ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 539.311

Е. І. ЛУНЬ

СПРОЩЕННЯ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИПУ ТИМОШЕНКА

Розглядаються деякі спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка, які подані в [3, 6, 8, 9]. Враховуються припущення, які, як показано в [1, 2, 5], припустимі при розрахунках оболонок нульової гауссової кривини, оболонок, в яких пружний стан досить швидко змінюється в напрямі хоча би однієї з координатних ліній, та пологих оболонок. Виходимо з рівнянь, поданих в [3] та [9].

В перших двох рівняннях рівноваги нехтуємо зусиллями N_1 і N_2, а у виразах для компонентів деформації $e_{\alpha n}$, $e_{\beta n}$ нехтуємо членами $\frac{u}{R_1}$ та $\frac{v}{R_2}$. Співвідношення пружності беремо у вигляді (14) роботи [9]. При наступних перетвореннях в рівняннях рівноваги та в рівняннях нерозривності деформацій нехтуватимемо членами, в які входять молодші похідні функції напружень та які мають множниками гауссову кривину середньої поверхні. При цьому:

1. Якщо тангенціальні компоненти зовнішнього навантаження відсутні

$$q_\alpha = q_\beta = 0, \tag{1}$$

то, як показано в [1], перші два рівняння рівноваги задовольняються введенням залежностей

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{A^2 B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}; \\ T_2 &= \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}; \\ S &= -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

де $\varphi=\varphi(\alpha, \beta)$ — функція напружень. Використовуючи (2), $(1_{[9]})$ * та $(14_{[9]})$, останні три рівняння рівноваги запишемо у вигляді

$$-\Delta w - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B\gamma_3}{\partial\alpha} + \frac{\partial A\gamma_4}{\partial\beta}\right) + \frac{1+\nu}{Eh}\Delta_k\varphi = \frac{1+\nu}{Eh}q_n;$$

* В квадратних дужках вказано номер роботи, з якої береться формула.

$$(1-\nu)\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B\gamma_4}{\partial\alpha}-\frac{\partial A\gamma_3}{\partial\beta}\right)\right]-\frac{3}{h^2}\left(A\gamma_4+\frac{A}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B\gamma_3}{\partial\alpha}+\frac{\partial A\gamma_4}{\partial\beta}\right)\right]=0; \tag{3}$$

$$(1-\nu)\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A\gamma_3}{\partial\beta}-\frac{\partial B\gamma_4}{\partial\alpha}\right)\right]-\frac{3}{h^2}\left(B\gamma_3+\frac{B}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\right\}+$$

$$+2\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A\gamma_4}{\partial\beta}+\frac{\partial B\gamma_3}{\partial\alpha}\right)\right]=0,$$

де

$$\Delta=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right];$$

$$\Delta_k=\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R_2}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{R_1}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right].$$

Виключивши з рівнянь (3) вираз $\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B\gamma_3}{\partial\alpha}+\frac{\partial A\gamma_4}{\partial\beta}\right)$, одержимо одне з рівнянь ключової системи

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta\Delta w-\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta\Delta_k\varphi+\Delta_k\varphi=q_n-\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta q_n. \tag{4}$$

Друге основне рівняння одержується з першого рівняння формул ($6_{[9]}$) нерозривності деформацій при врахуванні ($14_{[9]}$), ($1_{[9]}$), (2) та співвідношень Гаусса—Кодацці і має вигляд

$$\Delta\Delta\varphi-2Eh\Delta_k w=0. \tag{5}$$

Крім того, з останніх двох рівнянь системи (3) одержується, що кути повороту нормалі визначаються формулами

$$\gamma_3=-\frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[w+\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta w-\frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)}(\Delta_k\varphi-q_n)\right],$$

$$\gamma_4=\frac{1}{A}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[w+\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta w-\frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)}(\Delta_k\varphi-q_n)\right], \tag{6}$$

де $\psi=\psi(\alpha,\beta)$ є загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\Delta\psi-\frac{3}{h^2}\psi=0. \tag{7}$$

Рівняння (4), (5) і (7) становлять ключову систему рівнянь*

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta\Delta w-\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta\Delta_k\varphi+\Delta_k\varphi=q_n-\frac{3h^2}{3(1-\nu)}\Delta q_n,$$

$$\Delta\Delta\varphi-2Eh\Delta_k w=0; \tag{8}$$

$$\Delta\psi-\frac{3}{h^2}\psi=0.$$

---

* Повідомлено на науковій конференції ЛДУ ім. Ів. Франка в жовтні 1964 р.

