ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 539.311

С. П. ГАВЕЛЯ, В. М. КОСАРЧИН

ПРО ОДИН СПОСІБ РОЗРАХУНКУ СКІНЧЕННО ДЕФОРМОВАНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

В роботах [1—2] запропоновано спосіб застосування методу Я. Б. Лопатинського [3] до розв'язання лінійних статичних задач теорії пологих оболонок. Тут цей спосіб поширюється на випадок, коли в системі диференціальних рівнянь, що описує їх пружну рівновагу, беруться до уваги також і нелінійні члени, які походять від прогинів [4, стор. 475].

Відносно координат $u_1=u_1(x)$, $u_2=u_2(x)$ та $w=w(x)$ вектора зміщень така система рівнянь з допомогою матричних позначень, що вживаються в [3]),

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix};\quad \partial=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial x_2}\end{pmatrix};\qquad \begin{array}{c}\partial'=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right),\\[3mm] \Delta=\partial'\partial=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2},\end{array}$$

може бути записана у вигляді

$$\Delta u=\Phi(u,w);\tag{1}$$

$$\Delta\Delta w+\lambda^4 w=F(x;u,w).\tag{2}$$

Тут

$$\Phi(u,w)=\overline{\Phi}(u,w)+\widetilde{\Phi}(w);$$

$$F(x;u,w)=\overline{F}(x;u,w)+\widetilde{F}(u,w);$$

$$\overline{\Phi}=(u,w)=\varkappa\Delta u-2\varkappa\partial\partial' u-4\varkappa\partial_k w;$$

$$\overline{F}(x;u,w)=\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3}Z-\frac{12}{h^2}\partial'_k u;$$

$$\widetilde{\Phi}(w)=-[(1-\varkappa)\Delta+2\varkappa\partial\partial']w\partial' w;$$

$$\widetilde{F}(u,w)=\frac{6}{h^2}\Big\{2(1-\sigma)\left(\partial'\frac{\partial w}{\partial x_1}\partial u_1+\partial'\frac{\partial w}{\partial x_2}\partial u_2\right)+2\sigma\Delta w\partial' u+\sigma\Delta w\partial' w\partial w+$$
$$+(\partial' w\partial)^2 w+(1+\sigma)(\partial'_k w\partial w+w\partial'_k w\partial w)\Big\};$$

$$\partial_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \sigma_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}; \qquad \partial_k' = \left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \ \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

$$\lambda^4 = \frac{12}{h^2}(k_1^2 + k_2^2 + 2\sigma k_1 k_2);$$

$$\sigma_1 = \frac{k_1 + \sigma k_2}{1+\sigma}; \quad \sigma_2 = \frac{k_2 + \sigma k_1}{1+\sigma}; \quad \varkappa = \frac{1+\sigma}{3-\sigma};$$

x_1, x_2 — криволінійні координати точки x серединної поверхні оболонки, Z — нормальна складова зовнішнього навантаження, E та σ — модуль Юнга та коефіцієнт пружності матеріалу відповідно, h — товщина оболонки, k_1, k_2 — її головні кривизни, які з огляду на відоме припущення В. З. Власова [4, стор. 437] з достатньою точністю можна вважати постійними.

1. ШАРНІРНЕ ЗАКРІПЛЕННЯ ПРЯМОКУТНОГО КОНТУРА

Розглянемо спочатку випадок, коли оболонка заповнює в площині криволінійних координат її серединної поверхні прямокутну ($-\alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha_1$, $-\alpha_2 \leqslant x_2 \leqslant \alpha_2$) область Ω, на контурі S якої будемо вважати виконаними умови шарнірного закріплення

$$u_{|S} = 0; \tag{3}$$

$$w_{|S} = 0; \ \Delta w_{|S} = 0. \tag{4}$$

При відсутності нелінійних членів ($\widetilde{\Phi} \equiv 0$, $\widetilde{F} \equiv 0$) розв'язок задачі (1), (2), (3), (4) можна визначити за такою, аналогічною побудованій в [1], ітераційною схемою:

$$u = \lim_{l\to\infty} u^{(l)}; \ w = \lim_{l\to\infty} w^{(l)};$$

$$u^{(l)} = u^{(l)}(x) = \sum_{l,\,m=1}^{\infty} u_{lm}^{(l)}\, \omega_l^2(x_1)\, \omega_m^2(x_2);$$

