ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 513.015.6

С. В. ДЕНИСКО, О. І. ПРИХОДСЬКА

Δ-ПОВЕРХНІ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ КОНГРУЕНЦІЇ

Нехай C — прямолінійна конгруенція, рівняння якої має вигляд

$$\overline{R}=\overline{r}(u^1,\ u^2)+\lambda\,\overline{m}(u^1,u^2), \tag{1}$$

де

$$\overline{m}=m^i\overline{r}_i+m_0\overline{n}$$

$\left(\overline{n}=\dfrac{[\overline{r}_1\overline{r}_2]}{|[\overline{r}_1\overline{r}_2]|},\ \ \overline{m}\text{ — одиничний вектор}\right).$

Поверхню $\overline{r}(u^1,u^2)$ позначимо через Φ. Кожний промінь конгруенції C повернемо навколо його початку в площині, що визначається вектором $\overline{m}$ і перпендикулярним до нього одиничним вектором

$$\overline{m}^*=m^{*i}\overline{r}_i+\overset{*}{m}_0\overline{n}$$

на один і той же кут φ.

Лінійчасті поверхні конгруенції C, лінійний елемент яких при цьому повороті зміниться на нескінченно малу вище першого порядку малості відносно φ, називатимемо поверхнями Δ, а їх лінії перетину з поверхнею Φ — лініями δ.

Скориставшись рівнянням (1), встановлюємо необхідні і достатні умови, щоб лінійчаста поверхня конгруенції C була поверхнею Δ. Ці умови запишуться у вигляді:

$$\left.\begin{aligned}&(-m_0^*\pi_{ij}+\nabla_i m^{*\alpha}\,g_{j\alpha})\,du^i\,du^j=0;\\&m^{*\alpha}g_{i\alpha}\,du^i=0;\\&(m_0\,m_0^*\nu_{ij}-m_0^*\pi_{\alpha i}\nabla_j m^\alpha-m_0\,\pi_{\alpha l}\nabla_j m^{*\alpha}+\nabla_i m^\alpha\nabla_j m^{*\beta}g_{\alpha\beta}+\\&+\pi_{\alpha i}\pi_{\beta j}m^\alpha m^{*\beta}+\partial_i m_0\,\partial_j m_0^*+\pi_{\alpha j}m^{*\alpha}\partial_i m_0+\pi_{\alpha j}m^\alpha\partial_i m_0^*)\,du^i\,du^j=0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

де d — символ диференціювання вздовж лінії перетину даної лінійчастої поверхні конгруенції C з поверхнею Φ, π_{ij} і ν_{ij} — другий і третій основні тензори поверхні Φ, а коваріантні похідні обчислюються за допомогою коефіцієнтів зв'язності метричного тензора g_{ij} поверхні Φ.

Мають місце такі теореми.

Теорема 1. *Конгруенція C може містити в собі не більше двох однопараметричних сімейств поверхонь Δ.*

Доведення. Як видно з (2), нам досить показати, що випадок, коли кожна лінійчаста поверхня-конгруенція C є поверхня Δ, неможливий.

Нехай кожна лінійчаста поверхня конгруенції C є поверхня Δ. Тоді з (2) матимемо

$$\left.\begin{aligned} &-m_0 \pi_{ij} + \nabla_{(i} m^{*\alpha} g_{j)\alpha} = 0; \quad m^{*\alpha} g_{i\alpha} = 0; \\ &m_0 m_0^* \nu_{ij} - m_0^* \nabla_{(i} m^\alpha \pi_{j)\alpha} - m_0 \nabla_{(j} m^{*\alpha} \pi_{i)\alpha} + \nabla_{(i} m^\alpha \nabla_{j)} m^{*\beta} g_{\alpha\beta} + \\ &+ \pi_{i\alpha} \pi_{j\beta} m^\alpha m^{*\beta} + \partial_{(i} m_0 \partial_{j)} m_0^* + \partial_{(i} m_0 \pi_{j)\alpha} m^{*\alpha} + \partial_{(i} m_0^* \pi_{j)\alpha} m^\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Згідно з (3_1) і (3_2) або

$$m_0^* = 0,$$

або

$$\pi_{ij} = 0.$$

Оскільки дискримінант метричного тензора g_{ij} не дорівнює нулеві, то, в силу (3_2),

$$m^{*1} = m^{*2} = 0. \tag{4}$$

Нехай $m_0^* \neq 0$, а $\pi_{ij} = 0$. Тоді, беручи до уваги (4) та перпендикулярність векторів $\overline{m}$ і $\overline{m}^*$, одержимо, що конгруенція C вироджується в площину, а це неможливо. Якщо ж $m_0^* = 0$, то в силу (4) вектор $\overline{m}^*$ — нульовий, що теж неможливо.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Площина, що проходить через дотичну до лінії δ і промінь конгруенції C, який не збігається з цією дотичною, перпендикулярна до площини повороту променя.*

Доведення. Перепишемо (2_2) в такій формі:

$$(m^{*\alpha} \overline{r}_\alpha + m_0^* \overline{n})(\overline{r}_i du^i) = 0,$$

або

$$(\overline{m}^* d\overline{r}) = 0, \tag{5}$$

де $d\overline{r}$ — вектор, направлений по дотичній до лінії δ.

