ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 Серія механіко-математична Випуск 3

УДК 517. 512

Г. П. ГУБАНСВ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА ЗАЛИШКУ ПРИ НАБЛИЖЕННІ НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ТИПУ БЕРНШТЕЙНА

1. Нехай $KH^{(\alpha)}$ позначає клас функцій періоду 2π, що задовольняють умову Ліпшиця степеня α, $0<\alpha\leqslant 1$, з константою K.

М. П. Корнійчук [1—2] одержав асимптотичний вираз верхньої межі абсолютних величин відхилень функцій від інтерполяційних сум Бернштейна, поширеної на клас $KH^{(\alpha)}$. Застосовуючи в основному метод М. П. Корнійчука, ми одержуємо асимптотично точну оцінку величини верхньої межі у випадку наближення тригонометричними сумами типу Бернштейна:

$$B_{T_n}(f;x)=\frac{1}{2}\left\{T_n\left(f;x-\frac{\pi}{2n}\right)+T_n\left(f;x-\frac{\pi}{2n}\right)\right\},$$

де

$$T_n(f;x)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}f(x_k)\frac{\sin\frac{2n-1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_k)}-$$

тригонометричні поліноми порядку $(n-1)$, найкращі в заданій системі рівновіддалених точок $x_k=\frac{k\pi}{n}$ $(k=1,2,\ldots,2n)$.

Підставляючи значення $T_n(f;x)$, одержимо для $B_{T_n}(f;x)$ формулу

$$B_{T_n}(f;x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f(x_k)K_{T_n}(x-x_k),$$

де

$$K_{T_n}(x-x_k)=\frac{(-1)^{k+1}}{4}\cos nx\left\{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(x-\frac{2k-1}{2n}\pi\right)}-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(x-\frac{2k+1}{2n}\pi\right)}\right\}$$

Позначимо

$$E(B_{T_n};KH^{(\alpha)};x)=\sup_{f\in KH^{(\alpha)}}|f(x)-B_{T_n}(f;x)|.$$

Неважко перевірити, що $E(B_{T_n}; KH^{(\alpha)}; x)$ є періодична з періодом $h=\frac{\pi}{n}$ функція. Тому при її вивченні можна вважати, що $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2n}$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Для всіх* $0<\alpha\leqslant 1$ *рівномірно відносно* x *має місце асимптотична рівність* $(K=1)$

$$E(B_{T_n}; H^{(\alpha)}; x)=\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}\left\{(1-u)^{\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cos\pi u\left[\frac{2}{1-4u^2}(1+u^{\alpha}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1+u)^{\alpha}-2(1-u)^{\alpha})+((1+u)^{\alpha}-(1-u)^{\alpha})\int_0^1\frac{t^{u+\frac{1}{2}}}{1+t}\,dt\right]\right\}+0(n^{-1-\alpha}),$$

де $u=\frac{x}{h}$, $h=\frac{\pi}{n}$.

Відзначимо окремі випадки:

$$E(B_{T_n}; H^{(1)}; x)=\frac{\pi}{2n}+x\left\{1-\frac{2}{\pi}\cos nx\left[\frac{2h}{h^2-4x^2}-\int_0^1\frac{t^{\frac{1}{2}-\frac{x}{h}}}{1+t}dt\right]\right\}+0(n^{-2});$$

$$E(B_{T_n}; H^{(\alpha)}; 0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}+0(n^{-1-\alpha});$$

$$E\left(B_{T_n}; H^{(\alpha)}; \frac{1}{2}h\right)=\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha}+0(n^{-1-\alpha}).$$

2. Через $\widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}$ позначимо клас неперервних 2π-періодичних відносно x,y функцій, які задовольняють такі умови:

$$|f(x_1; y_1)-f(x_2; y_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^{\alpha}+N|y_1-y_2|^{\beta};$$

$$|f(x_1; y_1)-f(x_1; y_2)-f(x_2; y_1)+f(x_2; y_2)|\leqslant C|x_1-x_2|^{\alpha}|y_1-y_2|^{\beta}.$$

В роботі [3] була одержана асимптотична оцінка величин

$$E(B_{m,n}; \widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}; x, y)=\sup_{f\in\widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}}|f(x,y)-B_{m,n}(f; x,y)|\quad(0<\alpha,\beta\leqslant 1),$$

де $B_{m,n}\ (f; x, y)$ — інтерполяційна сума Бернштейна порядку m по x і порядку n по y.

