ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 513.011.3

Г. Л. БУЙМОЛА

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ГЕОМЕТРІЇ ГРАФІЧНОЇ ПЛОЩИНИ

Розглянемо «кусок» евклідової площини з основними геометричними елементами в ньому. Будемо називати його площиною α_1.

Нехай E_1' — множина всіх евклідових точок площини α_1. Кожній точці A_i' множини E_1' поставимо у взаємно однозначну відповідність впорядковану пару чисел (x_i, y_i) — координати цієї точки. Множину E_2' вказаних пар чисел назвемо арифметичною площиною α_2.

Якщо кожній точці A_i' множини E_1' в площині α_1 поставимо у взаємно однозначну відповідність «кружечок» A_i сталого, достатньо малого радіуса ω_0 з центром в цій точці, то дістанемо *графічну площину* α як множину E таких «кружечків». Кожний такий «кружечок» ми будемо називати *графічною точкою* і записувати A_i (A_i'), або просто A_i — графічна точка.

Отже, тут можна говорити про взаємно однозначне відображення множини E_1' точок площини α_1 на множину E_2' впорядкованих пар чисел площини α_2 і на множину E графічних точок графічної площини α. Площини α_1, α_2, α ми будемо розглядати ніби накладеними одна на одну.

Графічну точку $A(A')$ можна розглядати у деяких випадках також як множину Σ евклідових точок M_1', M_2', ..., M_n' (поданих у площині α_2 впорядкованими парами чисел (x_1,y_1), $(x_2 y_2)$...), послідовність $\{M_n'\}$ яких буде збіжною до точки $A^1 \in \Sigma$ (позначимо це $\lim\limits_{n\to\infty} \{M_n'\} = A'$), якщо віддаль між членами послідовності і точкою A' (границею) починаючи з деякого номера стає меншою від будь-якого наперед заданого додатного числа ω_0.

Точку A' називають граничною точкою послідовності $\{M_n'\}$. Вона буде центром A' того «кружечка» радіуса ω_0, який ми назвали графічною точкою A в графічній площині α. Графічній точці A можна також поставити у відповідність впорядковану пару чисел ξ, η, з множини Σ, якщо тільки

$$(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 \leqslant \omega_0^2.$$

Числа ξ і η назвемо графічними координатами точки A в графічній площині α (вони є координатами точки A' і координати кожної точки $M_i' \simeq (\xi,\eta)$. Крім графічних точок, у графічній площині ми будемо розглядати графічні лінії як «смужки» — геометричні місця графічних точок. Зокрема, кожній евклідовій прямій a' площини α_1 ставиться у взаємно однозначну відповідність деяка «смужка» a, обмежена двома евклідовими паралельними прямими, що знаходяться на сталій, достатньо малій віддалі $2\omega_0$ одна від одної, середньою лінією якої є дана евклідова пряма a'. Записувати це будемо так: $a(a')$ або a. Цю «смужку» $a(a')$ будемо називати *графічною прямою* в площині α. Аналітично графічну пряму $a(a')$ в евклідовій площині α_1 можна задати як обгортку сім'ї кіл $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\omega_0^2=0$, центри яких лежать на даній евклідовій прямій a' (рис. 1, a).

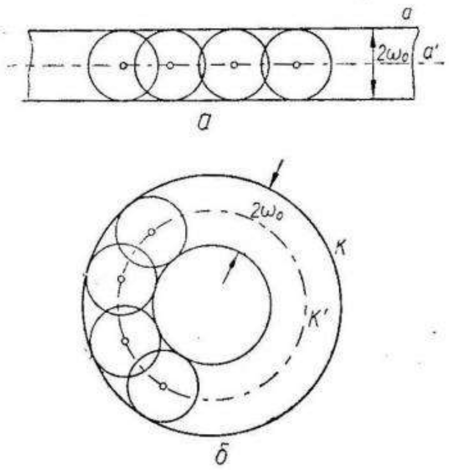

Рис. 1.

