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}\sum_{i_\beta=1}^{N_\beta-1}u(i_1h_1,i_2h_2)\,v(i_1h_1,i_2h_2)\ ;$$

$$\alpha,\beta=1,2\ ;\qquad \alpha\neq\beta\ .$$

<u>Теорема</u>. Нехай $u_0(x)\in\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega),\ f_\alpha(x,t)\in L_2(Q_T)\ ,\ \alpha=1,2$ і виконуються умови

$$k_\alpha(x,t)\in W^{1,1}_\infty(Q_T)\ ,\quad k_\alpha(x,t)\geqslant\nu>0\ ,$$

$$q_\alpha(x,t),\frac{\partial q_\alpha}{\partial t}\in L_\infty(Q_T),\ q_\alpha(x,t)\geqslant\nu>0,\ \alpha=1,2\ , \qquad /11/$$

Тоді, якщо

$$\frac{\tau}{(h^*)^2}\leq C_1^2<\infty,\ \ \frac{h_1}{h_2}=C_2<\infty\ ,\ h^*=\min\{h_1\ ,h_2\}\ ,$$

розв"язок різницевої схеми /9/, /10/ збігається до розв"язку задачі /1/, /2/ і наявна оцінка

$$\Big(\tau\sum_{j=0}^{K-1}\|y_2^{j+1}-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}u(\cdot,t)\,dt\,\|^2_{W^1_{2,2}(\omega_h)}\Big)^{1/2}\ \leq$$

$$\leq MC|h|\,\Big(\|u\|_{W^{2,1}_{2}(Q_T)}+\sum_{\alpha=1}^{2}\|f_\alpha\|_{L_2(Q_T)}\Big)\ , \qquad /12/$$

де $C=max\{C_1,C_2,\frac{1}{C_2}\}$, M – константа, яка не залежить від h і u .

<u>Доведення</u>. При заданих умовах у класі $\overset{0}{W}{}^{2,1}_2(Q_T)$ існує єдиний узагальнений розв"язок задачі /1/, /2/ [4].

Через z_α^{j+1} позначимо похибку

$$z_\alpha^{j+1} = y_\alpha^{j+1} - \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} u(x_1, x_2, t)\,dt, \quad \alpha = 1,2; \; j = \overline{0, \kappa-1},$$

$$z_2^0 = y_2^0 - \frac{1}{h_1 h_2}\int\limits_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}}\int\limits_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} u_0(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1 = 0.$$

Введемо позначення

$$\int\limits_{x_1-\frac{h_1}{2}}^{x_1+\frac{h_1}{2}}\int\limits_{x_2-\frac{h_2}{2}}^{x_2+\frac{h_2}{2}} v(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1 = \int\limits_e v(\xi_1, \xi_2)\,d\xi$$

і запишемо задачу для визначення похибки

$$\frac{z_\alpha^{j+1} - z_{\alpha-1}^{j+1}}{\tau} + \Lambda_\alpha z_\alpha^{j+1} = \varphi_\alpha^{j+1} + \psi_\alpha^{j+1}, \quad \alpha = 1,2, \qquad /13/$$

$$j = \overline{0, \kappa-1}, \quad (x_1, x_2) \in \omega_h;$$

$$z_2^0 = 0, \quad z_0^{j+1} = z_2^j, \; .$$

$$z_\alpha^j\big|_\gamma = 0, \quad j = \overline{0, \kappa}, \qquad /14/$$

де

$$\varphi_\alpha^{j+1} = \overset{1}{\varphi}{}_\alpha^{j+1} + \overset{2}{\varphi}{}_\alpha^{j+1}, \quad \alpha = 1, 2;$$

$$\overset{1}{\varphi}{}_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 h_2}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_e \left[f_\alpha(\xi_1, \xi_2, t) - \delta_{\alpha 1}\frac{\partial u}{\partial t} - A_\alpha(t) u(\xi_1, \xi_2, t)\right] d\xi\,dt,$$

$$\overset{2}{\varphi}{}_\alpha^{j+1} = \frac{\delta_{\alpha 1}}{\tau}\Big[\frac{1}{h_1 h_2}\int\limits_e \big(u(\xi_1, \xi_2, t_{j+1}) - u(\xi_1, \xi_2, t_j)\big)\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} u(x_1, x_2, t)\,dt + \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} u(x_1, x_2, t)\,dt\Big];$$

$$\psi_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau h_1 h_2}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_e A_\alpha(t) u(\xi_1, \xi_2, t)\,d\xi\,dt - \Lambda_\alpha^{j+1}\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} u(x_1, x_2, t)\,dt;$$

$$A_\alpha(t) u = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + q_\alpha(x, t) u, \quad \delta_{\alpha 1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

Приймемо $z_\alpha^{j+1} = \overset{1}{z}{}_\alpha^{j+1} + \overset{2}{z}{}_\alpha^{j+1}$, де $\overset{1}{z}{}_\alpha^{j+1}$ – розв'язок задачі

$$\frac{\overset{1}{z}{}_\alpha^{j+1} - \overset{1}{z}{}_{\alpha-1}^{j+1}}{\tau} = \varphi_\alpha^{j+1}, \; \alpha = 1, 2, \; j = \overline{0, \kappa-1}, \; (x_1, x_2) \in \omega_h,$$

$$\overset{1}{z}{}_2^0 = 0, \quad \overset{1}{z}{}_0^{j+1} = \overset{1}{z}{}_2^j,$$

$$\overset{1}{z}{}_\alpha^j\big|_\gamma = 0$$

Неважко переконатись у справедливості нерівностей

$$\tau \sum_{j=0}^{K-1} \| \overset{1}{z}{}_\alpha^{j+1} \|^2_{L_2(\omega_h)} \le M[\tau^2(\delta_{\alpha_1} \| f_\alpha \|^2_{L_2(Q_T)} + \| u \|^2_{W_2^{2,1}(Q_T)}) + \qquad /15/$$

$$+ |h|^4 | u |^2_{W_2^{2,0}(Q_T)}] ,$$

$$\| \overset{1}{z}{}_\alpha^{j+1} \|^2_{W^1_{2,\alpha}(\omega_h)} \le \frac{MC^2 |h|^2}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\delta_{\alpha,1} \| f_\alpha \|^2_{L_2(Q_T)} + \| u \|^2_{W_2^{2,1}(Q_T)}) \, dt . \qquad /16/$$

Підставляючи $z_\alpha^{j+1} = \overset{1}{z}{}_\alpha^{j+1} + \overset{2}{z}{}_\alpha^{j+1}$ в /13/, отримуємо задачу для $\overset{2}{z}{}_\alpha^{j+1}$

$$\frac{\overset{2}{z}{}_\alpha^{j+1} - \overset{2}{z}{}_{\alpha-1}^{j+1}}{\tau} + \Lambda_\alpha^{j+1} \overset{2}{z}{}_\alpha^{j+1} = \psi_\alpha^{j+1} - \Lambda_\alpha^{j+1} \overset{1}{z}{}_\alpha^{j+1} , \quad \alpha = 1, 2 , \qquad /17/$$

$$j = \overline{0, K-1} , \quad (x_1, x_2) \in \omega_h ,$$

$$\overset{2}{z}{}_2^0 = 0 , \quad \overset{2}{z}{}_0^{j+1} = \overset{2}{z}{}_2^j , \qquad /18/$$

$$\overset{2}{z}{}_\alpha^j \big|_\gamma = 0 , \quad j = \overline{0, K} .$$

Представимо ψ_α^{j+1} у вигляді

$$\psi_\alpha^{j+1} = (\overset{1}{\psi}{}_\alpha^{j+1})_{x_\alpha} + \overset{2}{\psi}{}_\alpha^{j+1} , \qquad /19/$$

де

$$\overset{1}{\psi}{}_1^{j+1} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [a_1^{j+1} u(x_1, x_2, t)_{\bar{x}_1} - \frac{1}{h_2} \int_{x_2 - \frac{h_2}{2}}^{x_2 + \frac{h_2}{2}} k_1(x_1 - \frac{h_1}{2}, \xi_2, t) \frac{\partial u(x_1 - \frac{h_1}{2}, \xi_2, t)}{\partial x_1} d\xi_2] dt ,$$

$$\overset{1}{\psi}{}_2^{j+1} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [a_2^{j+1} u(x_1, x_2, t)_{\bar{x}_2} - \frac{1}{h_1} \int_{x_1 - \frac{h_1}{2}}^{x_1 + \frac{h_1}{2}} k_2(\xi_1, x_2 - \frac{h_2}{2}, t) \frac{\partial u(\xi_1, x_2 - \frac{h_2}{2}, t)}{\partial x_2} d\xi_1] dt ,$$

$$\overset{2}{\psi}{}_\alpha^{j+1} = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\frac{1}{h_1 h_2} \int_e q_\alpha(\xi_1, \xi_2, t) u(\xi_1, \xi_2, t) d\xi - d_\alpha^{j+1} u(x_1, x_2, t)] \, dt ,$$

$$\alpha = 1, 2 .$$

Помножимо рівняння /17/ скалярно на $\overset{2}{z}{}_\alpha^{j+1}$. Враховуючи /19/ і нерівність Буняковського-Коші, записуємо

$$\| \overset{2}{z}{}_2^{j+1} \|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{\alpha=1}^{2} \| \overset{2}{z}{}_\alpha^{i+1} \|^2_{W^1_{2,\alpha}(\omega_h)} \le$$

$$\le M\tau \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{\alpha=1}^{2} (\| \overset{1}{z}{}_\alpha^{i+1} \|^2_{W^1_{2,\alpha}(\omega_h)} + \| \overset{1}{\psi}{}_\alpha^{i+1}]|^2_\alpha + \| \overset{2}{\psi}{}_\alpha^{i+1} \|^2_{L_2(\omega_h)}) . \qquad /20/$$

Враховуючи гладкість коефіцієнтів і розв"язку, оцінюємо $\overset{1}{\psi}{}_\alpha^{j+1}$ і $\overset{2}{\psi}{}_\alpha^{j+1}$:

$$\|\overset{1}{\psi}{}_\alpha^{j+1}\|_\alpha^2 \le \frac{M|h|^2}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^2(\Omega)}dt\,, \tag{21}$$

$$\|\overset{2}{\psi}{}_\alpha^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} \le \frac{M|h|^2}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^2(\Omega)}dt\,, \tag{22}$$

$\alpha = 1, 2$.

Підставляючи /16/, /21/ і /22/ в нерівність /20/, отримуємо

$$\|\overset{2}{z}{}_2^{j+1}\|^2_{L_2(\omega_h)} + \tau\sum_{i=0}^{K-1}\sum_{\alpha=1}^{2}\|\overset{2}{z}{}_\alpha^{i+1}\|^2_{W^1_{2,\alpha}(\omega_h)} \le$$

$$\le MC^2|h|^2\Big(\|u\|^2_{W_2^{2,1}(Q_T)} + \sum_{\alpha=1}^{2}\|f_\alpha\|^2_{L_2(Q_T)}\Big).$$

Враховуючи /16/ і попередню нерівність, приходимо до оцінки

$$\Big(\tau\sum_{i=0}^{K-1}\|z_2^{i+1}\|^2_{W^1_{2,2}(\omega_h)}\Big)^{1/2} \le MC|h|\Big(\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} + \sum_{\alpha=1}^{2}\|f_\alpha\|_{L_2(Q_T)}\Big),$$

що й потрібно було довести.

