ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 517.934

Т. О. МЕЛЬНИК

ПРО ОДНУ СКЛАДОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ І ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

Раніше було розглянуто задачу про «склеювання» розв'язків двовимірних гіперболічних і параболічних рівнянь другого порядку, кожне з яких задане на x-півосі [1]. В даній замітці застосована раніше методика поширюється на рівняння довільного парного порядку.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай P — прямокутник на площині (x, t), обмежений прямими $x=x_1$, $x=x_3$, $t=0$, $t=T$. Розіб'ємо цей прямокутник прямою $x=x_2$, $(x_1<x_2<x_3)$ на дві частини P_1 і P_2. В P_1 розглянемо параболічне рівняння

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+(-1)^m\sum_{i=0}^{2m} a_i^1(x, t)\frac{\partial^i u_1}{\partial x^i}=f_1(x, t), \tag{1}$$

а в P_2 — гіперболічне рівняння

$$\sum_{i=0}^{2m}\sum_{j=0}^{i} a_{ij}^2(x, t)\frac{\partial^i u_2}{\partial t^{i-j}\,\partial x^j}=f_2(x, t)\,(\alpha_{2m,0}(x, t)\equiv 1). \tag{2}$$

Тут $a_{2m}^1(x, t)>0$ при всіх $(x, t)\in\overline{P_1}$,

$$\sum_{j=0}^{2m} a_{2m,j}^2(x, t)\,\lambda^{2m-j}=\prod_{j=1}^{2m}(\lambda-\lambda_j(x, t)),$$

де функції $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}$ — дійсні і різні при всіх $(x, t)\in\overline{P_2}$. Нехай в усіх точках $(x, t)\in\overline{P_2}$

$$\lambda_1<\cdots<\lambda_m<0<\lambda_{m+1}<\cdots<\lambda_{2m}.$$

Коефіцієнти і вільний член рівняння (1) вважаються рівномірно неперервно диференційованими в P_1 не менше від $2m+1$ разів; те ж саме припускається про коефіцієнти і вільні члени рівняння (2) в P_2.

Для рівнянь (1), (2) задаються початкові умови

$$u_1|_{t=0}=g_0(x)\ \ (x_1\leqslant x\leqslant x_2); \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial t^i}\right|_{t=0} = g_{i+1}(x) \ (0 \leqslant i \leqslant 2m-1; \ x_2 \leqslant x \leqslant x_3); \tag{4}$$

граничні умови

$$\sum_{i=0}^{p_r} \alpha_i^r(t) \frac{\partial^i u_1(x_1, t)}{\partial x^i} = h_r^1(t); \quad (1 \leqslant r \leqslant m; \ 0 \leqslant t \leqslant T) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{q_r} \sum_{j=0}^{i} \beta_{ij}^r(t) \frac{\partial^i u_2(x_3, t)}{\partial t^{i-j} \partial x^j} = h_r^2(t) \tag{6}$$

і умови спряження на лінії розділу $x = x_2$:

$$k_r^1(t) \frac{\partial^r u_1(x_2, t)}{\partial x^r} = k_r^2(t) \frac{\partial^r u_2(x_2, t)}{\partial x^r} + H_r(t) (0 \leqslant r \leqslant 2m-1; \ 0 \leqslant t \leqslant T). \tag{7}$$

Початкові функції (3), (4), коефіцієнти і вільні члени граничних умов (5), (6) і умов спряження (7) вважаються заданими, достатню кількість разів неперервно диференційованими функціями,
p_r і q_r $(1 \leqslant r \leqslant m)$ — цілі числа, що задовольняють умови

$$0 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_m \leqslant 2m-1; \ 0 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_m < 2m-1.$$

Припускається, що умови (3) — (7) узгоджені в точках (x_1, o), $(x_2, 0)$ і $(x_3, 0)$:

$$\sum_{i=0}^{p_r} \alpha_i^r(0) \frac{d^i g_0(x_1)}{dx^i} = h_r^1(0); \ (1 \leqslant r \leqslant m);$$

$$\sum_{i=0}^{q_r} \sum_{j=0}^{i} \beta_{ij}^r(0) \frac{d^j g_{i-j+1}(x_3)}{dx^j} = h_r^2(0);$$

$$k_s^1(0) \frac{d^s g_0(x_2)}{dx^s} = k_s^2(0) \frac{d^s g_1(x_2)}{dx^s} + H_s(0) \ (0 \leqslant s \leqslant 2m-1).$$

Крім цього, припускається, що граничні умови (5), (6) задовольняють відому умову P [2] на стороні $x = x_1$ і умову типу (4) із [3] на стороні $x = x_3$. Під $u_1(x_2 t)$ $(u_2(x_2, t))$ розуміється граничне значення функції $u_1(x, t)$ $(u_2(x, t))$ при прямуванні x до x_2 зліва (справа).
Додаткові умови на функції $k_r^1(t)$ і $k_r^2(t)$ будуть вказані нижче.