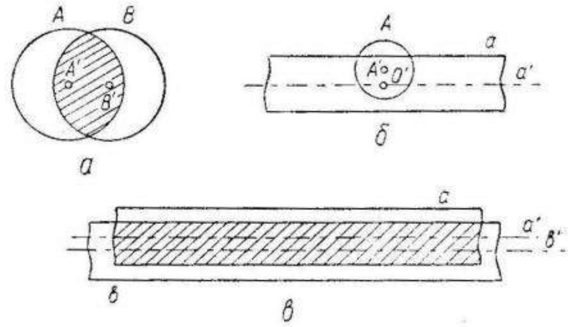

Рис. 2.

Рівняння цієї обгортки можна подати у вигляді

$$Ax+By\mp\sqrt{A^2+B^2}\,\omega_0+C=0.$$

Графічне коло $k(k')$ можна розглядати в евклідовій площині також як деяку замкнену «смужку», обмежену двома концентричними колами, шириною $2\omega_0$, середньою лінією якої є коло k' (рис. 1, $б$). Аналітично цю «смужку» можна задати в евклідовій площині як обгортку сім'ї кіл

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2-\omega_0^2=0,$$

центри яких знаходяться на відповідному евклідовому колі k': $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$. Рівняння цієї обгортки можна записати у вигляді $(x-a)^2+(y-b)^2-(R^2\pm\omega_0)^2=0$.

Дві графічні точки A і B будемо називати умовно або графічно інцидентними, якщо віддаль між їх відповідними точками A' і B' в евклідовій площині α_1 менше від ω_0 (рис. 2, a). Інакше, якщо точки A' і B' в евклідовій площині α_1 належать перетинові двох кружечків A і B, що являють собою задані графічні точки. Зокрема, якщо точки A' і B' збігаються, то графічні точки A і B назвемо абсолютно інцидентними. Графічну точку $A(A')$ і графічну пряму $a(a')$ назвемо умовно або графічно інцидентними, якщо віддаль центра «кружечка», що являє собою графічну точку, від середньої лінії «смужки», що являє собою графічну пряму, менша ω_0, тобто якщо $A'O'<\omega_0$ (рис. 2, $б$). Інакше, якщо евклідова точка A' і пряма a' належать перетинові двох фігур: T_a — графічної точки і P_a — графічної прямої. Якщо точки A' і O' збігаються, то графічна точка A і пряма a — абсолютно інцидентні.

Дві графічні прямі будуть умовно або графічно інцидентні одна одній, якщо їх відповідні евклідові прямі a' і b' будуть належати одному і тому самому перетинові фігур P_a і P_b (тобто графічних прямих a і b). Якщо $a'\equiv b'$, то графічні прямі a і b будуть абсолютно інцидентними (рис. 2, $в$).

Три не інцидентні між собою точки лежать на одній графічній прямій, якщо графічні координати їх лінійно залежні між собою. Нехай, наприклад, графічні точки A_i і B_k задані відповідно координатами (x_i, y_i) і (x_k, y_k). Тоді графічна точка C_j з координатами $[\mu x_i + (1-\mu) x_k;\ \mu y_i + (1-\mu) y_k]$ буде лежати на одній графічній прямій з точками A_i і B_k, бо визначник

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ \mu x_i + (1-\mu) x_k & \mu y_i + (1-\mu) y_k & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідсіль випливає, що при зміні μ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$ графічна точка C_j описує графічний відрізок $A_i B_k$ (рис. 3). Точці A_i' відповідає значення $\mu = 1$, а точці B_k' — $\mu = 0$.

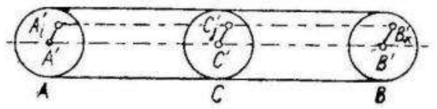

Рис. 3.