$$w^{(l)} = w^{(l)}(x) = \sum_{l,\,m=1}^{\infty} w_{lm}^{(l)}\, \omega_l^2(x_1)\, \omega_m^2(x_2);$$

$$\omega_k^1(x_j) = \cos\frac{k\pi}{2}\left(\frac{x_j}{\alpha_j} + 1\right); \quad \omega_k^2(x_j) = \sin\frac{k\pi}{2}\left(\frac{x_j}{\alpha_j} + 1\right);$$

$$u_{jlm}^{(l)} = \frac{4\alpha_1^2\alpha_2^2\Phi_{jlm}^{l-1}}{\pi^2(l^2\alpha_2^2 + m^2\alpha_1^2)}; \ (j = 1, 2) \tag{5}$$

$$w_{lm}^{(l)} = \frac{16\alpha_1^4\alpha_2^4\overline{F}_{lm}^{(l)}}{\pi^4(l^2\alpha_2^2 + m^2\alpha_1^2)^2 + 16\alpha_1^4\alpha_2^4\lambda^4}; \tag{6}$$

$$\Phi_{1lm}^{(l)} = \frac{\pi^2(l^2\alpha_2^2 - m^2\alpha_1^2)}{4\alpha_1^2\alpha_2^2}u_{1lm}^{(l)} - \sum_{rs}\frac{\pi^2 rs}{2\alpha_1\alpha_2}\gamma_{rl}\gamma_{sm}u_{2rs}^{(l)} - 2\sigma_1\sum_r\frac{\pi r}{\alpha_1}\gamma_{rl}w_{rm}^{(l)}; \tag{7}$$

$$\Phi_{2lm}^{(l)} = \frac{\pi^2(m^2\alpha_1^2 - l^2\alpha_2^2)}{4\alpha_1^2\alpha_2^2}u_{2lm}^{(l)} - \sum_{rs}\frac{\pi^2 rs}{2\alpha_1\alpha_2}\gamma_{rl}\gamma_{sm}u_{1rs}^{(l)} - 2\sigma_2\sum_s\frac{\pi s}{\alpha_2}\gamma_{sm}w_{ls}^{(l)}; \tag{8}$$

$$\overline{F}_{lm}^{(i)} = \frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3} Z_{lm} - \frac{\sigma}{h^2}(k_1 + \sigma k_2) \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_1} \gamma_{rl} u_{1rm}^{(i)} -$$

$$- \frac{\sigma}{h^2}(k_2 + \sigma k_1) \sum_s \frac{\pi s}{\alpha_2} \gamma_{sm} u_{2ls}^{(i)}; \tag{9}$$

$$Z(x) = \sum_{lm} Z_{lm} \omega_l^2(x_1) \omega_m^2(x_2); \quad \omega_k^1(x_j) = \sum_n \gamma_{kn} \omega_n^2(x_j).$$

З огляду на незначний вплив величин $\tilde{\Phi}(w)$, $\overline{F}(u, w)$ при достатньо малому навантаженні Z урахування нелінійних членів, очевидно, може бути досягнуте шляхом вживання у формулах (5), (6) замість $\Phi_{jlm}^{(i-1)}$ та $\overline{F}_{lm}^{(i)}$ відповідно

$$\Phi_{jlm}^{(i-1)} = \overline{\Phi}_{jlm}^{(i-1)} + \tilde{\Phi}_{jlm}^{(i-1)}; \qquad F_{lm}^{(i)} = \overline{F}_{lm}^{(i)} + \tilde{F}_{lm}^{(i-1)},$$

де

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_{1lm}^{(i)} = \frac{-\pi^3}{8\alpha_1^3\alpha_2^2} \sum_{pqkn} w_{pq}^{(i)} w_{kn}^{(i)} \{2\varkappa\alpha_1^2 pqn\, \Theta_{pkl}^{12} \Theta_{qnm}^{11} - [(1+\varkappa)\alpha_2^2 p^2 +$$

$$+ (1-\varkappa)\alpha_1^2 q^2]\, k\, G_{pkl}^{21} \Theta_{qnm}^{22}\}; \tag{10}$$

$$\tilde{\Phi}_{2lm}^{(i)} = \frac{-\pi^3}{8\alpha_1^3\alpha_2^3} \sum_{pqkn} w_{pq}^{(i)} w_{kn}^{(i)} \{2\varkappa\alpha_2^2 pqk\, \Theta_{pkl}^{11} \Theta_{qnm}^{12} - [(1-\varkappa)\alpha_2^2 p^2 +$$