2. ДВІ ДОПОМІЖНІ ЗАДАЧІ

Задача І. В P_1 потрібно знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняв би початкову умову (3), граничні умови (5) і граничні умови на лінії $x = x_2$:

$$\frac{\partial^r u_1(x_2, t)}{\partial x^r} = \psi_r(t) \ (m \leqslant r \leqslant 2m-1; \ 0 \leqslant t \leqslant T). \tag{8}$$

Тут $\psi_r(t)$ — довільно задані досить гладкі функції. Розв'язок цієї задачі можна записати у вигляді [2]

$$u_1(x, t) = \sum_{r=m}^{2m-1} \int_0^t G_r(x, t, \tau)\psi_r(\tau)\,d\tau + U_1(x, t), \tag{9}$$

де $U_1(x, t)$ — відомий розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови (3), (5) і однорідні (нульові) умови (8);

$G_r(x, t, \tau)$ $(m \leqslant r \leqslant 2m-1)$ — відомі ядра [2].

Задача II. В P_2 треба знайти розв'язок рівняння (2), який задовольняв би початкові умови (4), граничні умови (6) і граничні умови на стороні $x = x_2$:

$$\frac{\partial^r u_2(x_2, t)}{\partial x^r} = \chi_r(t) \ (m \leqslant r \leqslant 2m-1;\ 0 \leqslant t \leqslant T). \tag{10}$$

Тут $\chi_m(t), \dots, \chi_{2m-1}(t)$ — задані довільні досить гладкі функції.

Через $x = \varphi_i(t; \xi, \tau)$ позначимо розв'язок рівняння характеристик

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_i(x, t) \ (1 \leqslant i \leqslant 2m),$$

який проходить через довільну точку $(\xi, \tau) \in \overline{P}_2$. Число T припускається настільки малим, що характеристики $x = \varphi_1(t; x_2, 0)$ і $x = \varphi_{2m}(t; x_3, 0)$ ніде в $\overline{P}_2$ не перетинаються.

Нас цікавитиме залежність розв'язку задачі II від функцій $\chi_r(t)$. Очевидно, що ці функції на розв'язок $u_2(x, t)$ впливають лише в області

$$P_3\{x_2 \leqslant x \leqslant \varphi_1(t\ x_2, 0);\ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

В області ж $P_2 \diagdown P_3$ розв'язок задачі однозначно визначається граничними умовами (6) і початковими умовами (4). Через те ми розв'язок в $P_2 \diagdown P_3$ не братимемо до уваги.

Відомо [4], що рівняння (2) зводиться до еквівалентної системи першого порядку відносно невідомих функцій $v_0 = u_2$, $v_1, \dots, v_{2m}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_i}{\partial t} - \lambda_{i+1}(x, t)\frac{\partial v_i}{\partial x} = v_{i+1} + \sum_{j=0}^{i} b_{ij}(x, t)\,v_j \ (0 \leqslant i \leqslant 2m-2); \\ &\frac{\partial v_{2m-1}}{\partial t} - \lambda_{2m}(x, t)\frac{\partial v_{2m-1}}{\partial x} = \sum_{j=0}^{2m-1} b_{2m-1, j}(x, t)\,v_j + f_2(x, t). \end{aligned} \tag{11}$$

Початкові умови (4) визначають відповідні початкові умови для нових невідомих функцій

$$v_i(x, 0) = \omega_i(x) \ (0 \leqslant i \leqslant 2m-1;\ \omega_0(x) \equiv g_1(x)).$$

Через $t_{ii}(\xi, \tau)$ позначимо ординату точки перетину характеристики $x = \varphi(t; \xi, \tau)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ з прямою $x = x_2$. Очевидно, що $t_i(x_2, \tau)_i \equiv \tau$.