Користуючись методом доведення роботи [3], одержимо аналогічний вираз верхньої межі $E(B_{T_{m,n}}; \widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}; x, y)$ при наближенні тригонометричними сумами типу Бернштейна:

$$B_{T_{m,n}}(f; x, y)=\frac{1}{4}\{T_{m,n}(f; x+p; y+g)+T_{m,n}(f; x-p; y+p)+$$

$$+T_{m,n}(f; x+p; y-g)+T_{m,n}(f; x-p; y-g)\},$$

де

$$T_{m,n}(f; x, y)=\frac{1}{4mn}\sum_{k=1}^{2m}\sum_{l=1}^{2n}f(x_k; y_l)\frac{\sin\frac{2m-1}{2}(x-x_k)\sin\frac{2n-1}{2}(y-y_l)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_k)\sin\frac{1}{2}(y-y_l)},$$

$$p=\frac{\pi}{2m}, \quad g=\frac{\pi}{2n}$$

тригонометричні поліноми порядку $(m-1)$ по x і $(n-1)$ по y, найкращі в заданій системі рівновіддалених точок (x_k, y_l) $x_k = kh$, $h = \frac{\pi}{m}$, $k=1, 2, \ldots, 2m$; $y_l = lg$, $g=\frac{\pi}{n}$, $l=1, 2, \ldots, 2n$. Суму $B_{T_{n,m}}(f; x, y)$ можна записати у вигляді

$$B_{T_{m,n}}(f; x, y)=\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{2m}\sum_{l=1}^{2n} f(x_k, y_l) K_{T_m}(x-x_k) K_{T_n}(y-y_l).$$

Позначимо

$$E(B_{T_{m,n}};\ \widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}; x, y) = \sup_{f\in \widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}} |f(x, y) - B_{T_{m,n}}(f; x, y)|.$$

Має місце така теорема.

Теорема 2. *Для всіх* $0<\alpha, \beta\leqslant 1$ *рівномірно відносно* x,y *справедлива асимптотична рівність*

$$E(B_{T_{m,n}};\ \widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}; x, y)=\left(\frac{\pi}{m}\right)^{\alpha} A_1(\alpha; u)+\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\beta} A_2(\beta; v)+0(m^{-1-\alpha})+$$
$$+0(n^{-1-\beta})+0(m^{-\alpha}n^{-\beta}),$$

де

$$A_1(\alpha; u)=(1-u)^{\alpha}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cos\pi u\left\{\frac{2}{1-4u^2}[1+u^{\alpha}+(1+u)^{\alpha}-2(1-u)^{\alpha}]+\right.$$
$$\left.+[(1+u)^{\alpha}-(1-u)^{\alpha}]\int_0^1 \frac{t^{u+\frac{1}{2}}}{1+t}\,dt\right\};$$

$$A_2(\beta; v)=(1-v)^{\beta}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cos\pi v\left\{\frac{2}{1-4v^2}[1+v^{\beta}+(1+v)^{\beta}-2(1-v)^{\beta}]+\right.$$
$$\left.+[(1+v)^{\beta}-(1-v)^{\beta}]\int_0^1 \frac{z^{v+\frac{1}{2}}}{1+z}\,dz\right\};$$

$$u=\frac{x}{h}, \quad h=\frac{\pi}{m}; \quad v=\frac{y}{g}, \quad g=\frac{\pi}{n}$$

Відзначимо, нарешті, такі випадки:

$$E(B_{T_{m,n}};\ \widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}; 0, 0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{m}\right)^{\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\beta}+0(m^{-1-\alpha})+$$
$$+0(n^{-1-\beta})+0(m^{-\alpha}n^{-\beta});$$

$$E\left(B_{T_{m,n}};\ \widetilde{H}^{(\alpha,\beta)}; \frac{1}{2}h, \frac{1}{2}g\right)=\left(\frac{\pi}{2m}\right)^{\alpha}+\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\beta}+O(m^{-1-\alpha})+$$
$$+O(n^{-1-\beta})+O(m^{-\alpha}n^{-\beta});$$

$$E(B_{T_{m,n}}; \widetilde{H}^{(1,1)}; x, y) = \frac{\pi}{2m} + x\left\{1 - \frac{2}{\pi}\cos mx\left(\frac{2h}{h^2 - 4x^2} - \int\limits_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2} - \frac{x}{h}}}{1+t}\, dt\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\pi}{2n} + y\left\{1 - \frac{2}{\pi}\cos ny\left(\frac{2g}{g^2 - 4y^2} - \int\limits_0^1 \frac{z^{\frac{1}{2} - \frac{y}{g}}}{1+z}\, dz\right)\right\} + O(m^{-2}) +$$

$$+ O(n^{-2}) + O(m^{-1}n^{-1}).$$

При доведенні теорем ми спираємося на результати [1, 2, 3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. П. Корнейчук. Асимптотическая оценка остатка при приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, интерполяционными суммами Бернштейна. Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки, № 1, 1959.
2. Н. П. Корнейчук. Некоторые вопросы приближения периодических функций тригонометрическими многочленами. Канд. диссертация. Днепропетровск, 1959.
3. Г. П. Губанов. Асимптотическая оценка остатка при приближении периодических функций двух переменных суммами Бернштейна—Рогозинского. Научн. зап. Днепропетр. гос. ун-та, т. 77, вып. 9, 1962.

Г. П. ГУБАНОВ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ОСТАТКА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ТИПА БЕРНШТЕЙНА

(резюме)

Устанавливается асимптотическая оценка верхней грани при приближении непрерывных периодических функций класса $KH^{(\alpha)}$ суммами типа Бернштейна, построенными на базе полиномов, наилучших в системе нулей функции $\sin nx$. Полученная оценка переносится на двумерный случай.