Крім того,

$$(\overline{m}\, \overline{m}^*) = 0. \tag{6}$$

В силу (5) і (6) площина, що проходить через вектори $\overline{m}$ і $d\overline{r}$, перпендикулярна до площини, яка визначається векторами $\overline{m}$ і $\overline{m}^*$, що і треба було довести.

Теорема 3. *Якщо конгруенція C утворена нормалями опорної поверхні Φ, то взяті на цій поверхні лінії будуть лініями δ тоді і тільки тоді, коли вони геодезичні, а площини повороту променів конгруенції є їхні нормальні площини.*

Доведення. Як відомо [1],

$$\nabla_i m^j = \alpha_i \tilde{m}^j, \tag{7}$$

де α_i — трансверсальний вектор поля вектора m^j, а $\tilde{m}^j$ — вектор, доповняльний до вектора m^j.

Користуючись (7) і беручи до уваги, що в даному випадку

$$m_0^* = 0, \ m_0 = 1, \ m^1 = m^2 = 0,$$

умови (2) запишемо у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i \tilde{m}_j^* du^i du^j = 0; \\ m_i^* du^i = 0; \\ \alpha_j \pi_{i\alpha} \tilde{m}^{*\alpha} du^i du^j = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В силу теореми 2 вектор $\tilde{\bar{m}}^*$ колінеарний вектору $d\bar{r}$, а тому система рівнянь (8) буде еквівалентна такій системі:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i du^i = 0; \\ m_i^* du^i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

З (9_1) випливає, що вектор $\bar{m}^*$ переноситься паралельно вздовж лінії δ. Оскільки ж $\tilde{\bar{m}}^*$, будучи дотичним до лінії δ, утворює постійний кут з вектором $\bar{m}^*$, який переноситься паралельно, то він теж переноситься паралельно вздовж лінії δ, а це означає, що лінія δ — геодезична.

Згідно з теоремою 2, площини повороту променів конгруенції будуть нормальними площинами ліній δ, що видно також з умови (9_2).

Теорему доведено.

Теорема 4. *Якщо опорна поверхня конгруенції С є її фокальна поверхня, дотичні площини якої є площинами повороту променів конгруенції, то для того, щоб конгруенція С містила в собі поверхні Δ, необхідно і достатньо, щоб її опорна поверхня була різьбленою поверхнею, меридіани якої є ребра звороту розгортувальних поверхонь конгруенції С.*

Доведення. За допомогою (7) і взявши до уваги, що в даному випадку

$$m_0 = m_0^* = 0,$$

умови (2) запишемо так:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i m_j du^i du^j = 0; \\ \tilde{m}_i du^i = 0; \\ \pi_{\alpha i} \pi_{\beta j} m^\alpha \tilde{m}^\beta du^i du^j = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Згідно з теоремою 2, вектор $\bar{m}$ колінеарний векторові $d\bar{r}$, а тому з (10) матимемо, що вздовж лінії δ або

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i du^i = 0; \\ \tilde{\tilde{m}}_i du^i = 0; \\ \pi_{\alpha i} m^\alpha du^i = 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

або

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i\, du^i = 0; \\ &\tilde{m}_i\, du^i = 0; \\ &\pi_{\beta j}\, \tilde{m}^\beta\, du^j = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

З (11) випливає, що лінія δ — пряма, тому що вона є одночасно і геодезичною лінією, як видно з (11_1) і (11_2), і асимптотичною лінією, як видно з (11_3). Даний випадок виключаємо з розгляду, оскільки конгруенція C вироджується в лінійчасту поверхню.

Рівняння (12_1) і (12_2), як і вище, показують, що лінія δ — геодезична, а з (12_3) випливає, що напрям цієї лінії спряжений перпендикулярному напрямові, тому лінія δ є також лінією кривини поверхні Φ.

Таким чином, лінія δ, будучи одночасно і геодезичною, і лінією кривини, є плоска геодезична. Поверхня, що допускає існування плоских геодезичних, є різьблена поверхня, меридіани якої збігаються з цими лініями.

Оскільки вектор $\tilde{m}$ колінеарний векторові $d\bar{r}$, то меридіани різьбленої поверхні будуть ребрами звороту розгортних поверхонь конгруенції C.