Введемо нові невідомі функції

$$\nu_r(t) = \frac{\partial^r u(x_2, t)}{\partial x^r} \ (0 \leqslant r \leqslant m-1).$$

Тоді, розглянувши при $x=x_2$ ті із рівнянь (11), які відповідають значенням індексів $i=m,\ m+1,\ \ldots,\ 2m-1$, приходимо до такої лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $\nu_r(t)$:

$$\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\varepsilon^s_{2m-k-s}(t)\,\nu_s^{(2m-k-1)}(t)=\psi_k(t;\ \nu_1,\ \ldots,\ \nu_{m-1})+I_k(t;\ v_0,\ldots,v_{2m-1})$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^{m+s-1}\varepsilon^{m+s}_{2m-k-s-1}(t)\,\chi_{m+s}^{(m-k-1)}(t)\ (0\leqslant k\leqslant m-1). \qquad (12)$$

Тут наведені позначення:

$\varepsilon_i^j(t)$ — сума всіх різних добутків по j штук з i величин $\lambda_1(x_2,t)$, $\ldots,\lambda_i(x_2,t)$] при цьому $\varepsilon_i^j(t)$ (t) приймається рівним нулю при $j>i$.

$\psi_k(t;\ \nu_1,\ \ldots,\ \nu_{m-1})$ є лінійна комбінація з відомими коефіцієнтами функцій $\nu_s^r(t)\,(1\leqslant s\leqslant m-1;\ 0\leqslant r\leqslant 2m-s-2)$;

$J_k(t;\ v_0,\ \ldots,\ v_{2m-1})$ — лінійний інтегральний оператор типу Вольтера, застосований до функцій $v_0,\ \ldots,\ v_{2m-1}$.

Для системи (12) маємо очевидні початкові умови:

$$\nu_s^{(r)}(0)=g_1^{(s+r)}(x_2)(0\leqslant s\leqslant m-1;\ 0\leqslant r\leqslant 2m-s-2). \qquad (13)$$

Розв'язуючи задачу (12), (13), одержуємо

$$\nu_s(t)=\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{m+k-s-1}}{(m+k-s-1)!}\rho_{ks}(\tau)\,\chi_{m+k}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{m-s+k-1}}{(m-s+k-1)!}\varphi_{ks}(\tau)\,I_{m+k}(\tau;\ v_0,\ \ldots,\ v_{m-1})\,d\tau+\zeta_s(t), \qquad (14)$$

де $\rho_{ks}(t)$, $\varphi_{ks}(t)$, $\zeta_s(t)$ — відомі функції, які очевидним чином виражаються через дані вихідної задачі.

Далі відзначимо, що вирази (14) дають нам значення функцій $v_0,\ \ldots,\ v_{m-1}$ на лінії $x=x_2$ (ці дані, очевидно, виражаються через відомі функції і через інтеграли від 0 до t від всіх невідомих $v_0,\ \ldots,$ v_{2m-1}). В свою чергу, величини $v_0(x_2\,t),\ \ldots,\ v_{m-1}(x_2,t)$ дають можливість звести задачу II шляхом інтегрування системи (11) вздовж характеристик до системи інтегральних рівнянь Вольтера, яка розв'язується методом послідовних наближень.

3. ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ (1)—(7) ДО СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРА

Попереду зазначимо, що задача (1)—(7) буде розв'язана, якщо будуть визначені функції $\nu_0(t),\ \ldots,\ \nu_{m-1}(t)$, тому що в цьому випадку вона розпадається на дві окремі змішані задачі: одна для рівняння (1) в P_1, друга для рівняння (2) в P_2. Враховуючи це, робимо так: Функцію $u_1(x,t)$ при $(x,t)\in P_1$ шукаємо у вигляді

$$u_1(x,t)=\sum_{r=m}^{2m-1}\int_0^t G_r(x,t,\tau)\,\mu_r(\tau)\,d\tau+U_1(x,t), \qquad (15)$$

де $\mu_m(t), \ldots, \mu_{2m-1}(t)$ поки що довільні функції. Функцію $u_2(x,t)$ при $(x, t) \in P_2$ будемо визначати з системи (11) в області $P_m: \{x_2 \leqslant x \leqslant \varphi_m(t; x_2, 0); 0 \leqslant t \leqslant T\}$, прийнявши за граничні значення на лінії $x = x_2$ для функцій $u_2 = v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$ ті значення, які є наслідком виразів (див. (14)):

$$\frac{\partial^s u_2(x_2, t)}{\partial x_s} = \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m+k-s-1}}{(m+k-s-1)!} \varphi_{ks}(\tau) \mu_k(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-\tau)^{m+k-s-1}}{(m+k-s-1)!} \varphi_{ks}(\tau) I_{m+k}(\tau; v_0, \ldots, v_{m-1}) d\tau + \zeta_s(t), \qquad (16)$$

де $\mu_0(t), \ldots, \mu_{m-1}(t)$ також поки що довільні функції.