$$+ (1+\varkappa)\alpha_1^2 q^2]\, n \Theta_{pkl}^{22} \Theta_{qnm}^{21}\}; \tag{11}$$

$$\tilde{F}_{lm}^{(i)} = \frac{\pi^2}{8\alpha_1^3\alpha_2^3} \sum_{pqkn} w_{pq}^{(i)} \{v_{3kn}^{(i)}\, 2\alpha_1^2\alpha_2^2 pq\, \Theta_{pkl}^{12} \Theta_{qnm}^{12} +$$

$$+ v_{1kn}^{(i)}\, 2\alpha_1\alpha_2(\alpha_2^2 p^2 + \sigma\alpha_1^2 q^2)\Theta_{pkl}^{21}\Theta_{qnm}^{21} + v_{2kn}^{(i)}\, 2\alpha_1\alpha_2(\sigma\alpha_2^2 p^2 + \alpha_1^2 q^2)\Theta_{pkl}^{21}\Theta_{qnm}^{21} +$$

$$+ u_{1kn}^{(i)}\, \pi\alpha_2(\alpha_2^2 p^2 + \sigma\alpha_1^2 q^2)\Theta_{pkl}^{21}\Theta_{qnm}^{22} + u_{2kn}^{(i)}\, \pi\alpha_1(\sigma\alpha_2^2 p^2 + \alpha_1^2 q^2)\Theta_{pkl}^{22}\Theta_{qnm}^{21} +$$

$$+ u_{1kn}^{(i)}\, \pi\alpha_1^2\alpha_2 pqn\, \Theta_{pkl}^{12}\Theta_{qnm}^{11} + u_{2kn}^{(i)}\, \pi\alpha_1\alpha_2^2 pqk\, \Theta_{pkl}^{11}\Theta_{qnm}^{12} + \tag{12}$$

$$+ w_{kn}^{(i)}\, \alpha_1\alpha_2^3(k_1 + \sigma k_2)\, pk\, \Theta_{pkl}^{11}\Theta_{qnm}^{22} + w_{kn}^{(i)}\, \alpha_1^3\alpha_2(k_2 + \sigma k_1)\, qn\, \Theta_{pkl}^{22}\Theta_{qnm}^{11} +$$

$$+ w_{kn}^{(i)}\, 2\alpha_1\alpha_2(1+\sigma)(\sigma_1\alpha_2^2 p^2 + \sigma_2\alpha_1^2 q^2)\Theta_{pkl}^{22}\Theta_{qnm}^{22}.$$

При цьому

$$v_{1lm}^{(i)} = \frac{\pi^2}{4\alpha_1^2} \sum_{pqkn} w_{pq}^{(i)} w_{kn}^{(i)}\, pk\, \overline{\Theta}_{pkl}^{11} \overline{\Theta}_{qnm}^{22};$$

$$v_{2lm}^{(i)} = \frac{\pi^2}{4\alpha_2^2} \sum_{pqkn} w_{pq}^{(i)} w_{kn}^{(i)}\, qn\, \overline{\Theta}_{pkl}^{22} \overline{\Theta}_{qnm}^{11}; \tag{13}$$

$$v_{3lm}^{(i)} = \frac{\pi^2}{4\alpha_1^2\alpha_2^2} \sum_{pqkn} w_{pq}^{(i)} w_{kn}^{(i)}\, pn\, \Theta_{pkl}^{12} \Theta_{qnm}^{21};$$

$$\omega_k^i(x)\, \omega_l^j(x) = \sum_n \Theta_{kln}^{ij}\, \omega_n^2(x) = \sum_n \overline{\Theta}_{kln}^{ij}\, \omega_n^1(x).$$

Так що

$$2\,\Theta_{kln}^{11} = \gamma_{k-l,\,n} + \gamma_{k+l,\,n};$$

$$2\,\Theta_{kln}^{22} = \gamma_{k-l,\,n} - \gamma_{k+l,\,n};$$

$$2\,\Theta_{kln}^{12} = \delta(l-k-n) + \delta(l+k-n);$$

$$2\Theta_{kln}^{21} = \delta(k-l-n) + \delta(k+l-n); \qquad (14)$$

$$2\,\overline{\Theta}_{kln}^{11} = \delta(k-l-n) + \delta(k+l-n);$$

$$2\,\overline{\Theta}_{kln}^{22} = \delta(k-l-n) - \delta(k+l-n);$$

якщо

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0; \\ 0 \text{ при } x \neq 0. \end{cases}$$

З формул (14) легко бачити, що реалізація визначення величин Θ_{klm}^{ij} та $\overline{\Theta}_{klm}^{ij}$ за допомогою логічних операцій дозволяє уникнути небажаного завантаження оперативної пам'яті ЕЦОМ.

