ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 539.385

Д. В. ГРИЛИЦЬКИЙ, Я. М. КІЗИМА

СУМІСНЕ КРУЧЕННЯ КРУГЛОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО СТЕРЖНЯ І ПІВПРОСТОРУ ДЛЯ ЧАСТИННОГО ВИПАДКУ АНІЗОТРОПІЇ

1. Розглянемо задачу про сумісне кручення круглого циліндричного стержня і півпростору у випадку циліндричної ортотропії. Будемо вважати, що вісь анізотропії стержня збігається з його геометричною віссю і з віссю анізотропії півпростору, а всі радіальні площини і площини, перпендикулярні до осі анізотропії, є площинами пружної симетрії. Матеріали стержня і півпростору вважаємо різними.

Стержень і півпростір зчеплені між собою і перебувають під дією крутильного моменту M, прикладеного до його вільного кінця, На бічній поверхні стержня, а також на поверхні півпростору ззовні стержня навантаження відсутнє.

Всі величини, які відносяться до стержня, позначатимемо індексом «1», а ті ж величини для півпростору — індексом «2». Введемо циліндричну систему координат r, Θ, z так, щоб площина $z=0$ збіглася з поверхнею півпростору, а вісь z направимо по осі анізотропії всередину стержня.

При такій постановці задачі, згідно з [3], випливає, що, як і в ізотропному випадку [1], відмінними від нуля будуть тільки компоненти тензора напружень $\tau_{\Theta z}^{(i)}$ і $\tau_{\Theta r}^{(i)}$ $(i=1,2)$ і компонента вектора зміщень $u_{\Theta}^{(i)}$ $(i=1,2)$, які зв'язані між собою співвідношеннями

$$\tau_{\Theta z}^{(i)}=A_{44}^{(i)}\frac{\partial u_{\Theta}^{(i)}}{\partial z};\ \tau_{\Theta r}^{(i)}=A_{66}^{(i)}\left(\frac{\partial u_{\Theta}^{(i)}}{\partial r}-\frac{u_{\Theta}^{(i)}}{r}\right)\quad (i=1,\ 2), \tag{1.1}$$

де $A_{44}^{(i)}$, $A_{66}^{(i)}$ — модулі пружності.

Зміщення $u_{\Theta}^{(i)}$ в даному випадку, кожне в своїй області, задовольняє рівняння

$$\frac{A_{44}^{(i)}}{A_{66}^{(i)}}\frac{\partial^2 u_{\Theta}^{(i)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_{\Theta}^{(i)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_{\Theta}^{(i)}}{\partial r}-\frac{u_{\Theta}^{(i)}}{r^2}=0\qquad (i=1,\ 2). \tag{1.2}$$

Покладаючи

$$z=\sqrt{\frac{A_{44}^{(i)}}{A_{66}^{(i)}}}\,z_i, \tag{1.3}$$

згідно з (1.2) одержуємо

$$\frac{\partial^2 u_{\Theta}^{(i)}}{\partial z_i^2}+\frac{\partial^2 u_{\Theta}^{(i)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_{\Theta}^{(i)}}{\partial r}-\frac{u_{\Theta}^{(i)}}{r^2}=0\qquad (i=1,\ 2). \tag{1.4}$$

Припустимо, що в перерізі, навантаженому моментом M, зміщення $u_\Theta^{(i)}$ міняється вздовж радіуса за лінійним законом, $u_\Theta^{(1)}=\varepsilon r$, де ε — кут повороту даного перерізу. Тоді поставлена задача зводиться до розв'язання диференціальних рівнянь (1.4) з такими граничними умовами:

$$u_\Theta^{(1)}=\varepsilon r \ (r\leqslant a) \text{ при } z_1=\sqrt{\frac{A_{66}^{(1)}}{A_{44}^{(1)}}}\,L; \tag{1.5}$$

$$u_\Theta^{(1)}=u_\Theta^{(2)},\ \tau_{\Theta z}^{(1)}=\tau_{\Theta z}^{(2)}\ (r\leqslant a); \tag{1.6}$$

$$\tau_{\Theta z}^{(2)}=0\ (r>a) \text{ при } z_1=z_2=0; \tag{1.7}$$

$$\tau_{\Theta r}^{(1)}=0\ (r_1=a) \text{ при } 0<z_1<L\sqrt{\frac{A_{66}^{(1)}}{A_{44}^{(1)}}}. \tag{1.8}$$

Тут L — довжина стержня, a — його радіус.