Наслідок. Якщо $\frac{|h|^2}{\tau} \le C_3^2 < \infty$, то при виконанні умов теореми наявна оцінка

$$\|y_2^{j+1} - \frac{1}{\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}u(\cdot,t)dt\|_{L_2(\omega_h)} \le MC|h|\Big(\|u\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} + \sum_{\alpha=1}^{2}\|f_\alpha\|_{L_2(Q_T)}\Big),$$

$$j = \overline{0, K-1}\,, \qquad C = \max\{C_1, C_2, \frac{1}{C_2}, C_3\}.$$

1. Гордезиани Д.Г., Самарский А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации // Комплексный анализ и его приложения. М., 1978. С. 173-186. 2. Гордезиани Д.Г. Об одной аддитивной модели для параболических уравнений со смешанными производными // Современные пробл. мат. физики и вычислительной математики. М., 1982. С. 128-137. 3. Кузык А.М., Макаров В.Л. О быстроте сходимости разностной схемы метода суммарной аппроксимации для обобщенных решений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26. № 6. С. 941-946. 4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 5. Самарский А.А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1962. Т.2. № 5. С. 787-811. 6. Самарский А.А. О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем // Докл. АН СССР. 1965. Т.165. № 6. С. 1253-1256. 7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1983. 8. Яненко Н.Н. О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 1964. Т.5. № 6. С. 1431-1434.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.87

УДК 518:517.948

М.В.Дорошенко

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ОДНОМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕЛЕКТРОННОЇ ОПТИКИ МЕТОДАМИ КОЛОКАЦІЇ ТА САМОРЕГУЛЯРИЗАЦІЇ

При розрахунку електростатичних полів електронно-оптичних систем у плоскому випадку виникають одномірні інтегральні рівняння Фредгольма першого роду

$$\int\limits_{L} \mu(P) R(P, M)\, d\ell_p = U_0(M), \quad M \in L, \qquad /1/$$

де $L = \bigcup\limits_{i=1} L_i$ – довільні плоскі криві без точок самоперетину; $\mu(P)$ – невідома густина; $R(P,M) = \ln(1/|P-M|)$ – ядро; $U_0(M) \in C(L)$ – задане значення потенціалу на L.

Невідома густина у рівнянні /1/ має сингулярну поведінку на краю розімкнутої кривої, а також в точках її зламу, ядро – логарифмічну особливість при суміщенні точки спостереження з точкою інтегрування.

У цій праці пропонуємо криві L_i зображати за допомогою граничних елементів $\ell_m^{(i)} (m = \overline{1, N_i})$, для яких декартові координати довільної точки виражаються через координати вузлових точок $r_m^{\ell(i)}$ і базисні функції $N^{\ell}(\alpha)$ таким чином [4]:

$$r_m^{(i)}(\alpha) = \sum_{\ell=1}^{n} N^{\ell}(\alpha)\, r_m^{\ell(i)}, \quad r = (x, y). \qquad /2/$$

При n = 2,3,4 – дістаємо відповідно лінійну, квадратичну та кубічну апроксимації. Шукану густину записуємо як

$$\mu(\alpha) = \sum_{m=1}^{N_i} \mu_m^{(i)}(\alpha)\, \theta_m^{(i)}(\alpha), \qquad /3/$$

де

$$\mu_m^{(i)}(\alpha) = \begin{cases} \sum\limits_{\ell=1}^{n} N^{\ell}(\alpha)\, \mu_m^{\ell(i)}, & \alpha \in \ell_m^{(i)}; \\ 0, & \alpha \notin \ell_m^{(i)}; \end{cases}$$

$\mu_m^{\ell(i)}$ – невідоме значення густини у вузлі $(x_m^{\ell(i)}, y_m^{\ell(i)})$;
$\theta_m^{(i)}(\alpha)$ – функція, яка враховує особливість у густині на краю розімкнутої кривої [3].

Враховуючи /2/, /3/, рівняння /1/ набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{M}\left\{\sum_{m=1}^{N_i}\left\{\sum_{\ell=1}^{n}\mu_m^{\ell(i)}\int_{-1}^{1}N^{\ell}(\alpha)F_m^{(i)}(\alpha)\Theta_m^{(i)}(\alpha)R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha})\,d\alpha\right\}\right\} = U_{op}^{(j)}(\bar{\alpha}) , \quad \bar{\alpha}\in\ell_p^{(j)} , \qquad /4/$$

де $F_m^{(i)}(\alpha)$ - елемент довжини дуги кривої L_i ;

$$R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha}) = \ln\left(1/\left((x_m^{(i)}(\alpha)-x_p^{(j)}(\bar{\alpha}))^2+(y_m^{(i)}(\alpha)-y_p^{(j)}(\bar{\alpha}))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) .$$

Для визначення коефіцієнтів $\mu_m^{\ell(i)}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна отримати двома шляхами [1]. Перший - метод колокації, при цьому коефіцієнти матриці є інтегралами від функцій з особливостями в ядрі та густині на краю L , другий - за рахунок виділення особливості в ядрі, при цьому інтегральне рівняння першого роду зводиться до рівняння другого роду, яке розв"язується методом саморегуляризації [5].

У праці [2] описано алгоритм чисельного розв"язування рівняння /4/ методом колокації. Особливість у густині виділяли заміною змінних, а в ядрі - адитивним перетворенням типу Канторовича. На основі методу саморегуляризації рівняння першого роду зводиться до рівняння другого [5]. Методика зведення /4/ до рівняння другого роду грунтується на можливості виділення головної частини особливості ядра в достатньо малому околі особливої точки й апріорному припущенні про характер поведінки шуканого розв"язку.

Функцію $R_{Pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha})$ зобразимо у вигляді

$$R_{Pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha}) = \begin{cases} \ln\frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|}+\ln\frac{1}{V_p(\alpha,\bar{\alpha})}, & \text{якщо } \bar{\alpha}\in\ell_p^{(i)} ; \\ R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha}) & \text{, якщо } \bar{\alpha}\notin\ell_p^{(i)} , \end{cases} \qquad /5/$$

$V_p(\alpha,\bar{\alpha})\in C[-1,1]$, що залежить від порядку граничного елементу. Функцію $\ln\frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|}$ перепишемо як

$$\ln\frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|} = K_h(\alpha,\bar{\alpha}) + H(\alpha,\bar{\alpha}) , \qquad /6/$$

де

$$K_h(\alpha,\bar{\alpha}) = \begin{cases} \frac{h-|\alpha-\bar{\alpha}|}{h} \ln \frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|}, & |\alpha-\bar{\alpha}| \le h ; \\ 0 & , |\alpha-\bar{\alpha}| > h ; \end{cases}$$

$$H(\alpha,\bar{\alpha}) = \begin{cases} \frac{|\alpha-\bar{\alpha}|}{h} \ln \frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|} & , |\alpha-\bar{\alpha}| \le h ; \\ \ln \frac{1}{|\alpha-\bar{\alpha}|} & , |\alpha-\bar{\alpha}| > h . \end{cases}$$

Вважаємо, що при $|\alpha-\bar{\alpha}| \le h$, $\int_{-1}^{1} \mu_p(\alpha) F_p(\alpha) K_h(\alpha,\bar{\alpha})\, d\alpha =$
$\mu_p(\bar{\alpha})\, \theta_p^{-1}(\bar{\alpha}) \int_{-1}^{1} F_p(\alpha)\, \theta_p(\alpha)\, K_h(\alpha,\bar{\alpha})\, d\alpha$.
Тоді, враховуючи /5/, /6/, рівняння /4/ зводиться до рівняння другого роду:

$$\mu_p(\bar{\alpha})\theta_p^{-1}(\bar{\alpha}) \int_{-1}^{1} F_p(\alpha)\theta_p(\alpha) K_h(\alpha,\bar{\alpha})\, d\alpha + \int_{-1}^{1} \mu_p(\alpha) F_p(\alpha) \left(H(\alpha,\bar{\alpha}) + \ln \frac{1}{V_p(\alpha,\bar{\alpha})}\right) d\alpha + \sum_{i=1}^{M} \left\{ \sum_{\substack{m=1 \\ m \ne p}}^{N_i} \int_{-1}^{1} \mu_m^{(i)}(\alpha) F_m^{(i)}(\alpha) R_{pm}^{j(i)}(\alpha,\bar{\alpha})\, d\alpha \right\} = U_{op}(\bar{\alpha}) . \quad /7/$$

Описані методики чисельного розв"язування рівняння /1/ апробовано з допомогою тестового прикладу. Проведено чисельний розрахунок густини зарядів прямолінійного провідника, довжина якого дорівнює двом, зарядженого до одиничного потенціалу. Ця задача має аналітичний розв"язок [5].

Нижче наводимо значення максимальних Δ_{max} і середніх Δ_{cp} відхилень результатів чисельного розрахунку густини зарядів, отриманих методами колокації і саморегуляризації від аналітичного при різній кількості лінійних граничних елементів:

Кількість елементів	Метод колокації		Метод саморегуляризації	
	Δ_{max}	Δ_{cp}	Δ_{max}	Δ_{cp}
8	$7{,}8 \cdot 10^{-2}$	$1{,}01 \cdot 10^{-2}$	$7{,}7 \cdot 10^{-2}$	$1{,}02 \cdot 10^{-2}$
16	$7{,}7 \cdot 10^{-2}$	$9{,}3 \cdot 10^{-3}$	$7{,}6 \cdot 10^{-2}$	$9{,}1 \cdot 10^{-3}$
32	$6{,}4 \cdot 10^{-2}$	$6{,}5 \cdot 10^{-3}$	$6{,}1 \cdot 10^{-2}$	$6{,}1 \cdot 10^{-3}$

Експерименти показали, що для чисельного розв"язування рівняння /1/ достатньо застосовувати метод колокації без попереднього зведення його до рівняння другого роду. Стійкість розв"язку забезпечується структурою ядра з логарифмічною особливістю.

1. Бакалец В.А., Грицюк Н.П., Остудин Б.А. и др. О двух методах численного решения двумерных интегральных уравнений со слабой особенностью // Вычислительная и прикл. математика. 1985. Вып. 57. С. 12-20. 2. Бакалец В.А., Дорошенко Н.В. Исследование алгоритмов выделения особенностей при решении одномерных интегральных уравнений первого рода. Львов, 1986. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ № 1195 – Ук86. 3. Бакалец В.А., Людкевич И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Львов, 1986. 4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 5. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // Вычислительные методы и программирование. М., 1986. Вып. 10. С.49-54.

Стаття надійшла в редколегію 22.01.87

УДК 517.947:534

Р.С.Хапко

ПЕРША КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО РІВНЯННЯ НА НЕЗАМКНУТИХ КОНТУРАХ

Постановка задачі та зведення її до послідовності інтегральних рівнянь. Нехай на площині $x0y$ задана крива L

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\tau) \\ y &= y(\tau) \end{aligned}\right\}, \qquad T_1 \le \tau \le T_2 ,$$

яка може бути як замкнена, так і незамкнена. Необхідно знайти функцію $u(x,y,t)$, що задовольняє телеграфне рівняння

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} - cu = \Delta u , \qquad /1/$$

початкові умови

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 , \qquad /2/$$

граничну умову

$$u|_L = f(M,t) , \ M \in L , \qquad /3/$$

умову погодженості

$$f|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \qquad /4/$$

і в кожен момент часу t умову

$$\lim_{\rho \to 0} \rho \operatorname{grad} u = 0 , \qquad /5/$$

де ρ – радіус кола, проведеного в кожному кінці кривої L .
Вважатимемо також, що $a \neq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$, функція $u(x,y,t)$ обмежена на безмежності, а розв"язок задачі /I/ – /5/ існує та єдиний.