Теорему доведено повністю.

Теорема 5. *Якщо опорна поверхня конгруенції C є її фокальна поверхня, нормальні площини якої є площинами повороту променів цієї конгруенції, то поверхнями Δ конгруенції C є тільки такі поверхні, лінії дотику яких до опорної поверхні є її асимптотичними лініями і разом з тим, якщо опорна поверхня ненульової повної кривини, стрикційними лініями цих поверхонь або ортогональними траєкторіями їх прямолінійних твірних.*

Доведення. За допомогою (7) і враховуючи, що в даному випадку

$$m_0 = 0,\ m_0^* = 1,\ m^{*1} = m^{*2} = 0,$$

умови (2) запишемо у вигляді

$$\left.\begin{aligned} &\pi_{ij}\, du^i\, du^j = 0; \\ &\alpha_j\, \pi_{\alpha i}\, \tilde{m}^\alpha du^i\, du^j = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Нехай поверхня Φ ненульової повної кривини. В силу (13) маємо, що вздовж лінії δ або

$$\left.\begin{aligned} &\pi_{ij}\, du^i\, du^j = 0; \\ &\alpha_j\, du^j = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

або

$$\left.\begin{aligned} &\pi_{ij}\, du^i\, du^j = 0; \\ &\pi_{\alpha i}\, \tilde{m}^\alpha\, du^i = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

З (14) випливає, що лінії δ — асимптотичні лінії поверхні Φ та стрикційні лінії поверхонь Δ конгруенції C. Умови (15) показують, що лінії δ, будучи асимптотичними лініями поверхні Φ, є разом з тим ортогональними траєкторіями прямолінійних твірних поверхонь Δ.

Якщо ж опорна поверхня нульової повної кривини, то (13_2) перетворюється в тотожність, оскільки на такій поверхні будь-який напрям спряжений асимптотичному напрямкові.

Беручи все це до уваги, переконуємось у справедливості теореми.

Теорема 6. *Нехай поверхня Φ неперервно згинається з збереженням одного сімейства асимптотичних ліній. Нехай цим згинанням згинається конгруенція C. Тоді, якщо на поверхні Φ інваріантне сімейство асимптотичних ліній є сімейство ліній δ, то воно буде сімейством ліній δ і під час згинання поверхні Φ при умові, що площина повороту променя конгруенції C твердо зв'язана з дотичною площиною поверхні Φ під час її згинання.*

Доведення. Нехай координати u^1, u^2 вибрані так, що сімейство $u^2 = \text{const}$ є інваріантне сімейство асимптотичних ліній поверхні Φ. Нехай це сімейство є сімейство ліній δ. Тоді з (2) матимемо:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_1 m^{*\alpha} g_{1\alpha} = 0; \\ &m^{*\alpha} g_{1\alpha} = 0; \\ &m_0 m_0^* \nu_{11} - m_0^* \pi_{21} \nabla_1 m^2 - m_0 \pi_{21} \nabla_1 m^{*2} + \nabla_4 m^\alpha \nabla_1 m^{*\beta} g_{\alpha\beta} + \\ &+ \pi_{12}^2 m^2 m^{*2} + \partial_1 m_0 \partial_1 m_0^* + \pi_{21} m^{*2} \partial_1 m_0 + \pi_{21} m^2 \partial_1 m_0^* = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Крім того, в силу спеціального вибору координат u^1, u^2,

$$\nu_{11} = -K g_{11}. \quad (17)$$

Оскільки, як відомо [2], згинання поверхні Φ не змінюватиме π_{12}, то, беручи до уваги (16) і (17), переконуємось у справедливості теореми.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. П. Норден. Теория поверхностей. Гостехиздат, 1956.
2. В. Ф. Коган. Основы теории поверхностей, т. II. Гостехиздат, 1948.

С. В. ДЕНИСКО, Е. И. ПРИХОДСКАЯ

Δ-ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ

(резюме)

Пусть C — прямолинейная конгруэнция. Повернем каждый луч конгруэнции C вокруг его начала в некоторой плоскости на один и тот же угол φ. Если при этом линейный элемент некоторой линейчатой поверхности конгруэнции C изменится на бесконечно малую выше первого порядка малости относительно φ, то такую поверхность будем называть поверхностью Δ, а ее линию пересечения с опорной поверхностью — линией δ.

Доказываются следующие предложения.

Конгруэнция C не может содержать в себе более двух однопараметрических семейств поверхностей Δ.

Плоскость, проходящая через луч конгруэнции C и касательную к линии δ, перпендикулярна к плоскости вращения луча.

Рассматриваются также специальные поверхности Δ.