УДК 517. 512

З. В. ЗАРИЦЬКА

ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ У ВИГЛЯДІ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ ОПЕРАТОРІВ

Питання про наближення функцій $f(x,y)$ за допомогою операторів

$$Б_{nm}(f;\ x,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}f\left(\frac{k-i}{n},\frac{i}{m}\right)C_k^i\,\frac{\partial^k\varphi_{nm}(x,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}x^{k-i}y^i \tag{1}$$

у випадку, коли $f(x,y)$ є неперервною, розглянуте В. І. Волковим [1]. Лінійні додатні оператори (1) є узагальненням на двовимірний простір лінійних додатних операторів В. А. Баскакова [2]. При цьому для системи функцій $\varphi_{nm}(x,y)$ виконуються умови:

1) функції $\varphi_{nm}(x,y)$ аналітичні в замкненому прямокутнику $[0\leqslant x\leqslant 2;\ 0\leqslant y\leqslant 2]$;

2) $\varphi_{nm}(0,\ 0)=1$;

$$3)\quad \frac{\partial^k\varphi_{nm}(x,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}=-n\left[\frac{\partial^{k-1}\varphi_{n_1m}(x,y)}{\partial x^{k-1-i}\partial y^i}+\alpha_{nk}(x,y)\right]=$$

$$=-m\left[\frac{\partial^{k-1}\varphi_{nm_1}(x,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^{i-1}}+\beta_{mk}(x,y)\right];$$

$$|\alpha_{nk}(x,y)|\leqslant\alpha_n,\ \alpha_n\to 0,\ |\beta_{mk}(x,y)|\leqslant\beta_m,\ \beta_m\to 0;$$

$$4)\quad \frac{n_1}{n}\to 1,\ n\to\infty;\ \frac{m_1}{m}\to 1,\ m\to\infty;$$

$$5)\ (-1)^k\ \frac{\partial^k\varphi_{nm}(x,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\geqslant 0$$

для всіх k та i, що задовольняють нерівності $0\leqslant i\leqslant k$.

Розглядаючи оператори

$$A_{nm}(f;\ x,\ y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^k\varphi_{nm}(x,y)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\times$$

$$\times x^{k-i}y^i\left(nm\int\limits_{\frac{k-i}{n}-\frac{1}{2n}}^{\frac{k-i}{n}+\frac{1}{2n}}dt\int\limits_{\frac{i}{m}-\frac{1}{2m}}^{\frac{i}{m}+\frac{1}{2m}}f(t,\ v)\,dv\right), \tag{2}$$

одержані з (1) за схемою Л. В. Канторовича [3], доведемо, що послідовність (2) збігається до $f(x,y)$ у кожній точці Лебега функції $f(x,y)$.

Означення. Точку (x,y) назвемо точкою Лебега функції $f(x,y)$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що при $0<h<\delta$, $0<k<\delta$ буде виконуватися нерівність

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dt \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} |f(t+x, v+y)-f(x,y)|\, dv < \varepsilon hk.$$

Теорема. *Якщо функція $f(x,y)$ вимірна і обмежена на $[0,1;\ 0,1]$, а на весь перший квадрант продовжена так, що залишається всюди обмеженою і вимірною в кожному квадраті, то для послідовності операторів (2), у кожній точці Лебега функції $f(x,y)$ з квадрату* $[0,1;\ 0,1]$ *має місце рівність*

$$\lim_{(n,\,m)_k\to\infty} A_{nm}(f;\ x,\ y) = f(x,\ y)$$

(символ $(n,m)_k$ означає пару (n,m), що задовольняє умову $\frac{1}{k}\leqslant\frac{m}{n}\leqslant k$, k — дане додатне число, більше від 1).

Доведення. Оскільки функція $f(x,y)$ обмежена, то існує таке $M>0$, що в усьому першому квадранті $|f(x,y)|\leqslant M$.

Нехай (x_0, y_0) є $[0,1;\ 0,1]$ — точка Лебега функції $f(x,y)$. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ можна знайти $\delta>0$ таке, що як тільки $\frac{1}{n}\leqslant\delta$, $\frac{1}{m}<\delta$, то

$$\int_{\frac{k-i}{n}-\frac{1}{2n}}^{\frac{k-1}{n}+\frac{1}{2n}} dt \int_{\frac{i}{m}-\frac{1}{2m}}^{\frac{i}{m}+\frac{1}{2m}} |f(t,\ v)-f(x_0, y_0)|\, dv < \frac{\varepsilon}{4}\cdot\frac{1}{nm}, \tag{3}$$

де $|t-x_0|\leqslant\delta$, $|v-y_0|\leqslant\delta$.