Для розв"язання задачі /I/ – /5/ використаємо так званий комбінований метод, що полягає у поєднанні інтегрального перетворення і методу інтегральних рівнянь. Застосовуючи перетворення з ядром Чебишева-Лагерра [2] до /I/ – /5/, дістаємо

$$\Delta u_n - \left(\frac{\varkappa^2}{a^2} + b\varkappa - c\right) u_n = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{\varkappa^2}{a^2}(n-m+1) + b\varkappa\right) u_m , \qquad /6/$$

$$u_n\big|_L = f_n(M), \quad M \in L , \qquad /7/$$

$$\lim \rho \operatorname{grad} u_n = 0, \qquad /8/$$

де $u_n = \int_0^\infty u(x,y,t)\, e^{-\varkappa t} L_n(\varkappa t)\, dt$,

$f_n = \int_0^\infty f(x,y,t)\, e^{-\varkappa t} L_n(\varkappa t)\, dt$ – зображення по Чебишеву-Лагерру функції $u(x,y,t)$ і $f(x,y,t)$.

Можна показати, що розв"язок n –ї стаціонарної задачі послідовності /6/ – /8/ зображається у вигляді

$$u_n(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \int_{T_1}^{T_2} q_m(\tau)\, \varphi_{n-m}(x,y,\tau)\, F(\tau)\, d\tau , \qquad /9/$$

де $q_m(\tau)$ – невідомі функції, які назвемо густинами;
φ_k – фундаментальний розв"язок k -го рівняння послідовності /6/; $F(\tau)$ – елемент дуги.

Задовольняючи граничні умови /7/ і /8/, для знаходження невідомих густин отримуємо послідовність інтегральних рівнянь Фредгольма I-го роду:

$$\int_{T_1}^{T_2} q_n(\tau)\, \varphi_0(x,y,\tau)\, F(\tau)\, d\tau = f_n(x,y) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_{T_1}^{T_2} q_m(\tau)\, \varphi_{n-m}(x,y,\tau)\, F(\tau)\, d\tau . \qquad /10/$$

Таким чином, з допомогою інтегрального перетворення Чебишева-Лагерра вихідна крайова задача зводиться до послідовності стаціонарних граничних задач для неоднорідних рівнянь

Гельмгольца на площині. Далі шляхом зображення розв"язків цих задач в інтегральному виді можна одержати послідовність інтегральних рівнянь. Важливою особливістю їх є те, що невідомі густини, визначені з попередніх рівнянь, входять у праву частину наступних.

Знаходження фундаментальних розв"язків. Легко показати, що фундаментальний розв"язок рівняння /1/ має вигляд

$$\xi(x,y,t)=\frac{\operatorname{ch}\left(\alpha\sqrt{(t)^2-R^2/a^2}\right)}{\sqrt{t^2-R^2/a^2}}\,e^{-\frac{ba^2 t}{2}}\cdot S_+(t-R/a)\,, \qquad /11/$$

де $\alpha^2=\frac{a^4 b^2}{4}+ca^2$; $S_+(x)$ – асиметрична функція Хевісайда; R – відстань.

Можна довести, що зображення по Чебишеву-Лагерру функції /11/ – це фундаментальні розв"язки послідовності /6/, які мають вигляд

$$\varphi_n(x,y)=\int_0^\infty \xi(x,y,t)\,e^{-\varkappa t}L_n(\varkappa t)\,dt\,, \qquad /12/$$

де

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k^{(n)}(-1)^k x^k \qquad /13/$$

поліноми Чебишева-Лагерра; $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$; $d_k^{(n)}$ – відомі коефіцієнти [4].

Застосовуючи перетворення Лапласа до /11/ і формулу /13/, із /12/ отримуємо

$$\varphi_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k^{(n)}\varkappa^k\,\frac{d^k E(\varkappa,y)}{d\varkappa^k}\,. \qquad /14/$$

Оскільки $E(x,y)=K_0\left(\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}\;R\right)$, то з /14/ можемо знайти

$$\varphi_0(x,y)=E(x,y)=K_0\left(\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}\;R\right), \qquad /15/$$

$$\varphi_1(x,y)=E(x,y)+\varkappa\frac{dE}{d\varkappa}=K_0\left(\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}\;R\right)-$$

$$-\frac{\varkappa\left(\frac{2\varkappa}{a^2}+b\right)R}{2\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}}\cdot K_1\left(\sqrt{\frac{\varkappa^2}{a^2}+b\varkappa-c}\;R\right) \qquad /16/$$

і т.д., де $K_n(x)$ – модифіковані функції Ханкеля [4].

Розв"язування послідовності інтегральних рівнянь. Для знаходження розв"язків рівнянь /10/ використаємо метод колокації з наступним виділенням особливостей у густинах і ядрах [1].

Розіб"ємо проміжок $[T_1 ; T_2]$ на N -1 елемент довжиною h ; зобразимо невідомі густини у вигляді

$$q_n(\tau) = \sum_{K=1}^{N} a_K^{(n)} \mu_K(\tau) , \qquad /17/$$

де $a_K^{(n)}$ - невідомі коефіцієнти; $\mu_K(\tau)$ - фінітні функції [3]. Причому $\mu_1(\tau)$ і $\mu_N(\tau)$ враховують особливість густин на краях у випадку розімкнутого контура " [1].

Підставивши /17/ в /10/ і задовольняючи граничні умови в N точках колокації, для визначення $a_K^{(n)}$ одержимо послідовність систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{K=1}^{N} a_K^{(n)} A_{Kj}^{(0)} = f_n(x_j, y_j) - \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{K=1}^{N} a_K^{(m)} A_{Kj}^{(n-m)} , \qquad /18/$$

де

$$A_{Kj}^{(i)} = \int_{\tau_{K-1}}^{\tau_{K+1}} \mu_K(\tau) F(\tau) \varphi_i(x_j , y_j , \tau)\, d\tau . \qquad /19/$$

Послідовність систем /18/ характерна тим, що матриці її однакові, а права частина на кожному кроці перераховується і містить інформацію про розв"язки,обчислені на попередніх етапах.

При суміщенні точок колокації з точками інтегрування в коефіцієнтах $A_{Kj}^{(i)}$ виникають логарифмічні особливості в ядрах за рахунок функції $K_0(x)$.

З формул /16/ і /17/ випливає, що будь-який фундаментальний розв"язок $\varphi_n(x,y), (n=1,2,...)$ можна зобразити у формі

$$\varphi_n(x,y) = \varphi_0(x,y) + \bar{\varphi}_n(x,y) ,$$

де $\bar{\varphi}_n(x,y)$ при $(x,y) \to 0$ мають скінченні границі.

Отже, у коефіцієнтах матриці та правих частинах системи маємо логарифмічну особливість, яку виділяємо згідно з методикою [1] лише один раз і використовуємо на кожному кроці.

Таким чином, розв"язавши n разів систему /18/, густини $q_n(\tau)$ обчислюємо за формулою /17/, а розв"язки стаціонарних задач $U_n(x,y)$ - за формулами /9/.

Відомо [2], що за знайденими зображеннями U_n оригінал шукають з допомогою формули

$$u(x,y,t) = \varkappa \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y)\, L_n(\varkappa t) . \qquad /20/$$

При практичних розрахунках обмежуємось частинною сумою ряду /20/. За допомогою підбору параметра $\varkappa$ можна досягнути потрібної точності розв"язання задачі на певному проміжку часу з невеликою кількістю членів ряду /20/.

Перевага даного методу - отримання розв"язку в аналітичному вигляді, що дає змогу знайти його значення при будь-яких аргументах і необхідності диференціювання.

1. Бакалец В.А., Людкевич И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Львов, 1986. 2. Галазюк В.А., Людкевич И.В., Музычук А.Е. Метод интегральных уравнений в нестационарных задачах дифракции. Львов, 1984. Рукопись деп в УкрНИИНТИ № 602 Ук - 85 Дп. 3. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981. 4. Справочник по специальным функциям /Под ред. Абрамовица М., Стигана М. М., 1979.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.87

УДК 518:517.948

Е.Собхі

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО РОДУ В ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма, що часто зустрічаються під час розрахунку потенціальних стаціонарних полів різної фізичної природи [6]. Мова йтиме про одномірні рівняння

$$\int_a^b \mu(t)F(t)\,\ln\frac{1}{d(t,\bar{x},\bar{y})}\,dt = f_0(\bar{x},\bar{y}) \qquad /1/$$

Тут $\mu(t)$ - шукана функція, контур заданий рівняннями $\{x = x(t),\ y = y(t),\ a \le t \le b\}$, $F(t)=\{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\}^{1/2}$, елемент довжини дуги $d(t,\bar{x},\bar{y}) = \{[x(t)-\bar{x}]^2 + [y(t)-\bar{y}]^2\}^{1/2}$, $\bar{x} = x(\bar{t})$, $\bar{y} = y(\bar{t})$, $a \le \bar{t} \le b$;

$$\int_a^b \mu(t)F(t)K(k)/d(t,\bar{r},\bar{z})\,dt = f_0(\bar{r},\bar{z})\,. \qquad /2/$$

Тут контур описується у циліндричній системі координат $\{r = r(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b\}$; $K(k)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду [6].

Двовимірне рівняння

$$\int_a^b\int_c^d \sigma(u,v)\,F(u,v)/R(u,v,\hat{x})\,du\,dv = f_0(\hat{x}) \ , \qquad /3/$$

де поверхня S задана параметричними рівняннями

$$\{x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v)\in\Delta,\ \Delta : a\le u\le b,\ c\le v\le d\}\ ;$$

$\sigma(u,v)$ – шукана функція; $F(u,v)$ – елемент площі; $R(u,v,\hat{x})$ – відстань від точки спостереження $\hat{x} = \{x,y,z\}$ $\hat{x}\in S$ до точки інтегрування $(u,v)\in\Delta$. У всіх рівняннях /1/ – /3/ праві частини задані кусково неперервні функції.

Граничний контур /або поверхню/ в усіх трьох рівняннях у загальному випадку пропонується задавати за допомогою апарату граничних елементів [5], кожен з яких задається таким чином:

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \varphi_j(t)\, r_j^{(i)} \ , \quad r = (x,y)\ , \quad i = \overline{1,m} \qquad /4/$$

у плоскому випадку, де $\varphi_j(t)$ – базисні функції; $r_j^{(i)}$ – вузли елемента; $N^{(i)}$ – степінь апроксимації; m – кількість граничних елементів. Аналогічно у просторовому випадку [3]

$$x_i(u,v) = \sum_{j=1}^{N^{(i)}} P_j(u,v)\,\hat{x}_j^{(i)} \ , \quad \hat{x} = (x,y,z)\ , \ i = \overline{1,m}\ . \qquad /5/$$

Відзначимо, що у всіх рівняннях /1/ – /3/ невідома густина має сингулярну поведінку на краю границі, а також в точках її злому. Врахувати це можна відповідним зображенням густини на кожному елементі:

$$\mu_i(t) = \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \varphi_j(t)\,\mu_j^{(i)}\,\theta_i(t) \qquad /6/$$

для плоского випадку, де $\mu_j^{(i)}$ – значення функції $\mu_i(t)$ в точках $r_j^{(i)}$; $\theta_i(t)$ – функції, які задають особливість на краю контура [1]. Для двомірного рівняння задання аналогічне і має вигляд

$$\sigma_i(u,v) = \sum_{j=1}^{N^{(i)}} P_j(u,v)\,\mu_j^{(i)}\,\theta_i(u,v). \qquad /7/$$

Таким чином, і геометрія, і невідома функція в рівняннях /1/ – /3/ задаються з допомогою так званого апарату ізопараметричних перетворень / 7 /. Задовольняючи рівняння /1/ – /3/ у відповідній кількості точок спостереження, вибраних на контурі L рівняння /1/, /2/ і на поверхні S рівняння /3/, для визначення невідомих коефіцієнтів отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнтами якої будуть значення відповідних інтегралів. Вказані інтеграли матимуть у загальному випадку дві особливості: в ядрі при суміщенні точки спостереження з точкою інтегрування та густині у крайніх /згідно з зображенням/ граничних елементах. Вказані особливості виділяються аналітично / 4 /, так, що коефіцієнти матриці завжди можна визначити із заданою точністю.