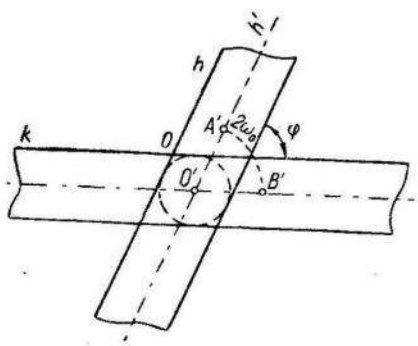

Рис. 4.

Розглядаючи рис. 3, можна зробити такий висновок:

1. Дві задані графічно не інцидентні графічні точки $A(A')$ і $B(B')$ завжди визначають одну і лише одну графічну пряму, абсолютно інцидентну двом даним графічним точкам і множину графічних прямих, графічно інцидентних їм. (Справді, будь-яка евклідова точка A_i', взята з околу * графічної точки A, і будь яка евклідова точка B_k', взята з околу графічної точки B, визначає в евклідовій площині α евклідову пряму $A_i'\ B_k'$ і, отже, графічну пряму $A_i B_k (A_i'\ B_k')$, графічно інцидентну точкам A і B).

2. Дві задані неінцидентні графічні точки завжди визначають тільки один графічний відрізок у графічній площині. Він належить будь-якій прямій, що проходить через обидві графічні точки.

Нехай в графічній площині α задані графічні точки $A(\xi, \eta)$ і $B(\gamma, \zeta)$, кожна множиною числових пар (x_i, y_i) і (x_k, y_k), які знаходяться в околі відповідної точки, тобто задовольняють умову

$$(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 \leqslant \omega_0^2 \text{ і } (\gamma - x_k)^2 + (\zeta - y_k)^2 \leqslant \omega_0^2.$$

Тоді під віддаллю між двома графічними точками $A(\xi, \eta)$ і $B(\gamma, \zeta)$ в графічній площині розуміється величина

$$d(AB) = \sqrt{(\xi - \gamma)^2 + (\eta - \zeta)^2},$$

яка може бути виражена наближено віддаллю між будь-якою евклі-

* Якщо прийняти точку A' за початок деякої декартової системи координат, то тоді множину точок, координати яких задовольняють нерівність $x_i^2 + y_i^2 \leqslant \omega_0^2$, ми називаємо околом графічної точки $A(A')$.

довою точкою, взятою з окола графічної точки A, і будь-якою евклідовою точкою, взятою з околу графічної точки B, заданих числовими парами (x_i, y_i) і $(x_k . y_k)$, тобто

$$d(AB) \approx \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}.$$

При цьому ми покладаємо, що всі ці віддалі в певному розумінні тотожні між собою і що $d(AB) = d(BA)$. Якщо графічна точка A графічно інцидентна графічній точці B, то $d(AB) = 0$.

Множина E всіх графічних точок площини α утворює метричний простір Γ, тому що кожній впорядкованій парі її елементів (точок) A і B відповідає число $d(AB)$, що задовольняє умови

1) $d(AA) = 0$, якщо A інцидентна B і $d(AB) > 0$, коли A не інцидентна B;

2) $d(AB) = d(BA)$;

3) $d(AC) \leqslant d(AB) + d(BC)$.

Дві графічні півпрямі площини α, абсолютно інцидентні одній і тій самій графічній точці O і графічно не інцидентні одній і тій самій графічній прямій, утворюють графічний кут. Точка O — вершина кута, а півпрямі h і k — його сторони. При цьому повинні виконуватися такі умови:

1) $\measuredangle\, hk = \measuredangle\, kh$;

2) $\measuredangle\, kh \geqslant \frac{2\omega_0}{r}$, де $2\omega_0$ величина дуги кола радіуса r, центр якого перебуває в вершині кута O, а $r > \frac{\omega_0}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, якщо через φ позначити кут $\measuredangle\, hk$ (рис. 4).