2. У випадку стержня для розв'язання диференціального рівняння (1.4) використаємо метод розділення змінних [2]. Взявши частинний розв'язок у вигляді

$$u_\Theta^{(1)}=A_0 r z_1+B_0 r+Z(z_1)R(r) \tag{2.1}$$

і підставивши його в (1.4), для визначення функцій $Z(z_1)$ та $R(r)$ одержуємо звичайні диференціальні рівняння другого порядку, розв'язки яких з врахуванням обмеженості напружень і зміщень при $r=0$ дають для $u_\Theta^{(1)}$ такий вираз:

$$u_\Theta^{(1)}=A_0 r z_1+B_0 r+J_1(\lambda r)[A\operatorname{sh}(\lambda z_1)+B\operatorname{ch}(\lambda z_1)]. \tag{2.2}$$

Підставляючи (2.2) в (1.1), для $\tau_{\Theta z}^{(1)}$ і $\tau_{\Theta r}^{(1)}$ маємо

$$\tau_{\Theta z}^{(1)}=A_{44}^{(1)}A_0 r\cdot z_1+A_{44}^{(1)}\lambda J_1(\lambda r)[A\operatorname{ch}(\lambda z_1)+B\operatorname{sh}(\lambda z_1)], \tag{2.3}$$

$$\tau_{\Theta r}^{(1)}=-A_{66}^{(1)}\lambda J_2(\lambda r)[A\operatorname{sh}(\lambda z_1)+B\operatorname{ch}(\lambda z_1)]. \tag{2.4}$$

Тут A_0, A і B_0, B — довільні сталі;
$J_1(\lambda r)$, $J_2(\lambda r)$ — функції Бесселя першого роду;
λ — параметр розділення.

Для знаходження власних значень задачі λ_k використаємо граничну умову (1.8), з якої одержуємо $J_2(\lambda a)=0$. Значить,

$$\lambda_k=\frac{\mu_k}{a}\quad (k=1,2,3,\ldots), \tag{2.5}$$

де μ_k — корені рівняння $J_2(\mu)=0$.

Тоді загальний розв'язок для $u_\Theta^{(1)}$, $\tau_{\Theta z}^{(1)}$ і $\tau_{\Theta r}^{(1)}$ запишеться у вигляді

$$u_\Theta^{(1)}=a^2A_0\rho\zeta_1+aB_0\rho+\sum_{k=1}^{\infty}J_1(\mu_k\rho)[A_k\operatorname{sh}(\mu_k\zeta_1)+B_k\operatorname{ch}(\mu_k\zeta_1)];$$

$$\tau_{\Theta z}^{(1)}=aA_0A_{44}^{(1)}\rho+\frac{A_{44}^{(1)}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kJ_1(\mu_k\rho)[A_k\operatorname{ch}(\mu_k\zeta_1)+B_k\operatorname{sh}(\mu_k\zeta_1)]; \tag{2.6}$$

$$\tau_{\Theta r}^{(1)}=-\frac{A_{66}^{(1)}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kJ_2(\mu_k\rho)[A_k\operatorname{sh}(\mu_k\zeta_1)+B_k\operatorname{ch}(\mu_k\zeta_1)].$$

Тут $\rho=r/a$, $\zeta_1=z_1/a$.

Розв'язок рівняння (1.1) у випадку півпростору шукаємо за допомогою трансформанти Ханкеля

$$\overline{u}_{\theta}^{(2)}(z_2, \xi) = \int_0^{\infty} r\,\overline{u}_{\theta}^{(2)}(z_2, r) J_1(\xi r)\, dr, \tag{2.7}$$

для знаходження якої дістаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$\left(\frac{d^2}{d z_2^2} - \xi^2\right) u_{\theta}^{(2)} = 0. \tag{2.8}$$

Тоді

$$\overline{u}_{\theta}^{(2)} = C \cdot e^{-\xi z_2} + D e^{\xi z_2}. \tag{2.9}$$

Тому що $u_{\theta}^{(2)}$, а значить і $\overline{u}_{\theta}^{(2)}$ повинні зникати при $z_2 \to -\infty$, то $C=0$.