Зазначимо, що дослідження ефективних способів обчислення інтегралів із заданими особливостями проведено в праці [1], результати якої свідчать на користь методу аналітичного виділення особливостей.

Таким чином, для розв"язання всіх трьох рівнянь теорії потенціалу /1/ - /3/ пропонуємо єдиний підхід, який полягає у наступному:

1/ границя і невідома густина зображаються граничними елементами з заданими особливостями;

2/ метод розв"язування - метод колокації;

3/ особливості в коефіцієнтах матриці систем лінійних алгебраїчних рівнянь виділяються аналітично;

4/ точність отриманих розв"язків перевіряється задоволенням рівнянь /1/ - /3/ у проміжкових точках. Причому ядра рівнянь /1/ - /3/ гарантують досягнення максимальної похибки саме у проміжних точках.

Розрахунки тестових прикладів і конкретних задач [2] дають змогу стверджувати, що при належному виборі степені апроксимації на елементі та кількості елементів гарантована похибка розв"язку для рівнянь /1/, /2/ не перевищує 0,1 %, а для рівняння /3/ - 0,5 %.

1. Бакалец В.А., Дорошенко Н.В. Исследование алгоритмов выделения особенностей при решении одномерных интегральных уравнений первого рода. Львов, 1986. Рукопись доп. в УкрНИИНТИ, № 1195. Ук-86. 2. Бакалец В.А., Дорошенко Н.В. Численное решение двумерных интегральных уравнений в электронной оптике с использованием изопараметрических преобразований // Теоретическая электротехника. 1984. Вып. 37. С. 96-100. 3. Бакалец В.А., Людкевич И.В. Численное решение пространственных задач электронной оптики методом интегральных уравнений. Львов, 1986. 4. Бакалец В.А., Щирий И.И. Выделение особенностей в плотности и ядре двумерного интегрального уравнения для сложных граничных поверхностей // Вычислительная и прикладная математика. 1985. № 56.

С. 14-17. 5. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М., 1984. 6. Ильин В.П. Численные методы задач электрофизики. М., 1985. 7. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.86

УДК 517.944:947

Марія Д. Мартиненко, Михайло Д. Мартиненко

ПРО МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У праці [3] запропоновано модифікований метод еквівалентної лінеаризації для розв"язування задачі Коші

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(y)b(x) + c(x) , \qquad /1/$$

$$y|_{x=x_0} = y_0 \neq 0 , \qquad /2/$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - неперервні функції на проміжку $[x_1, x_2]$, що містить в середині точку x_0 ; $f(y)$ - однозначна та неперервна на деякому проміжку $[y_1, y_2]$ функція, яка задовольняє на ньому умову Ліпшица

$$|f(y) - f(z)| \leq K|y-z| , \qquad /3/$$

$$K = \text{const} , \quad y, z \in [y_1, y_2] ,$$

причому $y_1 < y_0 < y_2$. Як відомо [2], при цих умовах задача /1/ - /2/ має єдиний розв"язок.

Позначимо через $\tilde{y}(x)$ розв"язок такої лінійної задачі Коші:

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} + a(x)\tilde{y} = k b(x)\tilde{y} + c(x) , \qquad /4/$$

$$\tilde{y}|_{x=x_0} = y_0 , \qquad /5/$$

де

$$k = \frac{f(y_0)}{y_0} . \qquad /6/$$

Явний вигляд $\tilde{y}(x)$ можна записати у квадратурах за відомими формулами *.

Звичайними міркуваннями, пов"язаними з використанням еквівалентних задачам /1/ – /2/ та /4/ – /5/ інтегральних рівнянь, можна довести оцінки близькості їх розв"язків

$$\max_{|x-x_0|\le h} |y-\tilde{y}| \le \mathcal{A} h \max_{|x-x_0|\le h} |\tilde{y}(x) - y_0| ,$$

$$\mathcal{A} = \max_{|x-x_0|\le h} |b(x)| \cdot \left[K + \left|\frac{f(y_0)}{y_0}\right|\right] \cdot \left\{1 - h\left[\max_{|x-x_0|\le h} |a(x)| + K \max_{|x-x_0|\le h} |b(x)|\right]\right\}^{-1} ; \qquad /7/$$

$$\max_{|x-x_0|\le h} |y-\tilde{y}| \le \frac{\mathcal{B}\left[K + \left|\frac{f(y_0)}{y_0}\right|\right]}{1-\mathcal{B}Kh} \max_{|x-x_0|\le h} |\tilde{y} - y_0| \cdot h ;$$

$$\mathcal{B} = \left(\max_{|x-x_0|\le h} e^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\right) \cdot \left(\max_{|x-x_0|\le h} e^{-\int_{x_0}^{x} a(x)dx}\right) \max_{|x-x_0|\le h} |b(x)| . \qquad /8/$$

Ці нерівності вдається уточнити, оскільки розв"язок задачі /4/ – /5/ виписується в явному вигляді і тому можна оцінити $\max_{|x-x_0|\le h} |\tilde{y} - y_0|$ через $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ та h.

Нерівності /7/ та /8/ показують, що $\tilde{y}$ можна розглядати як наближений розв"язок нелінійної задачі /1/–/2/.

Як приклад візьмемо задачу [1]

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}1(x^3 + y^3) , \qquad /9/$$

$$y|_{x=0} = 1 . \qquad /10/$$

Точний розв"язок цієї задачі будуємо з допомогою методу рядів:

$$y = 1 + 10^{-1}x + 10^{-2}x^2 + 10^{-3}x^3 + 2{,}51\cdot 10^{-2}x^4 + 1{,}101\cdot 10^{-3}x^5 +$$

$$+ 1{,}17\cdot 10^{-4}x^6 + 1{,}3\cdot 10^{-5}x^7 + 1{,}5\cdot 10^{-6}x^8 + \dots \qquad /11/$$

---

* Якщо $y_0 = 0$, то за допомогою заміни $y = d + z$ одержуємо для нової невідомої функції z ненульову початкову умову.

За формулами /4/ - /5/ - /6/ для y маємо задачу

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = 0{,}1x^3 + 0{,}1\tilde{y} .$$

$$\tilde{y}|_{x=0} = 1 .$$

Звідси [2]

$$\tilde{y} = 6001e^{0{,}1x} - [x^3 + 30x^2 + 600x + 6000] =$$
$$= 1 + 0{,}1x + 5\cdot 10^{-3}x^2 + 1{,}7\cdot 10^{-4}x^3 + 2{,}5\cdot 10^{-2}x^4 + \ldots \qquad (12)$$

При $x \in [0,1]$ точний розв"язок за формулою /11/ відрізняється від наближеного за формулою /12/ щонайбільше на 1 %.

На закінчення відзначимо, що запропонований метод еквівалентної лінеаризації можна узагальнити на системи нелінійних рівнянь першого порядку спеціального виду, а також нелінійні рівняння вищих порядків.

1. К у н ц К.С. Численный анализ. К., 1964. 2. Л о п а т и н с к и й Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. К., 1984. 3. М а р т и н е н к о Марія Д., М а р т и н е н к о Михайло Д. Модифікований метод еквівалентної лінеаризації для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1987. Вип.27. С. 55-57.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.86

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ЕКВІВАЛЕНТНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЛЬЄНАРА

Рівняння Льєнара, що відіграють важливу роль у теорії нелінійних коливань, мають такий вигляд [3]:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad , \qquad /1/$$

де штрихом позначаємо диференціювання по незалежній змінній t.

Детальний якісний аналіз цього рівняння наведено у праці [1].

Це рівняння еквівалентне такій системі:

$$x' + F(x) - y = 0 \quad ,$$
$$y' + g(x) = 0 \quad , \qquad /2/$$

де
$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx \quad . \qquad /3/$$

Тому надалі розглядаємо систему /2/ у припущенні, що функції $F(x)$ і $g(x)$ визначені у проміжку $[a,b]$ та задовольняють на ньому умову Ліпшиця зі сталими M та N :
$$|F(x_1)-F(x_2)|\leq M\,|x_1-x_2|\ ,$$
$$|g(x_1)-g(x_2)|\leq N\,|x_1-x_2|, \qquad /4/$$
$$x_1\,,\ x_2\in[a,b]\ .$$

Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то $F(x)$ визначена формулою /3/ і задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$ $[2]$.

Розв"язок системи /2/ шукаємо при умові *
$$x|_{t=t_0}=x_0\neq 0\ ,$$
$$y|_{t=t_0}=y_0\ . \qquad /5/$$
За наближений розв"язок задачі /2/-/5/ візьмемо розв"язок такої лінійної задачі Коші:
$$\tilde{x}'+K_1\tilde{x}-\tilde{y}=0\ ,$$
$$\tilde{y}'+K_2\tilde{x}=0\ ; \qquad /6/$$

$$\tilde{x}|_{t=t_0}=x_0\ ,$$
$$\tilde{y}|_{t=t_0}=y_0\ , \qquad /7/$$

де
$$K_1=\frac{F(x_0)}{x_0}\ ; \qquad K_2=\frac{g(x_0)}{x_0}\ . \qquad /8/$$

Функції $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ легко виписати за відомими методами $[2]$. При цьому коливні незатухаючі розв"язки отримаємо, коли $K_1=0$, $K_2>0$, а коливні затухаючі $-K_1^2-4K_2<0$, $K_1>0$.

Для оцінки близькості так отриманого наближеного і точного розв"язків зауважимо, що їх різниця $u=x-\tilde{x}$, $v=y-\tilde{y}$ є розв"язком такої системи інтегральних рівнянь :
$$u=-\int_{t_0}^{t}[F(x)-K_1\tilde{x}-v]\,d\tau\ ,$$
$$v=-\int_{t_0}^{t}[g(x)-K_2\tilde{x}]\,d\tau\ . \qquad /9/$$

---
* Якщо $x_0=0$, то заміною $z=x+c$ можна для z отримати ненульову початкову умову при $t=t_0$.

З /9/ на основі /4/ маємо

$$\max_{t_1 \le t \le t_2} |u| \le \frac{\left[M + \left| \frac{F(x_0)}{x_0} \right| \right] \max\limits_{t_1 \le t \le t_2} |x - x_0|}{1 - M \cdot |t_1 - t_2|} \cdot |t_1 - t_2| ,$$

$$\max_{t_1 \le t \le t_2} |v| \le \left\{ \frac{N\left[M + \left| \frac{F(x_0)}{x_0} \right| \right]}{1 - M \cdot |t_1 - t_2|} + \left[N + \left| \frac{g(x_0)}{x_0} \right| \right] \right\} \cdot \max_{t_1 \le t \le t_2} |\tilde{x} - x_0| \cdot |t_1 - t_2| \qquad /10/$$

Оцінки /10/ мають загальний характер і їх можна уточнити для конкретних видів рівнянь Льєнара. Наприклад, для рівняння

$$x'' + \omega^2 x + g(x) = 0 , \qquad /11/$$

наближений розв"язок $\tilde{x}$ можна будувати на основі рівняння

$$\tilde{x}'' + \omega^2 \tilde{x} + K_2 \tilde{x} = 0 , \qquad /12/$$

де $K_2 = \frac{g(x_0)}{x_0}$, а початкові умови збігаються з умовами Коші для рівняння /11/. Тоді різниця $u = x - \tilde{x}$ є розв"язком рівняння

$$u'' + \omega^2 u + g(x) - K_2 \tilde{x} = 0$$

при нульових початкових умовах.