Два графічні промені, перетинаючись, утворюють дві пари графічних суміжних кутів. Перетин двох графічних прямих завжди містить хоч би одну графічну точку. Розглянемо такі випадки:

1. Дві графічні прямі графічно інцидентні. В цьому випадку вони визначають смугу інцидентності, що містить нескінченну множину спільних обом прямим графічних точок ($r = \infty$, $\varphi = 0$).

2. Дві графічні прямі перетинаються під кутом $O < \varphi < \frac{\pi}{2}$. В цьому випадку вони визначають «відрізок перетину» двох графічних прямих, що містять скінченне число графічно не інцидентних точок і нескінченну множину графічно інцидентних графічних точок. Очевидно, що «відрізок перетину» змінюється зі зміною кута φ. Зокрема, дві графічні прямі, перетинаючись під прямим кутом $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, визначають лише одну графічну точку, що міститься всередині квадрата із стороною, рівною $2\omega_0$. Всякий «геометричний образ» у графічній площині ми будемо розглядати як деяку сукупність (множину) графічних точок або графічних точок і ліній. Всі теореми геометрії графічної площини являють собою належним чином витлумачені теореми евклідової геометрії, оскільки графічні точки, графічні лінії графічної площини є евклідові об'єкти.

Будуючи цю геометрію, ми виходимо з таких припущень.

1. Існує графічна площина, в межах якої вкладаються всі виконувані нами графічні побудови (наприклад, лист креслярського паперу, де ми виконуємо різні креслення).

2. Через дві графічно не інцидентні графічні точки A і B можна провести тільки одну графічну пряму, абсолютно інцидентну цим точкам. (Як теорему можна довести, що через ці дві графічні точки A і B проходить безліч графічних прямих, умовно інцидентних їм, і тільки один графічний відрізок, що ними визначається).

3. Дві графічно не інцидентні графічні прямі, перетинаючись, можуть мати лише одну спільну абсолютно інцидентну їм графічну точку (в якій вони перетинаються одна з одною). В особливих випадках (коли вони утворюють малий кут) вони можуть мати перетин як сукупність декількох графічних точок («відрізок перетину»).

Аналогічно два дотичні графічні кола або графічне коло і дотична до нього графічна пряма мають не одну спільну точку дотику, а сукупність графічних точок дотику — «відрізок дотику». Ці припущення контролюються досвідом і узгоджуються з ним.

Поняття «між» також вимагає деяких обмежень у графічній площині через існування в ній графічно інцидентних точок. Графічну точку A_2 не можна відрізнити від графічних точок A_1 і A_3 на графічній прямій a, якщо вона знаходиться «між» графічними точками A_1 і A_3, що знаходяться одна від одної на віддалі $d<\omega_0$, тобто, якщо вона знаходиться «між» двома умовно інцидентними графічними точками A_1 і A_3.

Звідси випливає, що і поділ графічного відрізка на частини в графічній площині не можна продовжувати нескінченно.

4. Кожний графічний відрізок може бути поділений навпіл, але поділ цей не можна продовжувати нескінченно, а лише доти, доки графічні точки — кінці наново збудованого графічного відрізка не стануть графічно інцидентними.

Отже, якщо графічні точки A_1 і A_2 графічно інцидентні, то «між» ними уже немає графічно не інцидентних точок. Такі дві точки відрізка не визначають.

Поняття конгруентності, неперервності і паралельності в геометрію графічної площини можна ввести на базі деяких властивостей руху, а саме — зсуву і обертання, що здійснюються за допомогою лінійки, косинця і циркуля.

Рух в графічній площині α ми називаємо зсувом (або переносним рухом) вздовж деякої графічної прямої $a(a')$, якщо задовольняються такі умови.

1. Кожна графічна точка графічної прямої $a(a')$ зміщується, причому залишається весь час графічно інцидентною цій самій прямій.