Будемо тепер невідомі функції $\mu_0(t), \ldots, \mu_{2m-1}(t)$ підбирати так, щоб задовольнити умови (7). Згідно з побудовою розв'язків задач I і II, при підстановці $u_1(x,t)$ у вигляді (15) і $u_2(x,t)$, вираженого через величини (16), в останні m штук рівностей (7) отримуємо

$$k_r^1(t) \mu_{r-m}(t) = k_r^2(t) \mu_r(t) + H_r(t) \quad (m \leqslant r \leqslant 2m-1).$$

Звідси

$$\mu_r(t) = \frac{k_r^1(t)}{k_r^2(t)} \mu_{r-m}(t) + \frac{H_r(t)}{k_r^2(t)} = \omega_r(t) \mu_{r-m}(t) + \delta_r(t) \quad (m \leqslant r \leqslant 2m-1). \qquad (17)$$

При цьому, природньо, припускається, що $k_m^2(t), \ldots, k_{2m-1}^2(t) \neq 0$ при всіх $t \in [0, T]$. Так само перші m рівностей (7) дають

$$\sum_{s=m}^{2m-1} \int_0^t k_r^2(t) \frac{\partial^r G_s(x, t, \tau)}{\partial x^r}\bigg|_{x=x_2} \cdot \mu_s(\tau) d\tau + H_r(t) + \frac{\partial^r U_1(x, t)}{\partial x^r}\bigg|_{x=x_2} =$$

$$= \sum_{s=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m+s-r-1}}{(m+s-r-1)!} k_r^1(t) \rho_{sz}(\tau) \mu_s(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m+s-r-1}}{(m+s-r-1)!} k_r^1(t) \varphi_{sr}(\tau) I_{m+s}(\tau, v_0, \ldots, v_{m-1}) d\tau +$$

$$+ k_r^1(t) \zeta_r(t) \quad (0 \leqslant r \leqslant m-1).$$

Підставляючи сюди замість $\mu_m, \ldots, \mu_{2m-1}$ їхні вирази (17) і вводячи очевидні перепозначення, отримуємо

$$\sum_{s=0}^{m-1} \int_0^t G_r^{(s)}(t, \tau) \mu_s(\tau) d\tau = \sum_{s=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m+s-r-1}}{(m+s-r-1)!} \rho^{(s)}(t, \tau) \mu_s(\tau) d\tau +$$

$$+ I^{(r)}(t; v_0, \ldots, v_{m-1}) \quad (0 \leqslant r \leqslant m-1). \qquad (18)$$

Якщо тимчасово вважати члени $I^{(r)}(t, v_0, \ldots, v_{m-1})$ відомими, то (18) являє собою систему інтегральних рівнянь Вольтера першого роду відносно функцій $\mu_0, \ldots, \mu_{m-1}$.

Враховуючи відомі властивості ядер $G_r^s(t, \tau)$, ми цю систему відразу можемо звести до системи інтегральних рівнянь Вольтера другого роду [2, стор. 411—413]. Якщо до одержаної системи другого роду приєднати ще m штук рівнянь для функцій $v_0, \ldots, v_{m-1}$, які одержуються з (11) шляхом інтегрування вздовж характеристик при $(x, t) \in P_m$ з врахуванням (16), то ми приходимо до системи $2m$ інтегральних рівнянь Вольтера другого роду відносно невідомих $\mu_0, \ldots, \mu_{m-1}, v_0, \ldots, v_{m-1}$, яка розв'язується методом послідовних наближень.

Таким чином, можна вважати $\mu_0, \ldots, \mu_{m-1}$ визначеними і, значить, згідно з зауваженням, зробленим раніше, можна вважати вихідну задачу розв'язаною.

ЛІТЕРАТУРА

1. Т. О. Мельник. Про «склеювання» розв'язків гіперболічних і параболічних рівнянь. Вісник ЛДУ, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.
2. С. Д. Эйдельман. Параболические системы. Изд-во «Наука», М., 1964.
3. З. О. Мельник. Об одной общей смешанной задаче. ДАН СССР, т. 157. 5, 1964.
4. Р. Курант. Уравнения с частными производными. Изд-во «Мир», М., 1964.

Т. Е. МЕЛЬНИК

ОБ ОДНОЙ СОСТАВНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

(резюме)

Рассматривается задача о «склеивании» решений гиперболических и параболических уравнений произвольного четного порядка.