Тому

$$u(x) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\omega} \sin\omega(t - \tau)\left[g(x(\tau)) - K_2 \tilde{x}(\tau) \right] d\tau .$$

Звідси, враховуючи /4/, маємо

$$\max_{t_1 \le t \le t_2} |u(t)| \le \frac{\left[N + \left| \frac{g(x_0)}{x_0} \right| \right] \max\limits_{t_1 \le t \le t_2} \left| \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\omega} |\sin\omega(t - \tau)| d\tau \right|}{1 - M \max\limits_{t_1 \le t \le t_2} \left| \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^{t} |\sin\omega(t - \tau)| d\tau \right|} \cdot \max_{t_1 \le t \le t_2} |x - x_0| .$$

Ця оцінка записана у вигляді, що охоплює випадки $\omega \ne 0$ та $\omega = 0$.

<u>Приклад</u>. Для ілюстрації ефективності запропонованого вище методу еквівалентної лінеаризації розв"яжемо таку задачу Коші *:

$$x'' + \omega_0^2 x + h x^3 = 0 ,$$

$$x\Big|_{t=0} = A_0 , \quad x'\Big|_{t=0} = 0 . \qquad /13/$$

* У сучасній літературі цей частинний випадок рівняння Льєнара носить назву рівняння Дюффінга [1].

На основі /12/ наближений розв"язок задач /13/ має вигляд

$$\tilde{x} = A_0 \cos\sqrt{\omega_0^2 + hA_0^2}\,t \ . \qquad /14/$$

Точний розв"язок задачі /13/ виражаємо через еліптичну функцію Якобі

$$x = A_0 \,\mathrm{cn}\sqrt{\omega_0^2 + hA_0^2}\,t \ . \qquad /15/$$

З /14/ та /15/ випливає, що як точний, так і наближений розв"язки розглядуваної задачі є періодичними функціями t .

З /15/ маємо для періоду T точного розв"язку

$$T = \frac{4K(k)}{\sqrt{\omega_0^2 + hA_0^2}},$$

де $K(k)$ - повний еліптичний інтеграл першого роду,

$$k^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{hA_0^2}{\omega_0^2 + hA_0^2} \ .$$

Розкладаючи $K(k)$ в ряд, записуємо

$$T = \tilde{T}\left\{1 + \frac{1}{8}\,\frac{hA_0^2}{\omega_0^2 + hA_0^2} + \frac{9}{256}\left(\frac{hA_0^2}{\omega_0^2 + hA_0^2}\right)^2 + \dots\right\},$$

причому

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + hA_0^2}}$$ - період наближеного розв"язку, даного /14/.

Формули /14/, /15/ і /16/, /17/ показують, що метод еквівалентної лінеаризації привів до розв"язку, який досить наближає точний "у цілому".

1. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М., 1986. 2. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. К., 1984. 3. Рейсинг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.

Стаття надійшла до редколегії 01.09.86

УДК 517.9

Ю.М.Сибіль

ІСНУВАННЯ РОЗВ"ЯЗКУ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ТА НЕЙМАНА У ВИПАДКУ РОЗІМКНУТИХ ГРАНИЦЬ

У праці [4] розглянуто двомірну задачу Діріхле для рівняння Гельмгольця

$$\Delta u(x) + \varkappa^2 u(x) = 0, \quad \operatorname{Im}\varkappa \leq 0,\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus L,$$
$$u_\pm(x) = \gamma_\pm(x), \qquad x \in L, \qquad /1/$$

де $L = \bigcup_{j=1}^{m} L_j$ – об"єднання гладких розімкнутих контурів без спільних точок; c_{2j-1}, c_{2j} – точки кінців L_j. Крім того, функція $u(x)$ задовольняє умову на кінцях L та умову на нескінченності. Показано, що ця задача еквівалентна інтегральному рівнянню першого роду

$$K\tau \equiv \int_L Q(x,y)\tau(y)\,ds_y = g(x), \quad x \in L, \qquad /2/$$

яке має єдиний розв"язок для довільної функції $g \in C^{1,\alpha}(L)$. Тут $Q(x,y) = \frac{1}{4} i H_0^{(2)}(\varkappa r(x,y))$ – фундаментальний розв"язок рівняння /1/.

Нехай $\omega(y)$ – деяка гладка функція, що обертається в нуль порядку $0 < \gamma_j < 1$ у кінці c_j, $j = \overline{1,2m}$. Розглянемо гільбертові простори $\mathcal{L}_2(\omega, L)$ і $W_2^1(\omega, L)$ зі скалярними добутками:

$$(\sigma, \gamma)_2 = \int_L \sigma(y)\overline{\gamma(y)}\,\omega(y)\,ds_y,$$
$$(f, g)_{1,2} = (f,g)_2 + \left(\frac{df}{ds_y}, \frac{dg}{ds_y}\right)_2,$$

де $\vec{s}_y$ – дотична до L у точці y.

<u>Теорема 1</u>. Рівняння /2/ має єдиний розв"язок для довільної функції $g \in W_2^1(\omega, L)$. Існує обмежений обернений оператор
$$K^{-1}: W_2^1(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L).$$

<u>Доведення</u>. Продиференціюємо ліву та праву частини /2/:

$$F\tau \equiv \int_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x}\tau(y)\,ds_y = \frac{dg(x)}{ds_x} = \varphi(x), \quad x \in L. \qquad /3/$$

Оператор $F: \mathcal{L}_2(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L)$ обмежений, бо складається із сингулярного оператора, обмеженого в $\mathcal{L}_2(\omega, L)$ [1, 2] і цілком неперервного доданку. Розглянемо оператор F^*, спряжений до F. Із рівності $(F\tau, \sigma)_2 = (\tau, F^*\sigma)_2$ маємо

$$F^*\sigma = \frac{1}{\omega(y)}\int_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x}\sigma(x)\omega(x)\,ds_x.$$

Знайдемо $\ker F^*$; $\sigma(x) \in \ker F^*$, якщо

$$\int_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x}\, \overline{\sigma(x)}\, \omega(x)\, ds_x = 0 . \qquad /4/$$

Можна показати, що функція $z(x) = \overline{\sigma(x)}\omega(x)$ обертається в нуль на кінцях L. Тому рівняння /4/ можна записати у такому вигляді:

$$\int_L Q(x,y)\, \frac{dz(x)}{ds_x}\, ds_x = 0 .$$

З теореми єдиності дістаємо $z(x) = \mathrm{const}$, тобто $\sigma(x) \equiv 0$ на L. Отже, $\ker F^* = \emptyset$. Оскільки оператор F замкнутий і $\ker F^* = \emptyset$, то $\mathrm{im}\, F = \overline{\mathrm{im}\, F} = \mathcal{L}_2(\omega, L)$. Використовуючи зв"язок між операторами K і F, бачимо, що $\mathrm{im}\, K = W_2^{\frac{1}{2}}(\omega, L)$. Таким чином, для довільної функції $g \in W_2^{\frac{1}{2}}(\omega, L)$ існує єдиний розв"язок $\tau \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$ рівняння /2/. Оскільки обмежений оператор K взаємно однозначно відображає $\mathcal{L}_2(\omega, L)$ на $W_2^{\frac{1}{2}}(\omega, L)$, то за теоремою Банаха існує обмежений обернений оператор $K^{-1} : W_2^{\frac{1}{2}}(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L)$.

Розглянемо задачу Неймана для рівняння Гельмгольца, тобто задачу з крайовою умовою

$$\left(\frac{\partial U(x)}{\partial n_x}\right)^{\pm} = \gamma^{\pm}(x), \quad x \in L .$$

У праці [3] доведено еквівалентність цієї задачі та сингулярного інтегро-диференціального рівняння першого роду

$$H\tau \equiv \int_L \frac{\partial Q(x,y)}{\partial s_x}\, \frac{d\tau(y)}{ds_y}\, ds_y + \varkappa^2 \int_L Q(x,y)(\vec{n}_x \cdot \vec{n}_y)\, \tau(y)\, ds_y = g(x) \qquad /5/$$

з умовою

$$\tau(c_i) = 0, \qquad i = \overline{1, 2m}. \qquad /6/$$

Розглянемо гільбертів простір $\overset{0}{W}{}_2^{\frac{1}{2}}(\omega, L)$ функцій з $W_2^{\frac{1}{2}}(\omega, L)$, що обертаються в нуль на кінцях L.

<u>Теорема 2</u>. Рівняння /5/ має єдиний розв"язок $\tau \in \overset{0}{W}{}_2^{\frac{1}{2}}(\omega, L)$ для довільної функції $g \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$. Існує обмежений обернений оператор $H^{-1} : \mathcal{L}_2(\omega, L) \to \overset{0}{W}{}_2^{\frac{1}{2}}(\omega, L)$.

<u>Доведення</u>. Оператор H можна зобразити у вигляді

$$H\tau = F_0\tau' + T\tau , \qquad /7/$$

де $T : \overset{0}{W}{}_2^{\frac{1}{2}}(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L)$ – цілком неперервний оператор, а

$$F_0\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\partial}{\partial s_x} \ln r(x, y)\, \varphi(y)\, ds_y .$$

Аналогічно, як і для оператора F, можна показати, що $\ker F_0^* = \emptyset$. Тому $\mathrm{im}\, F_0 = \mathcal{L}_2(\omega, L)$, $\dim \ker F_0 = m$, тобто існує m лінійно незалежних функцій $\varphi_k^{(0)}(y)$, $k = \overline{1, m}$, таких, що $F_0 \varphi_k^{(0)} = 0$, причому $\varphi_k^{(0)}(y) = 0$, $y \in L_j$, $j \neq k$.

Розглянемо оператор $H_0 : \overset{o}{W}{}_2^1(\omega, L) \to \mathcal{L}_2(\omega, L)$;

$$H_0\tau = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\partial}{\partial s_x} \ln r(x,y) \frac{d\tau(y)}{ds_y} ds_y .$$

Оскільки $\operatorname{im} F_0 = \mathcal{L}_2(\omega, L)$, то для довільної функції $f \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$ існує функція $\tau(y)$ така, що $H_0\tau = f$, $\tau(y) = \tau_j(y)$, $y \in L_j$, а $\tau_j(y)$ можна зобразити як

$$\tau_j(y) = g_j^*(y) + a_j \tau_j^{(0)}(y) + d_j ,$$

де $\varphi_j^{(0)}(y) = \dfrac{d\tau_j^{(0)}(y)}{ds_y}$, a_j і d_j – довільні константи; $H_0 g^* = f$.