2. ВИПАДОК КРИВОЛІНІЙНОГО КОНТУРА

Нехай тепер контур S заповнюваної оболонкою області Ω — крива $\xi = \xi(t)$ $(\xi_1 = \xi_1(t),\ \xi_2 = \xi_2(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, що задовольняє умови Ляпунова. Як і в [2], у цьому випадку доречно застосувати інтегральні рівняння. Припустимо, наприклад, заданими граничні умови жорсткого защімлення.

$$u_{|S} = 0; \qquad (15)$$

$$w_{|S} = 0; \ \frac{\partial w}{\partial n}_{|S} = 0. \qquad (16)$$

При розв'язанні допоміжної задачі (15) для рівняння $\Delta u = \Phi$ можна скористатися побудованим в [2] алгоритмом:

$$u(x) = u^0(x) - \int_0^{2\pi} g(x,\ \xi(t))\,\mu(t)\,dt; \qquad (17)$$

$$g(x,\ \xi) = \sum_{lm} g_{lm}\,\omega_l(x_1)\,\omega_m(x_2)\,\omega_l(\xi_1)\,\omega_m(\xi_2);$$

$$g_{lm} = \frac{-4\alpha_1\alpha_2}{\pi^2(l^2\alpha_2^2 + m^2\alpha_1^2)}; \quad u^0(x) = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} g(x,\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi_1\,d\xi_2.$$

При цьому густина $\mu(t)$ потенціалу (17) визначається рівнянням

$$u^0(x)(t)) = \int_0^{2\pi} g(x(t),\ \xi(\tau))\,\mu(\tau)\,d\tau. \qquad (18)$$

Розв'язуючи другу допоміжну задачу (16) для рівняння $\Delta\Delta w + \lambda^4 w = F$, зручно вжити потенціальне зображення

$$w(x) = w^0(x) + \int_S G(x,\ \xi) \frac{\partial \Delta w(\xi)}{\partial \nu} d_\xi S - \int_S \frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \nu_\xi} \Delta w(\xi) d_\xi S, \quad (18')$$

де

$$G(x,\ \xi) = \sum_{lm} G_{lm}\, \omega_l(x_1)\, \omega_m(x_2)\, \omega_l(\xi_1)\, \omega_m(\xi_2);$$

$$G_{lm} = \frac{16\alpha_1^3 \alpha_2^3}{\pi^4 (l^2\alpha_2^2 + m^2\alpha_1^2)^2 + 16\alpha_1^4 \alpha_2^4 \lambda^4};$$

$$w^0(x) = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} G(x,\ \xi) F(\xi)\, d\xi_1\, d\xi_2; \quad \frac{dS}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} = -\frac{d\xi_2}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{d\xi_1}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2}.$$

Якщо S — контур отвору в оболонці, потенціал (18) приводить до системи інтегральних рівнянь

$$w^0(x(t)) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(x(t)_1\, \xi(\tau))}{\partial \nu} \mu^1(\tau)\, d\tau - \int_0^{2\pi} G(x(t)_1\, \xi(\tau))\, \mu^2(\tau)\, d\tau;$$

$$3\mu^1(t) = 2\Delta w^0(x(t)) - 2\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Delta\, G(x(t))_1\, \xi(\tau)}{\partial \nu} \mu^1(\tau)\, d\tau + 2\int_0^{2\pi} \Delta G(x(t)_1\, \xi(\tau))\, \mu^2(\tau)\, d\tau,$$

де

$$\mu^1(\tau) = \Delta w\ (\xi(\tau));$$

$$\mu^2(\tau) = \frac{\partial \Delta w\ (\xi(\tau))}{\partial \nu} \cdot \frac{dS}{d\tau}.$$

Припустивши для спрощення наступних формул, що область Ω та навантаження Z симетричні відносно координатних осей, замість виразів (5), (6) в розглядуваному тепер випадку криволінійного контура оболонки матимемо

$$u_{jlm}^{(i)} = g_{lm}\left(\alpha_1 \alpha_2 \Phi_{jlm}^{(i)} + \sum_k P_{lmk} \delta_k \mu_{jk}^{(i)}\right); \quad (19)$$

$$w_{lm}^{(i)} = G_{lm}\left\{\alpha_1 \alpha_2 F_{lm}^{(i)} + \sum_k \delta_k (P_{lmk} \mu_k^{2(i)} - T_{lmk} \mu_k^{1(i)})\right\}, \quad (20)$$