Тоді

$$u_{\theta}^{(2)} = a \int_0^{\infty} \eta^{-1} \varphi(\eta) e^{\eta \zeta_2} J_1(\eta\rho)\, d\eta;$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = A_{44}^{(2)} \int_0^{\infty} \varphi(\eta) e^{\eta \zeta_2} J_1(\eta\rho)\, d\eta \quad (-\infty \leqslant \zeta_2 \leqslant 0); \tag{2.10}$$

$$\tau_{\theta r}^{(2)} = -A_{66}^{(2)} \int_0^{\infty} \varphi(\eta) e^{\eta \zeta_2} J_2(\eta\rho)\, d\eta,$$

де $\zeta_2 = \dfrac{z_2}{a}$, $\varphi(\eta)$ — деяка невідома функція.

3. Для знаходження сталих A_k, B_k і функції $\varphi(\eta)$ маємо граничні умови (1.5)—(1.7) та умови ортогональності функцій Бесселя [2].

Згідно з граничними умовами (1.5) — (1.7), одержуємо

$$\int_0^{\infty} \eta^{-1} \varphi(\eta) J_1(\eta\rho)\, d\eta = B_0 \rho + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_1(\mu_k \rho) \quad (\rho \leqslant 1);$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_1(\eta\rho)\, d\eta = 0 \qquad (\rho > 1); \tag{3.1}$$

$$A_{44}^{(2)} \int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_1(\eta\rho)\, d\eta = a A_0 A_{44}^{(1)} \rho + \frac{A_{44}^{(1)}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_1(\mu_k \rho) A_k; \tag{3.2}$$

$$a\varepsilon\rho = a^2 A_0 l_1 \rho + a B_0 \rho + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\mu_k \rho)\left[A_k \operatorname{sh}(\mu_k l_1) + B_k \operatorname{ch}(\mu_k l_1)\right]; (\rho \leqslant 1), \tag{3.3}$$

де $l_1 = \dfrac{L}{a} \sqrt{\dfrac{A_{66}^{(1)}}{A_{44}^{(1)}}}$.

Помноживши обидві частини співвідношень (3.2—3.3) послідовно на ρ^2 і на $\rho J_1(\mu_n \rho)$ та проінтегрувавши їх по ρ в межах від 0 до 1, знаходимо сталі A_n і B_n, які визначаються через функцію $\varphi(\eta)$. Після врахування значень B_0 і B_k парні інтегральні рівняння (3.1) набувають вигляду

$$\int_0^\infty \eta^{-1} \varphi(\eta) J_1(\eta\rho)\, d\eta = \varepsilon\rho - \frac{4 l_1 A_{44}^{(2)}}{A_{44}^{(1)}} \rho \int_0^\infty t^{-1} \varphi(t) J_2(t)\, dt -$$

$$- 2 \frac{A_{44}^{(2)}}{A_{44}^{(1)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k \rho)}{\mu_k J_1^2(\mu_k)} \operatorname{th}(\mu_k l_1) \int_0^1 x J_1(\mu_k x)\, dx \int_0^\infty \varphi(t) J_1(tx)\, dt \quad (\rho \leqslant 1);$$

$$\int_0^\infty \varphi(\eta) J_1(\eta\rho)\, d\eta = 0 \quad (\rho > 1). \tag{3.4}$$

Застосувавши формулу обернення [6] до парних інтегральних рівнянь (3.4), для визначення функції $\varphi(\eta)$ дістаємо інтегральне рівняння типу Фредгольма другого роду з виродженим ядром

$$\varphi(\eta) = \frac{4}{\pi} \varepsilon \left[(1 - D_0) \psi_0(\eta) - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\eta) D_k \right]. \tag{3.5}$$

У формулі (3.5) введені позначення:

$$\psi_0(\eta) = \frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta, \quad \psi_k(\eta) = \int_0^1 \eta \sin \eta y \sin \mu_k y\, dy; \tag{3.6}$$

$$D_0 = \frac{4 l_1 A_{44}^{(2)}}{\varepsilon A_{44}^{(1)}} \int_0^\infty t^{-1} \varphi(t) J_2(t)\, dt;$$

$$D_k = \frac{A_{44}^{(2)}}{\varepsilon A_{44}^{(1)}} \frac{\operatorname{th}(\mu_k l_1)}{\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x J_1(\mu_k x)\, dx \int_0^\infty \varphi(t) J_1(tx)\, dt \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.7}$$

Величини D_0 і D_k є сталими. Знаючи їх, можна знайти функцію $\varphi(\eta)$, а також сталі A_n і B_n, які визначаються через $\varphi(\eta)$.