Покажемо, що константи a_j і d_j можна підібрати таким чином, коли $\tau_j(c_{2j-1}) = \tau_j(c_{2j}) = 0$, тобто система

$$\begin{cases} a_j \tau_j^{(0)}(c_{2j-1}) + d_j = -g_j^*(c_{2j-1}), \\ a_j \tau_j^{(0)}(c_{2j}) + d_j = -g_j^*(c_{2j}) \end{cases}$$

має єдиний розв"язок. Нехай $\tau_j^{(0)}(c_{2j-1}) = \tau_j^{(0)}(c_{2j}) = p$. Тоді функція $\tau_j^*(y) = \tau_j^{(0)}(y) - p$ є розв"язком рівняння $H\tau^* = 0$ з умовою /6/. З теореми єдиності / 3 / отримуємо $\tau_j^*(y) = 0$, тобто $\tau_j^{(0)}(y) \equiv p$, що неможливо.

Таким чином, ми показали, що для довільної функції $f \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$ існує єдина функція $\tau \in \overset{o}{W}{}_2^1(\omega, L)$ така, що $H_0\tau = f$. Тому оператор H_0 є нетерівським і $\operatorname{ind} H_0 = 0$. З /7/ випливає, що $\operatorname{im} H = \mathcal{L}_2(\omega, L)$, бо $\operatorname{ind} H = 0$, а $\dim \ker H = 0$. Отже, рівняння /6/ має єдиний розв"язок $\tau(y) \in \overset{o}{W}{}_2^1(\omega, L)$ для довільної функції $g \in \mathcal{L}_2(\omega, L)$. Існування обмеженого оператора $H^{-1} : \mathcal{L}_2(\omega, L) \to \overset{o}{W}{}_2^1(\omega, L)$ випливає з теореми Банаха.

1. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973. 2. Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения // Усп. мат. наук. 1948. Т.3. Вып.3. С.29–112. 3. Сибіль Ю.М. Задача Неймана для рівняння Гельмгольца на площині у випадку розімкнутих границь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1985. Вип. 25. С. 40–44. 4. Hayashi J. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary // J. Math Anal. Appl. 1973 Vol.44 P.489-530

Стаття надійшла до редколегії 27.II.87

УДК 533.6.013.42

О.В.Блажиевська

НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ТИСКУ У СИСТЕМІ "РІДКИЙ ПІВПРОСТІР – ПРУЖНА ПЛАСТИНА"

Відомо [2], що при дослідженні поля тисків у достатньо віддалених від пластини точках спостереження слід враховувати нелінійні властивості рідини навіть у тому випадку, коли амплітуди хвиль деформації малі.

Дослідимо поле тисків в ідеальній стисливій рідині, яка заповнює півпростір і стикається з безмежною пружною пластиною.

Введемо позначення: x^*, z^*, t^* – декартові координати і час; w^*, $2h^*$ – прогин і товщина пластинки; ρ_1^* – густина матеріалу пластинки; ρ_0^* – початкова густина рідини; c_0^* – швидкість звуку у незбуреній рідині; p^* – збурення тиску; q_0^* – постійна, яка має розмірність тиску; $t = c_0^* t^* (2h^*)^{-1}$; $\rho_1 = \rho_1^* / \rho_0^*$; $p = p^* / q_0^*$; $(x, z, w, 2h) = (x^*, z^*, w^*, 2h^*)/(2h^*)$.

Припустимо, що пластинка виводиться зі стану спокою рівномірно розподіленою нормальною силою $q^* = q_0^* q(t) \times [H(t) - H(t-t_0)]$, де $q(t)$ – задана неперервна функція; H – функція Хевісайда.

У лінійній постановці одержимо наступну початково-крайову задачу:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \; ; \qquad /1/$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{q_0^*}{\rho_1^* c_0^{*2}} \left[q(t)(H(t) - H(t-t_0)) - p(z,t)\big|_{z=0} \right] ; \qquad /2/$$

$$p\big|_{t=0} = \frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{t=0} = w\big|_{t=0} = \frac{dw}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \; ; \qquad /3/$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{\rho_0^* c_0^{*2}}{q_0^*} \frac{dw}{dt^2} \; ; \qquad /4/$$

$$\lim_{z \to \infty} \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \; . \qquad /5/$$

Легко переконатись, що шуканий безрозмірний тиск визначається за формулою

$$p = \frac{\rho_0^*}{\rho_1^*} \int_0^{t-z} q(\tau) \left[H(\tau) - H(\tau - t_0) \exp\left\{ -\frac{\rho_0^*}{\rho_1^*} (t - z - \tau) \right\} \right] d\tau \; . \qquad /6/$$

Очевидно, що $p = 0$, коли $t \geq z$;

$$p = \frac{\rho_0^*}{\rho_1^*} \int_0^{t_0} q(\tau) \exp\left\{-\frac{\rho_0^*}{\rho_1^*} / t - z - \tau)\right\} d\tau, \quad t \geq z + t_0 . \qquad /7/$$

При записі нелінійної моделі враховуємо, що рух одновимірний. Позначимо через v^* і ρ^* проекцію швидкості рідини на вісь z^* і густину. Нехай $v = v^*/c_0^*$, $\rho = \rho^*/\rho_0^*$.
Тоді одержуємо таку математичну модель задачі:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{q_0^*}{\rho_0^* c_0^{*2}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} ; \qquad /8/$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = 0 ; \qquad /9/$$

$$p = B(\rho^{\varkappa} - 1) ; \qquad /10/$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{q_0^*}{\rho_1^* c_0^{*2}} \left\{ q(t)\left[H/t) - H/t - t_0)\right] - p(z,t)\big|_{z=w} \right\}; \qquad /11/$$

$$w\big|_{t=0} = \frac{dw}{dt}\Big|_{t=0} = v\big|_{t=0} = 0 , \quad \rho\big|_{t=0} = 1 ; \qquad /12/$$

$$v\big|_{z=w} = \frac{dw}{dt} ; \qquad /13/$$

$$\lim_{z \to \infty} p = 0 . \qquad /14/$$

Тут $\varkappa$ – показник адіабати; $B = B_0/q_0^*$; B_0 – відома постійна [1].

Використовуючи підхід Рімана [3] до побудови розв"язку задачі про просту розбіжну хвилю, /8/–/14/ зводимо до наступної початково-крайової задачі для визначення функцій $p(z,t)$ і $w(t)$:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{q_0^*}{\rho_1^* c_0^*} \left\{ q(t)[H/t) - H/t - t_0)] - B\left[\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{dw}{dt}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}} - 1\right] \right\}; \qquad /15/$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}\left(1 + \frac{p}{B}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{2\varkappa}} - \frac{2}{\varkappa - 1}\right]\frac{\partial p}{\partial z} = 0 ; \qquad /16/$$

$$p\big|_{t=0} = 0 ; \qquad /17/$$

$$w\big|_{t=0} = \frac{dw}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \quad ; \qquad /18/$$

$$p\big|_{z=w} = B\left[\left(1+\frac{\varkappa-1}{2}\,\frac{dw(t)}{dt}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} - 1\right] . \qquad /19/$$

Таким чином, знаходження прогину пластинки зводиться до розв"язування задачі Коші для звичайного нелінійного диференціального рівняння /15/ при умовах /18/. Якщо $dw/dt \equiv 1/c_0^* \, dw/dt^* \ll 1$ то

$$w(t) = \frac{1}{\varkappa B}\int_0^t q(\tau)\left[H(\tau)-H(\tau-t_0)\right]\left[1-\exp\left\{-\frac{\rho_0^*}{\rho_1^*}(t-\tau)\right\}\right]d\tau . \qquad /20/$$

Неявний розв"язок задачі /16/, /17/, /19/ визначається формулами

$$p(z,t) = B\left\{\left[1+\frac{\varkappa-1}{2}\,\frac{dw(\varphi)}{d\varphi}\right]^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} - 1\right\} , \qquad /21/$$

де функцію φ знаходимо з рівняння

$$z = w(\varphi) + \left[1+\frac{\varkappa+1}{2}\,\frac{dw(\varphi)}{d\varphi}\right](t-\varphi) .$$

Так само, як у лінійному наближенні /7/, маємо $p(z,t) \equiv 0, z \geqslant t$.

1. Г а л и е в Ш.У. Динамика гидроупругопластических систем. К., 1981. 2. Н и г у л У.К. Эхо-сигналы от упругих объектов. Таллин, 1976. 3. У и з е м Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977.

Стаття надійшла до редколегії 14.04.87

УДК 539.3

Р.І.Мокрик, Ю.О.Пир"єв

ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕСУ ПОШИРЕННЯ ЗБУРЕНЬ У ТВЕРДОМУ ТІЛІ З УРАХУВАННЯМ ЗВ"ЯЗНОСТІ МЕХАНІЧНИХ, ТЕПЛОВИХ І ДИФУЗІЙНИХ ЯВИЩ

Поширення збурень у твердому тілі з урахуванням зв"язності механічних, теплових і дифузійних явищ описує система диференціальних рівнянь [4, 6] відносно вектора переміщень $\vec{u}$, приросту температури θ_1 і хімічного потенціалу θ_2:

$$\Box_2\vec{u}+(\lambda'+\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})+\vec{X}=\vec{\nabla}(\gamma_1\theta_1+\gamma_2\theta_2), \qquad /1/$$

$$\hat{D}_n\theta_n=\gamma_n\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{u}}+d\dot{\theta}_m-W_n, \quad n=1,2,\ n+m=3,$$

де $\hat{D}_n=\delta_n\Delta-a_n\partial_t$; $\Box_1=\Box_2+(\lambda'+\mu)\Delta$; $\Box_2=\mu\Delta-\rho\partial_t^2$; Δ – оператор Лапласа; $\vec{\nabla}$ – оператор Гомільтона; λ', μ, γ_n, δ_n, d, $a_n (n=1,2)$ – відомі пружні, теплові та дифузійні постійні; $\vec{X}$ – вектор масової сили; W_1, W_2 – відповідно джерело тепла та маси, яка дифундує в тілі.

Використовуючи інтегральне перетворення Фур"є, розв"язок системи рівнянь /1/ можна записати у формі

$$\vec{u}=\hat{P}_6(\Delta,\partial_t)\vec{f}-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\hat{\Gamma}\vec{f})+\hat{P}_1\vec{\nabla}\psi_1+\hat{P}_2\vec{\nabla}\psi_2,$$

$$\theta_n=\Box_2\hat{P}_n\vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{f}}+\hat{D}_{1m}\psi_n+\hat{B}\psi_m, \quad n+m=3,\ n=1,2, \qquad /2/$$

де функції $\vec{f}$, ψ_n повинні бути розв"язками рівнянь

$$\Box_2\hat{P}_6(\Delta,\partial_t)\vec{f}=-\vec{X}, \quad \hat{P}_6(\Delta,\partial_t)\psi_n=-W_n, n=1,2. \qquad /3/$$

Введені в /2/, /3/ оператори мають вигляд

$$\hat{D}_{1n}=\Box_1\hat{D}_n-\gamma_n^2\Delta\partial_t,\ \hat{P}_n=\gamma_n\hat{D}_m+\gamma_m d\partial_t,\ n=1,2,\ n+m=3,$$

$$\hat{\Gamma}=(\lambda'+\mu)\Box_{34}+(\gamma_2\hat{P}_2+\gamma_1\hat{P}_1)\partial_t,\ \hat{B}=d\Box_1+\gamma_1\gamma_2\Delta\partial_t,$$

$$\Box_{34}=\hat{D}_1\hat{D}_2-d^2\partial_t^2,\ \hat{P}_6(\Delta,\partial_t)=\varkappa_0\sum_{m/2=0}^{3}\Delta^{m/2}a_m(\partial_t),$$

$$a_0(\partial_t)=-(\varepsilon_3/c_1^2)\partial_t^4,\ a_2(\partial_t)=(\varepsilon_3+\varepsilon_4)\partial_t^2+(\varepsilon_1/c_1^2)\partial_t^3,$$

$$a_4(\partial_t)=-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\partial_t-c_1^{-2}\partial_t^2,\ a_6(\partial_t)=1,\ \varkappa_0=\delta_1\delta_2(\lambda'+2\mu),$$

де

$$\varepsilon_1=(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2)^{-1};\quad \varepsilon_2=(\varepsilon_\theta\lambda_2+\varepsilon_\varphi\lambda_1)(\lambda_1\lambda_2)^{-1};$$

$$\varepsilon_3=(1-\delta^2)(\lambda_1\lambda_2)^{-1};\quad \varepsilon_4=(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi-2\sqrt{\varepsilon_\theta\varepsilon_\varphi}\,\delta)(\lambda_1\lambda_2)^{-1};$$

$$\lambda_1=\delta_1/a_1;\quad \lambda_2=\delta_2/a_2;\quad \delta=d/\sqrt{a_1a_2};$$

$$\varepsilon_\theta=\gamma_1^2a_1^{-1}(\lambda'+2\mu)^{-1};\quad \varepsilon_\varphi=\gamma_2^2a_2^{-1}(\lambda'+2\mu)^{-1},$$

ε_θ, ε_φ, δ – відповідно безрозмірні коефіцієнти зв"язності теплових і дифузійних явищ з механічними, а також між собою.