де $\mu_{jk}^{(i)}$ та $\mu_k^{j(i)}$ визначаються системами рівнянь

$$\sum_{lmk} \frac{P_{lmn} P_{lmk}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} \mu_{1k}^{(i)} = \sum_{lm} \frac{\alpha_1 \alpha_2 P_{lmn}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} \Phi_{lm}^{(i)};$$

$$\sum_{lmk} \frac{Q_{lmn} Q_{lmk}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} \mu_{2k}^{(i)} = \sum_{lm} \frac{\alpha_1 \alpha_2 Q_{lmn}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} \Phi_{lm}^{(i)};$$

$$3\mu_n^{1(i)} + 2\sum_{lmk} G_{lm}\Delta_{lm} P_{lmn} T_{lmk}\delta_k \mu_k^{1(i)} - 2\sum_{lmk} G_{lm}\Delta_{lm} P_{lmn} P_{lmk}\delta_k \mu_k^{2(i)} =$$
$$= 2\sum_{lm} \alpha_1\alpha_2 G_{lm}\Delta_{lm} P_{lmn} F_{lm}^{(i)};$$
$$\sum_{lmk} G_{lm} P_{lmn} T_{lmk}\delta_k \mu_k^{1(i)} - \sum_{lmk} G_{lm} P_{lmn} P_{lmk}\delta_k \mu_k^{2(i)} = \sum_{lm} \alpha_1\alpha_2 G_{lm} P_{lmn} F_{lm}^{(i)}.$$

Тут

$$\Delta_{lm} = -\frac{\pi^2}{4\alpha_1^2\alpha_2^2}(l^2\alpha_2^2 + m^2\alpha_1^2);$$
$$\delta_k = \begin{cases} 2 \text{ при } k = 0; \\ 1 \text{ при } k > 0; \end{cases} \quad l, m = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

P_{lmk}, Q_{lmk} та T_{lmk} — коефіцієнти розкладів;

$$\omega_l(\xi_1(t)\,\omega_m(\xi_2(t)) = \frac{1}{\pi}\sum_k (P_{lmk}\cos kt + Q_{lmk}\sin kt);$$
$$\frac{\partial}{\partial\nu}[\omega_l(\xi_1(t))\,\omega_m(\xi_2(t))]\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\pi}\sum_k (T_{lmk}\cos kt + \overline{T}_{lmk}\sin kt).$$

Таким чином, формули (19), (20), (7), (8), (9), (10), (11), (12) та (13) становлять ітераційний алгоритм розв'язання задачі (1), (2), (15), (16). Оскільки умови (3) (4) при цьому також виконуються, можна вважати, що область Ω являє собою прямокутник з одним або кількома отворами. Випадок внутрішніх задач для областей з криволінійними контурами відрізняється від розглянутого незначно.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. П. Гавеля, В. Н. Косарчин. Упругое равновесие пологой сферической оболочки, жестко защемленной по прямоугольному контуру. Вопросы механики реального твердого тела. Изд-во «Наукова думка», К., 1964.
2. С. П. Гавеля, В. М. Косарчин. Пружна рівновага пологої сферичної оболонки, обмеженої еліпсом і прямокутником. Зб. робіт аспірантів ЛДУ, 1963.
3. Я. Б. Лопатинский. Об одном методе решения второй основной задачи теории упругости. Теор. и прикл. математика, вып. 1, 1958.
4. В. З. Власов. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.

С. П. ГАВЕЛЯ, В. Н. КОСАРЧИН

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РАСЧЕТА КОНЕЧНОДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

(резюме)

Построен алгоритм нахождения перемещений тонкой пологой оболочки с учетом нелинейных членов, происходящих только от прогибов. Эффективность алгоритма достигается посредством распространения некоторых результатов Я. Б. Лопатинского, позволяющего привести задачу к рекуррентным задачам Дирихле, решаемым с помощью интегральных уравнений.

Конкретно рассмотрен случай, когда оболочка заполняет в плоскости криволинейных координат ее срединной поверхности прямоугольник с эллиптическим отверстием. На контуре прямоугольника выполнены условия шарнирного закрепления, край отверстия защемлен. Возможны и другие варианты граничных условий и форм отверстия.

Решение представляется в двойных тригонометрических рядах.