Згідно з відомим способом розв'язання інтегрального рівняння з виродженим ядром [4], шляхом підстановки значення $\varphi(\eta)$ з (3.5) в (3.7) для визначення D_0 і D_k одержуємо безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$b_k D_k + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{kn} D_n = f_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.8}$$

Тут

$$b_0 = \frac{\pi}{16 l_1} \frac{A_{44}^{(1)}}{A_{44}^{(2)}}, \quad b_k = \frac{\pi}{4} \frac{A_{44}^{(1)}}{A_{44}^{(2)}} \frac{\mu_k J_1^2(\mu_k)}{\operatorname{th}(\mu_k l_1)}; \tag{3.9}$$

$$\beta_{00} = f_0 = \frac{2}{3}, \; \beta_{k0} = f_k = \frac{1}{\mu_k}\left(\frac{\sin\mu_k}{\mu_k} - \cos\mu_k\right);$$

$$\beta_{0n} = 2\beta_{k0}, \; \beta_{kn} = \frac{\mu_n \sin\mu_k \cos\mu_n - \mu_k \sin\mu_n \cos\mu_k}{\mu_k^2 - \mu_n^2} \quad (k, n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.10}$$

За відомими сталими D_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ зміщення і напруження в стержні визначаються формулами

$$u_\theta^{(1)} = a\varepsilon\rho - \frac{a\varepsilon\rho}{l_1}(l_1 - \zeta_1) D_0 - 2\varepsilon a \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\mu_k \rho) \frac{\operatorname{sh}\mu_k(l_1 - \zeta_1)}{\operatorname{sh}\mu_k l_1} D_k;$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)} = \frac{\varepsilon A_{44}^{(1)}}{l_1} \rho D_0 + 2\varepsilon A_{44}^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_1(\mu_k \rho) \frac{\operatorname{ch}\mu_k(l_1 - \zeta_1)}{\operatorname{sh}\mu_k l_1} D_k.$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)} = 2\varepsilon A_{66}^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_2(\mu_k \rho) \frac{\operatorname{sh}\mu_k(l_1 - \zeta_1)}{\operatorname{sh}\mu_k l_1} D_k. \tag{3.11}$$

Підставляючи значення $\varphi(\eta)$ з (3.5) в (2.10), можна обчислити напруження $\tau_{\theta z}^{(2)}$ і $\tau_{\theta r}^{(2)}$ та зміщення $u_\theta^{(2)}$ в будь-якій точці пружного півпростору. Не зупиняючись на обчисленнях, наведемо формули для $u_\theta^{(2)}$, $\tau_{\theta z}^{(2)}$ і $\tau_{\theta r}^{(2)}$ в області контакту ($\zeta_2=0$, $\rho \leqslant 1$), а також для $u_\theta^{(2)}$ зовні контакту на поверхні півпростору ($\zeta_2=0$, $\rho>1$):

$$u_\theta^{(2)} = a\varepsilon(1 - D_0)\rho - 2a\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_k J_1(\mu_k \rho) \quad (\rho \leqslant 1); \tag{3.12}$$

$$u_\theta^{(2)} = \frac{2a\varepsilon}{\pi}(1 - D_0)\left[\rho \arcsin\frac{1}{\rho} - \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right] - \frac{4a\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_k \times$$

$$\times J_{2n+1}(\rho\mu_k)\left\{\frac{1}{2n}\sin\left(2n \arcsin\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{2n+2}\sin\left[(2n+2)\arcsin\frac{1}{\rho}\right]\right\}$$

$$(\rho > 1); \tag{3.13}$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = \frac{4\varepsilon}{\pi} A_{44}^{(2)}(1 - D_0)\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{4\varepsilon}{\pi} A_{44}^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left\{\frac{1}{\rho\sqrt{1-\rho^2}}[\sin\mu_k -\right.$$

$$\left. -(1-\rho^2)\mu_k \cos\mu_k] - \frac{\mu_k^2}{\rho}\int_\rho^1 \sqrt{y^2 - \rho^2} \sin\mu_k y \, dy\right\} \quad (\rho < 1); \tag{3.14}$$

$$\tau_{\theta r}^{(2)} = 2\varepsilon A_{66}^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \mu_k J_2(\mu_k \rho) \quad (\rho \leqslant 1). \tag{3.15}$$