Зауважимо, що наведене зображення має оператори меншої розмірності, ніж аналогічні оператори у зображених у праці [6].

Представлення /2/ /3/ дає змогу записати дисперсійне рівняння

$$[(-iK)^2-c_2^2(-i\omega)^2]\hat{P}_6((-iK)^2,-i\omega)=0,\quad K^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2,$$

яке має вісім коренів $K_j(\omega)$ $j=\overline{1,8}$ /характеристичних параметрів/, причому $K_{1,3,5,7}(\omega)=-K_{2,4,6,8}(\omega)$, $K_1(\omega)=\omega/c_2$.

Для характеристичних параметрів притаманні такі властивості:

1. $K_3(\omega)\sim\omega/c_1+i\eta,\quad \omega\to\infty,\quad \eta=\varepsilon_2c_1/2;$

$$K_j(\omega)\sim i\sqrt{-i\omega m_j},\quad \omega\to\infty,\quad j=5,7;$$

$$m_j=\left(\varepsilon_1\pm\sqrt{\varepsilon_1^2-4\varepsilon_3}\right)/2,\quad j=5,7;$$

2. $K_3(\omega)\sim\omega/(c_1c_0)+i\omega^2\tau^2/4,\quad \omega\to 0,\quad c_0=\sqrt{1+\varepsilon_4/\varepsilon_3};$

$$K_j(\omega)\sim i\sqrt{-i\omega n_j},\quad \omega\to 0,\quad j=5,7;$$

$$\tau^2=2(c_0^5c_1^3)^{-1}[\lambda_1(\sqrt{\varepsilon_\theta}-\delta\sqrt{\varepsilon_\varphi})^2+\lambda_2(\sqrt{\varepsilon_\varphi}-\delta\sqrt{\varepsilon_\theta})^2](1-\delta^2)^{-2};$$

$$n_j=\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\pm\sqrt{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2-4(\varepsilon_3+\varepsilon_4)}\right)/2,\quad j=5,7;$$

3. $\operatorname{Im}K_j(\omega)>0$, $j=1,3,5,7$, якщо $\operatorname{Im}\omega>0$.

Кожному кореню $K_j(\omega)$ $j = 1,3,5,7$ дисперсійного рівняння відповідає свій тип хвилі. Наприклад, кореню $K_1(\omega)$ відповідає поперечна хвиля, яка описується хвильовим рівнянням з оператором $\Box_2$ і поширюється зі швидкістю c_2. Вона безпосередньо не залежить від температурних і дифузійних явищ. Кореням $K_j(\omega)$ $j = 3,5,7$ відповідають модифікована повздовжна, теплова і дифузійна хвилі.

Проводячи викладки, аналогічно як у працях [1, 2], можна показати, що коли задані функції $\vec{X}$, W_n $(n = 1,2)$ належать простору узагальнених функцій повільного росту S', які дорівнюють нулю для $t < 0$

$$(\vec{X}, W_n)\, e^{-\omega_2 t} \in S', \quad \omega_2 \geq 0,$$

то і розв"язок системи /1/ належить цьому ж простору:

$$(\vec{u}, \theta_n)\, e^{-\omega_2 t} \in S', \; \omega_2 \geq 0, \; n = 1,2 .$$

Розглянута модель належить до моделей середовищ з дисперсією і поглинанням. При поширенні імпульсів у цьому середовищі з допомогою аналізу коренів дисперсійного рівняння можна виділити деякі характерні властивості.

Згідно з властивістю /1/ точкове осесиметричне збурення полів поширюється з безмежною швидкістю /має дифузійний характер/. У момент часу $t = |x|/c_1$ /прибуття хвилі зі швидкістю повздовжної хвилі/ також наявне збурення полів, але воно експоненціально зникає при віддаленні від джерела. Коефіцієнт затухання γ, що пропорційний ε_2, свідчить, що вплив дифузії приводить до збільшення коефіцієнта затухання, яке не залежить від зв"язності тепла і дифузії. Це випливає з розв"язку задачі про джерела, яка розв"язується з використанням перетворення Фур"є-Лапласа і теореми Абеля про відповідність малих значень часу великим значенням параметра $-i\omega$.

Згідно з властивістю /2/ основна частина збурень набуває характерної форми / 3 /, яка рухається зі швидкістю $c_1 c_0$. У випадку поширення імпульсу гаусоподібної форми його ширина зростає пропорційно $\sqrt{t}\,\tau$, а амплітуда падає пропорційно $1/\sqrt{t}\,\tau$. Вигляд сталих τ і c_0 дає змогу зробити висновок про те, що дифузія приводить до більш швидкого розповзання імпульсу, причому цей ефект зменшується за рахунок взаємозв"язку дифузійних і теплових процесів. Дифузія зумовлює також зростання швидкості поширення основної частини збурення, яка, в свою чергу, зменшується за рахунок зв"язності дифузійних і теплових явищ. Ці висновки випливають також з розв"язку задачі про точкове збурення полів, яке отримують з допомогою методу перевалу / 5 /.

1. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Динамические свойства решений задач термоупругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. № 4. С. 44-47. 2. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Свойства решений динамических задач обобщенной связанной термоупругости // Прикл. математика и механика. 1981. Т.45. Вып. 5. С. 912-918. 3. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. Обобщенная задача Коши для линейных дифференциальных уравнений связанных физико-механических полей // Прикл. математика и механика. 1985. Т.49. Вып. 6. С. 935-942. 4. Підстригач Я.С. Диференціальні рівняння задачі термодифузії в твердому деформованому ізотропному тілі // Доп. АН УРСР. 1961. № 2. С. 169-171. 5. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М., 1978. 6. Nowacki W. Termodyfuzja w ciele stalym // Mech. Teoret. i Stos. 1975. Vol. 13. N 2. P. 143-158.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.87

УДК 539.3

В.К.Опанасович

СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ З ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо ізотропну пластинку, бокові поверхні якої теплоізольовані. Уважаємо, що в пластинці міститься включення іншого матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності κ_0 , а на лінії розділу матеріалів L виконуються умови ідеального теплового контакту. Введемо декартову систему координат Oxy з початком у деякій точці включення. Приймаємо, що пластинка на нескінченості знаходиться під дією теплового потоку інтенсивності q_∞ , напрямок якого утворює кут α з віссю Ox . Крім того, відома функція, яка відображає контур L на одиничне коло γ , має вигляд

$$z = x + iy = \omega'(\sigma) = R(\sigma + \sum_{K=1}^{n} c_K \sigma^{-K})\ \sigma \in \gamma . \qquad /1/$$

Оскільки ми розглядаємо стаціонарну задачу теплопровідності, то температура $T(x,y)$ задовольнятиме і рівнянню Лапласа [1]. Отже, функція $T(x,y)$ - гармонійна, а тому її можна подати у вигляді

$$\kappa T(x,y) = \mathrm{Re}\, g(z),$$

де $g(z)$ – аналітична функція комплексної змінної $z = x + iy$.

Граничні умови задачі на лінії L записуємо як

$$T = T_0 \quad , \quad \kappa_0 \frac{\partial T_0}{\partial n} = \kappa \frac{\partial T}{\partial n} \quad , \qquad /2/$$

де n – нормаль до контура L, всі величини, які пов"язані з включенням, записуватимемо з індексом 0.

Використовуючи результати монографії [2], маємо

$$\Phi(\sigma) - \sigma^{-2}\overline{\Phi(\sigma)} = -2i\kappa/\omega'(\sigma)/\sigma^{-1}\frac{\partial T}{\partial S} \quad \sigma \in \gamma,$$

$$\Phi(\sigma) + \sigma^{-2}\overline{\Phi(\sigma)} = 2/\omega'(\sigma)/\sigma^{-1}\frac{\partial T}{\partial n}\kappa \quad \sigma \in \gamma, \qquad /3/$$

де $\Phi(\sigma) = \omega'(\sigma) g'(\omega(\sigma))$; S – дугова координата контура L.

Враховуючи співвідношення /3/, на основі /2/ отримуємо таку крайову задачу:

$$[\Phi(\sigma) - \sigma^{-2}\overline{\Phi(\sigma)}]/K = [\Phi_0(\sigma) - \sigma^{-2}\overline{\Phi_0(\sigma)}]/K_0 \ ,$$

$$\Phi(\sigma) + \sigma^{-2}\overline{\Phi(\sigma)} = \Phi_0(\sigma) + \sigma^{-2}\overline{\Phi_0(\sigma)}. \qquad /4/$$

Функцію $\Phi_0(\zeta)$ шукаємо у вигляді

$$\Phi_0(\zeta) = \sum_{K=-M}^{N} a_K \zeta^K \ . \qquad /5/$$

Тут a_K – невідомі коефіцієнти, для визначення яких з граничних умов задачі дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{m=0}^{N}(a_m \mathcal{D}_{j,-1-m} - \frac{c}{c_0}\bar{a}_m \mathcal{D}_{j,1+m}) = \mathcal{D}_{j,1} R\bar{A}(c^2 - c_0^2)/c_0, \quad j = \overline{1, N+1},$$

$$a_{-1} = 0,$$

$$a_{-2} = -\frac{c}{c_0}\bar{a}_0 - cR\bar{A}\left(\frac{c_0}{c} - \frac{c}{c_0}\right),$$

$$a_{-j} = -\frac{c}{c_0}\bar{a}_{j-2} \qquad 3 \le j \le M = N+2 \ ,$$

де $A = -q_\infty e^{-i\alpha}$; $c = -(1+\beta)/2$; $c_0 = (1-\beta)/2$; $\beta = K_0/K$;

$$\mathcal{D}_{0,0} = 1, \quad \mathcal{D}_{0,j} = 0 \quad j \ne 1;$$

$$m \geq 1 \begin{cases} \mathcal{D}_{m,j} = R(\mathcal{D}_{m-1,j-1} + \sum_{p=1}^{n} c_p \mathcal{D}_{m-1,j+p}) & j = \overline{-nm, m} \\ \mathcal{D}_{m,j} = 0 & j > m \vee j < -mn . \end{cases}$$

На основі співвідношень /4/ і /5/ знаходимо вираз для функції $\Phi(\zeta)$:

$$\Phi(\zeta) = R\left(A + \frac{c_0}{c}\,\frac{\bar{A}}{\zeta^2}\right) - \frac{1}{c}\sum_{k=2}^{N+2} a_{-k}\,\zeta^{-k} .$$

Слід зауважити, що як частковий випадок розв"язку задачі випливають такі розв"язки задач: для пластинки без включення $\beta = 1$ і для пластинки з теплоізольованим отвором $\beta = 0$.