2. Кожна графічна точка площини α, в якій лежить графічна пряма $a(a')$, залишається на площині α по той самий бік від прямої $a(a')$, що і була. Якщо повторювати декілька разів один і той же зсув, то деяка графічна точка A буде переходити в графічні точки A_1, A_2, ... графічної прямої A_1A_2. Як аксіому приймемо, що ці точки можуть зрештою досягти або пересягнути довільну точку цієї прямої.

Уявляючи, що будь-який зсув із початкового положення в кінцеве відбувається неперервно, ми називаємо пряму, що тут розглядаємо, траєкторією графічної точки A при цьому переносному русі. Відомо, що дві різні траєкторії одного і того ж переносного руху не можуть перетинатися. Тому всім траєкторіям одного і того ж переносного руху дають назву паралельних прямих (наприклад, при зсуві косинця вздовж лінійки його точки описують паралельні прямі).

Приймаємо також як аксіому щодо переносного руху, що будь-які два зсуви T і T' підлягають комутативному законові: $TT'=T'T$.

Наведені аксіоми узгоджуються з практичними операціями косинцем та лінійкою в кресленні.

Характеризуємо тепер рух, що залишає без змін деяку графічну точку графічної площини, наприклад точку O, що залишається на місці. Це буде так зване обертання навколо цієї точки. При цьому припускається, що існує тільки один рух, який переводить промінь a, що виходить з точки O, в будь-який другий промінь a_1, що також виходить з тієї ж точки O. Усі обертання уявляють собі здійсненими неперервно, виходячи з певного початкового положення. При цьому рухові кожна графічна точка описує траєкторію, що зветься графічним колом. Тут теж як аксіому слід прийняти таке твердження:

Промені a, a_1, a_2, ..., що дістаємо з променя a при повторенні одного і того ж обертання, повинні зрештою або досягти або пересягнути всяку півпряму, що виходить з точки O. Тому, зокрема, неперервне обертання повинне зрештою привести промінь a в його початкове положення, причому і кожна точка A цього променя повернеться в своє початкове положення. Отже, траєкторії являтимуть собою замкнені лінії, що зустрічають кожен промінь, який виходить з точки O, в одній графічній точці A, так що відрізки OA накладаються один на другий.

Тепер ми можемо дати визначення конгруетності відрізків і кутів.

Два графічні відрізки AB і A_1B_1 будемо називати графічно конгруентними або рівними, якщо існує рух, який приводить ці відрізки в інцидентне положення, тобто графічну точку A переводить в графічну точку A_1, а графічну точку B — в графічну точку B_1. Інакше: два графічні відрізки AB і A_1B_1 графічно конгруентні, якщо при накладанні одного з них на другий графічна точка A стане графічно інцидентною графічній точці A_1, а графічна точка B — графічно інцидентною графічній точці B_1.

Аналогічно визначається і графічна конгруентність кутів. Кут, рівний своєму суміжному, зветься прямим. Припускається також, що всі графічні прямі кути рівні між собою. Це припущення дозволяє в графічній площині будувати, з допомогою лінійки і прямого кута (косинця), взаємно перпендикулярні прямі.

Із сказаного можна зробити висновок, що графічна площина допускає сукупність рухів, транзитивну відносно лінійних елементів. Отже, вона має свою внутрішню геометрію, яку можна належним чином обгрунтувати.

Г. Л. БУИМОЛА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ГРАФИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

(р е з ю м е)

Каждой точке A_i' множества E_1' эвклидовых точек куска эвклидовой плоскости ставится во взаимно однозначное соответствие «кружочек» A_i постоянного достаточно малого радиуса ω_0 с центром в этой точке и называется графической точкой.

Множество E таких графических точек называется графической плоскостью. Графической прямой называется «полоска», рассматриваемая как геометрическое место графических точек. Каждой эвклидовой прямой a' ставится в соответствие полоска a шириной $2\omega_0$.

Вводятся понятия графической и абсолютной инцидентности графических точек и прямых, понятия графического отрезка и угла. Рассматриваются некоторые вопросы аксиоматики геометрии графической плоскости.