Якщо $A_{44}^{(2)} = A_{66}^{(2)} = \infty$, тобто півпростір являє собою абсолютно тверде тіло, то $D_0 = 1$, $D_k = 0$, і тоді, згідно з (3.11), знаходимо

$$u_\theta^{(1)} = a\varepsilon\frac{\zeta}{l}, \; \tau_{\theta z}^{(1)} = A_{44}^{(1)}\frac{\varepsilon}{l_1}\rho, \; \tau_{\theta r}^{(1)} = 0; \; \left(\zeta = \frac{z}{a}, \; l = \frac{L}{a}\right). \tag{3.16}$$

Якщо $A_{44}^{(1)} = A_{66}^{(1)} = \infty$ ($D_0 = D_k = 0$), то, згідно з (3.12)—(3.15), маємо

$$u_\Theta^{(2)} = a\varepsilon\rho \ (\rho \leqslant 1); \ \ u_\Theta^{(2)} = \frac{2a\varepsilon}{\pi}\left[\rho \arcsin\frac{1}{\rho} - \frac{\sqrt{\rho^2-1}}{\rho}\right] (\rho > 1);$$

$$\tau_{\Theta z}^{(2)} = \frac{4\varepsilon}{\pi} A_{44}^{(2)} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} (\rho \leqslant 1); \ \ \tau_{\Theta r}^{(2)} = 0 \ (\rho \leqslant 1). \tag{3.17}$$

Одержані формули при $A_{44}^{(1)} = A_{66}^{(1)} = G_1$, $A_{44}^{(2)} = A_{66}^{(2)} = G_2$, де G_1, G_2 — модулі зсуву, дають розв'язок задачі про сумісне кручення ізотропних стержня і півпростору. Зокрема, в цьому випадку формули (3.16) є рішенням Кулона задачі про кручення ізотропного стержня [7], а співвідношення (3.17) — рішенням задачі про кручення ізотропного півпростору круглим циліндричним штампом [5].

Щоб визначити кут повороту ε в залежності від прикладеного моменту M, скористаємось формулою

$$M = 2\pi a^3 \int\limits_0^1 \tau_{\Theta z}^{(1)} \rho^2 \, d\rho, \tag{3.18}$$

з якої після підрахунків дістаємо

$$M = \frac{\pi a^3 A_{44}^{(1)} D_0}{2 l_1} \varepsilon. \tag{3.19}$$

Очевидно, при визначенні даної залежності замість $\tau_{\Theta z}^{(1)}$ можна скористатися значенням $\tau_{\Theta z}^{(2)}$ із (3.14). Тоді

$$M = \varepsilon 8 a^3 A_{44}^{(2)} \left[\frac{2}{3}(1 - D_0) - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{\mu_k}\left(\frac{\sin\mu_k}{\mu_k} - \cos\mu_k\right)\right]. \tag{3.20}$$

Співвідношення (3.19) і (3.20) різні за формою, але збігаються за величиною. Слід зазначити, що істотних змін при рішенні задачі не буде, якщо умову (1.5) лінійного розподілу зміщень у навантаженому моментом M перерізі замінити умовою лінійного розподілу напружень $\tau_{\Theta z}^{(1)}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Х. Арутюнян, Б. А. Абрамян. Кручение упругих тел. Физматгиз, 1963.
2. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Физматгиз, 1962.
3. С. Г. Лехницкий Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
4. У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1957.
5. E. Reissner, H. Sagoci. Forced torsional oscillation of an elastic half-space. Journ., of Appl. Phys., v. 15, № 9, 1944.
6. И. Снеддон. Преобразования Фурье. Изд-во иностр. л-ры, 1965.
7. В. И. Феодосьев. Сопротивление материалов. Физматгиз, 1960.

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, Я. М. КИЗЫМА

СОВМЕСТНОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ И ПОЛУПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ АНИЗОТРОПИИ

(резюме)

Рассматривается задача о совместном кручении круглого цилиндрического стержня и полупространства при наличии сцепления для случая разных цилиндрически ортотропных материалов. При этом предполагается, что ось анизотропии стержня совпадает с его геометрической осью и с осью анизотропии материала полупространства.