Проведено числовий аналіз задачі, коли $\alpha = \frac{\pi}{2}$ для прямокутного включення з заокругленими кутами з осями координат, паралельними сторонам прямокутника, та з початком координат в його центрі. При цьому / 3 / коефіцієнти c_p

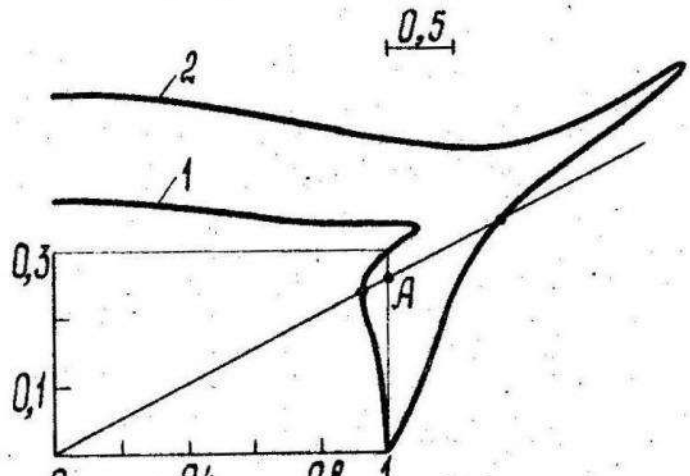
$$c_{2i} = 0 \quad i = 1, 6 , \quad c_1 = \cos 2\delta , \quad c_3 = -(1 - \cos 4\delta)/12 ,$$

$$c_5 = 20^{-1} \sin 4\delta \cdot \sin 2\delta , \qquad \delta = \pi/6 ,$$

$$c_7 = (5\cos 8\delta - 4\cos 4\delta - 1)\ /448 ,$$

$$c_9 = (7\cos 10\delta - 5\cos 6\delta - 2\cos 2\delta)/1152 ,$$

$$c_{11} = (21\cos 12\delta) - 14\cos 8\delta - 5\cos 4\delta - 2)/5632 .$$



Стаціонарна задача теплопровідності для пластинки з включенням

На рисунку показана графічна залежність відносної інтенсивності теплового потоку $\frac{k}{q_{\infty}}\frac{\partial T}{\partial n}$ на контурі L

/кривая I $\beta = K_0/K$ = 0,1, кривая 2 - β = 10/. Щоб отримати значення даної величини у деякій точці A контура L, необхідно з"єднати цю точку з центром прямокутника і провести промінь, при цьому довжина відрізка променя між точкою A і його точкою перетину з кривою дає у певному масштабі шукану величину.

1. Л и к о в А.В. Теория теплопроводности. М., 1967. 2. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. 3. С а в и н Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. К., 1968.

Стаття надійшла до редколегії 18.09.86

ЗМІСТ

УДК 519.95

Об одном классе методов типа Ньютона решения задач на экстремум. Б а р т и ш М.Я. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 3-5 . - На укр. яз.

Для решения задач безусловной минимизации исследуется модификация метода Ньютона, которая обладает высоким порядком сходимости в окрестности решения, сходится с "плохого" начального приближения и достаточно эффективно работает в случае функции, имеющей вид "оврага". Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.6

Квазиньютоновская модификация метода линеаризации с использованием LDL^T - разложения Холесского. Щ е р б и н а Ю.Н., Г о л у б Б.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 5-8. На укр. яз.

Для решения общей задачи нелинейного программирования предложена модификация метода линеаризации Б.Н.Пшеничного, основанная на квазиньютоновской аппроксимации матрицы вторых производных функций Лагранжа. Для обеспечения численной устойчивости алгоритма используется модифицированное LDL^T - разложение Холесского. Приведены достаточные условия сверхлинейной сходимости алгоритма. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.6

Метод линеаризации для решения систем равенств и неравенств на простом множестве типа "параллелепипеда". Г о л у б Б.М. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 8-10 . - На укр. яз.

Предложена модификация метода линеаризации Б.Н.Пшеничного для решения системы равенств и неравенств при наличии прямых ограничений на переменные. Приведены достаточные условия сходимости алгоритма. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946+517.43

Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем математической физики. П р и т у л а Н.Н., П р и к а р п а т с к и й А.К. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 11-15 . - На укр. яз.

Основываясь на методах теории представлений конечномерных алгебр Ли, предложен новый алгебраический подход "точных" дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем. Библиогр.: 5 назв.

УДК 518:517.9

Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для задачи Неймана. Ж у к М.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 15-18 . - На укр. яз.

Установлена теорема существования и единственности обобщенных решений исходной задачи и соответствующей ей системы метода Канторовича, получена оценка быстроты сходимости метода Канторовича. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.21

Оценка ресурса на основании усеченной выборки. Г н а т и ш и н А.П., М о с к в я к Е.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 18-20 . - На укр. яз.

Решена задача оценки ресурса технических устройств на основании усеченной выборки наработок. Представлена формула для оценки среднего ресурса. Приведен численный пример. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.21

Оценка остаточного ресурса. К в и т И.Д., М о с к в я к Е.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 20-23 . - На укр. яз.

Указывается метод оценки остаточного ресурса на основе полной или как угодно многократно усеченной выборки наработок однотипных технических единиц. Изложение проиллюстрировано соответственными примерами.

УДК 517.949:517.956

Построение и исследование локально-одномерных разностных схем в классе обобщенных функций. К у з ы к А.М., Ч у л ы к И.И. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 23-29 . - На укр. яз.

Построены и исследованы локально-одномерные разностные схемы метода суммарной аппроксимации решения начально-краевой задачи для линейного уравнения параболического типа. Получены оценки скорости сходимости решений разностных схем метода суммарной аппроксимации при минимальных ограничениях на гладкость обобщенного решения исходной задачи. Библиогр.: 8 назв.

УДК 518:517.948

Численное решение одномерных интегральных уравнений электронной оптики методами коллокации и саморегуляризации. Д о р о ш е н к о Н.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 30-35. - На укр. яз.

Рассматриваются алгоритмы численного решения одномерных интегральных уравнений первого рода методами коллокации и саморегуляризации с использованием граничных элементов. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.947:534

Первая краевая задача для телеграфного уравнения на разомкнутых контурах. Х а п к о Р.С. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 33-37 . - На укр. яз.

С помощью интегрального преобразования Чебышева - Лагерра по времени исходная нестационарная задача сводится к последовательности задач Дирихле для неоднородных уравнений Гельмгольца с чисто мнимым параметром. Последние решаются методом интегральных уравнений с выделением особенностей. Предложенный алгоритм применим для внешних краевых задач и для задач на разомкнутых контурах. Библиогр.: 4 назв.

УДК 518:517.948

Численное решение интегральных уравнений первого рода в теории потенциала. С о б х и Э. // Вестн. Львов. ун-та. Сер.мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 37-40 . - На укр. яз.

Одномерные и двумерные уравнения Фредгольма первого рода теории потенциала решаются единым подходом, основанным на методах коллокации и изопараметрических преобразований. Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.944:947

О модифицированном методе эквивалентной линеаризации для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. М а р т ы н е н к о М а р и я Д., М а р т ы н е н к о М и х а и л Д. // Вестн. Львов. ун-т а. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 40-42. - На укр. яз.

Дана упрощенная формулировка модифицированного метода эквивалентной линеаризации для решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = f(y)\,b(x) + c(x) .$$

Получены две оценки близости точного и приближенного решения. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.944:947

Эквивалентная линеаризация для уравнений Льенара. М а р т ы н е н к о М а р и я Д., М а р т ы н е н к о М и х а и л Д.// Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 42-45 . - На укр. яз.

Предложен метод решения задачи Коши для уравнений вида

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0,$$
$$x'' + \omega^2 x + g(x) = 0,$$

основанный на замене входящих в них нелинейных членов специально построенными линейными слагаемыми. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.9

Существование решения интегральных уравнений задач Дирихле и Неймана в случае разомкнутых границ. С и б и л ь Ю.Н. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 46-48 . - На укр. яз.

Доказано существование решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с логарифмической особенностью в ядре для произвольной правой части из $W^{\frac{1}{2}}(\omega, L)$. Рассмотрено также сингулярное интегро-дифференциальное уравнение первого рода. Показано, что оно имеет решение, которое обращается в ноль на концах интегрирования L, когда правой частью является произвольная функция из $\mathcal{L}_2(\omega, L)$. Как следствие существуют соответствующие ограниченные обратные операторы. Библиогр.: 4 назв.

УДК 533.6.013.42

Нелинейная модель задачи об определении давления в системе "жидкое полупространство - упругая пластина". Б л а ж и е в с к а я О.В. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 49-51. - На укр. яз.

Предложен алгоритм решения одномерной нестационарной задачи нелинейного взаимодействия упругой пластины с жидким полупространством, использующий теорию простых волн Римана. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3

Свойства распространения возмущений в твердом теле с учетом связанности механических, тепловых и диффузионных явлений. Мокрик Р.И., Пырьев Ю.А. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. - 1988. - Вып. 29. Задачи прикладной математики и механики. - С. 52-55. . - На укр. яз.

На основании анализа корней дисперсионного уравнения с использованием интегральных преобразований проанализировано влияние взаимодействия полей деформации, температуры и диффузии на основные характеристики распространения нестационарных возмущений в деформируемом изотропном теле. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

Стационарная задача теплопроводности для пластинки с включением. Опанасович В.К. // Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат.- 1988. - Вып. 29: Задачи прикладной математики и механики. - С. 55-58 . - На укр. яз.

Методами теории функций комплексной переменной исследована стационарная задача теплопроводности для кусочно-однородной относительно теплофизических характеристик пластинки, боковые поверхности которой теплоизолированы, а на бесконечности она находится под воздействием однородного теплового потока. Предполагается, что на линии раздела материалов выполняются условия идеального теплового контакта. Для прямоугольного включения с закругленными углами проведен числовой анализ задачи, представленный в виде графиков. Ил. 1. Библиогр.: 3 назв.

Сборник научных трудов

Министерство высшего и среднего
специального образования УССР

Вестник Львовского университета
Серия механико-математическая
Издается с 1965 г.

Вып. 29

ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Львов. Издательство при Львовском государственном университете
издательского объединения
"Выща школа"

Адрес редакционной коллегии:
290000 Львов-центр, ул. Университетская, 1. Университет,
кафедра прикладной математики.

Львовская областная книжная типография.
290000 Львов, ул. Стефаника, 11.
/На украинском языке/

Редактор В.В.В о й т о в и ч
Технічний редактор С.Д.Д о в б а
Коректор М.Ю.Г о р б а л ь

 СІБ № 12780

Підп. до друку 19.10.87. БГ 09374. Формат 60x84/16.
Папір офсетн. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 3,95.
Умовн.-фарб. відб. 4,18. Обл.-вид. арк. 3,79. Тираж 600 прим.
Вид. № 1731. Зам. 4003. Ціна 75 коп. Замовне.

Львівська обласна книжкова друкарня. 290000
Львів, вул. Стефаника, 11.

75 к.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат., 1988, вип. 29, 1—68.