Оцінимо різницю

$$|A_{nm}(f;\ x_0,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)| < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=0}^{k} C_k^i\,\frac{\partial^k\varphi_{nm}(x_0,\ y_0)}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i}\times$$

$$\times\, x_0^{k-i}y_0^i\cdot mn\int_{\frac{k-i}{n}-\frac{1}{2n}}^{\frac{k-i}{n}+\frac{1}{2n}} dt\int_{\frac{i}{m}-\frac{1}{2m}}^{\frac{i}{m}+\frac{1}{2m}} |f(t,\ v)-f(x_0,\ y_0)|\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\left|\frac{k-i}{n}-x_0\right|\leqslant\frac{\delta}{2}\\ \left|\frac{i}{m}-y_0\right|\leqslant\frac{\delta}{2}}}^{1} + \sum_{\substack{\left|\frac{k-i}{n}-x_0\right|>\frac{\delta}{2}\\ \left|\frac{i}{m}-y_0\right|>\frac{\delta}{2}}}^{2} + \sum_{\substack{\left|\frac{k-i}{n}-x_0\right|\leqslant\frac{\delta}{2}\\ \left|\frac{i}{m}-y_0\right|>\frac{\delta}{2}}}^{3} + \sum_{\substack{\left|\frac{k-i}{n}-x_0\right|>\frac{\delta}{2}\\ \left|\frac{i}{m}-y_0\right|<\frac{\delta}{2}}}^{4} \tag{4}$$

Внаслідок (3) і умови (2) маємо:

$$\sum^{1} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x_0^{k-i} y_0^i = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Оскільки у першому квадранті $f(x, y)$ обмежена, то

$$\sum^{2} \leqslant 2M \sum_{\substack{\left|\frac{k-1}{n} - x_0\right| > \frac{\delta}{2} \\ \left|\frac{i}{m} - y_0\right| > \frac{\delta}{2}}} \sum \frac{(-1)^k}{k!} C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x_0^{k-i} y_0^i <$$

$$< \frac{8M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \cdot x_0^{k-i} y_0^i \left(\frac{k-i}{n} - x_0\right)^2.$$

З [1] випливає, що

$$\lim_{(n, m)_k \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{k-i}{n} - x_0\right)^2 C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x_0^{k-i} y_0^i = 0.$$

Отже, при досить великих n і m, де $\frac{1}{k} \leqslant \frac{m}{w} \leqslant k$, $\sum^{2} < \frac{\varepsilon}{4}$. Аналогічно можна довести, що також $\sum^{3} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, $\sum^{4} < \frac{\varepsilon}{4}$, починаючи з деякого N.

З оцінок $\sum^{1}$, $\sum^{2}$, $\sum^{3}$, $\sum^{4}$ та (4) дістаємо, що при $n > N(\varepsilon)$ і $m > N(\varepsilon)$, $\frac{1}{k} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant k$ має місце нерівність

$$|A_{nm}(f;\, x_0,\, y_0) - f(x_0,\, y_0)| < \varepsilon,$$

і теорема доведена.

Зауважимо, що при $\varphi_{nm}(x, y) = (1-x)^n (1-y)^m$ одержується оператор (3) з [4] і теорема 1 І. А. Кіпріянова.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. И. Волков. О сходимости последовательностей линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций 2-х переменных. ДАН СССР, т. 115, № 1, 1957.

2. В. А. Баскаков. Пример последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. ДАН СССР, т. 113, № 2, 1957.

3. Л. В. Канторович. О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна І. ДАН СССР, № 21, стр. 563, 1930.

4. І. А. Киприянов. О полиномах формы С. Н. Бернштейна для функций 2-х переменных. Уч. зап. Казан. ун-та им. Ленина, т. 113, кн. 10, 1953.

5. Э. Н. Морозов. Представление некоторых функций в виде предела последовательности операторов. Уч. зап. Калуж. пед. ин-та, вып. XII, физ.-мат. науки. Калуга, 1963.

З. В. ЗАРИЦКАЯ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВИДЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ

(р е з ю м е)

Доказывается теорема о сходимости к $f(x, y)$ операторов (2) во всех точках Лебега функции $f(x, y)$.