2. Якщо коефіцієнти першої квадратної форми задовольняють умову

$$\frac{\partial A}{\partial \beta}=\frac{\partial B}{\partial \alpha}=0, \tag{9}$$

то перші два рівняння рівноваги задовольнятимуться при таких залежностях:

$$T_1=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)+Q_\alpha,$$
$$T_2=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)+Q_\beta, \tag{10}$$
$$S=-\frac{1}{AB}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta},$$

де

$$Q_\alpha=-\int q_\alpha A d_\alpha; \quad Q_\beta=-\int q_\beta B d_\beta. \tag{11}$$

Після перетворень, аналогічних перетворенням п. 1, одержимо для даного випадку ключову систему рівнянь

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta\Delta w-\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta\Delta_k\varphi+\Delta_k\varphi=q-\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta q,$$
$$\Delta\Delta\varphi-2Eh\,\Delta_k w=Q, \tag{12}$$
$$\Delta\psi-\frac{3}{h^2}\psi=0,$$

де

$$q=q_n-\frac{Q_\alpha}{R_1}-\frac{Q_\beta}{R_2},$$
$$Q=-\Delta(Q_\alpha+Q_\beta)+(1+\nu)\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial Q_\beta}{\partial\beta}\right)$$

та формули для кутів повороту нормалі

$$\gamma_3=-\frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[w+\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta w-\frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)}(\Delta_k\varphi-q)\right],$$
$$\gamma_4=\frac{1}{A}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[w+\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta w-\frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)}(\Delta_k\varphi-q)\right]. \tag{13}$$

При розрахунку досить пологих оболонок, середня поверхня яких в декартовій прямокутній системі координат XYZ задається рівнянням

$$z=z(x,y),$$

нехтують [5] квадратами і добутком величин $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в порівнянні з одиницею. Тоді положення точок на середній поверхні визначаються декартовими координатами (x, y) їх проекцій на площину XOY, $A=B=1$, R_1 і R_2 — const, виконуються умови (9) і має місце ключова система (12) *, в якій

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_k = \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$q = q_z - \frac{Q_x}{R_1} - \frac{Q_y}{R_2}, \tag{14}$$

$$Q = -\Delta(Q_x + Q_y) - (1+\nu)\left(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2}\right);$$

$$Q_x = -\int q_x\,dx; \; Q_y = -\int q_y\,dy,$$

q_x, q_y, q_z — проекції зовнішнього навантаження, віднесеного до одиниці площі.

3. У випадку осесиметричної задачі для пологої сферичної оболонки, середня поверхня якої задана рівнянням

$$z = \sqrt{R^2 - r^2} - (R - z_0), \tag{15}$$

приймається [7], що

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -\frac{r}{R}.$$

Диференціальні рівняння рівноваги набувають вигляду

$$\frac{dr\,T_1}{dr} - T_2 + rq_r = 0;$$

$$\frac{r}{R}(T_1 + T_2) - \frac{dr\,N_1}{dr} - rq_n = 0; \tag{16}$$

$$\frac{dr\,G_1}{dr} - G_2 - rN_1 = 0,$$

де q_r і q_n — інтенсивності навантаження відповідно в меридіальному і нормальному напрямах.

Перше рівняння системи (16) задовольняється введенням залежностей

$$T_1 = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + Q,$$

$$T_2 = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + Q, \tag{17}$$

де

$$Q = -\int q_r\,dr.$$

З двох інших рівнянь цієї системи одержуємо формулу

$$\gamma_3 = -\frac{d}{dr}\left[\frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta w + w - \frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)}\left(\frac{1}{R}\Delta\varphi - q\right)\right], \tag{18}$$

* Аналогічна система для випадку, коли $q_x = q_y = 0$, подана в [6].

де

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}; \; q = q_n - \frac{2Q}{R},$$

та основне рівняння, яке разом з рівнянням, що одержується з рівняння 1 (6[9]) нерозривності деформацій, дає ключову систему рівнянь для розглядуваного випадку

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\Delta\Delta w - \frac{2h}{3(1-\nu)}\Delta\Delta\varphi + \frac{1}{R}\Delta\varphi = q - \frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta q;$$

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{2Eh}{R}\Delta w = -(1-\nu)\Delta Q. \quad (19)$$

Ключові системи рівнянь (8), (12), (19) враховують деформації зсуву $e_{\alpha n}$, $e_{\beta n}$ за моделлю С. П. Тимошенка [9], що має практичне значення [7] в тих областях оболонки, які прилягають до контура або до отворів, діаметр яких не можна вважати великим порівняно з товщиною оболонки. При цьому в загальному випадку порядок ключової системи рівнянь дає можливість задовольняти не по чотири, а по п'ять граничних умов на кожному краї оболонки. Деякі з граничних умов мають вигляд: в переміщеннях і кутах повороту

$$u = u^{(0)}, \; v = v^{(0)}, \; w = w^{(0)}, \; \gamma_3 = \gamma_3^{(0)}, \; \gamma_4 = \gamma_4^{(0)} \text{ при } \alpha = \alpha_0,$$

в зусиллях і моментах

$$T_1 = T_1^{(0)}, \; S = S^{(0)}, \; N_1 = N_1^{(0)}, \; G_1 = G_1^{(0)}, \; H = H^{(0)} \text{ при } \alpha = \alpha_0.$$

Зокрема, для защімленого краю

$$u = v = w = \gamma_3 = \gamma_4 = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0,$$

для вільного краю

$$T_1 = S = N_1 = G_1 = H = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0,$$

для шарнірно опертого краю, що не зміщується,

$$u = v = w = \gamma_4 = G_1 = 0 \text{ при } \alpha = \alpha_0.$$

Виходячи із системи (19), знайдено розв'язок осесиметричної задачі для пологої сферичної оболонки. Якщо оболонка алюмінієва, защімлена по контуру і перебуває під дією рівномірно-розподіленого нормального навантаження, то при $R = 200$ *см*, $a = 90$ *см*, $2h = 0{,}4$ *см*, $q_n = 1$ *кг/см²*, $E = 0{,}7 \cdot 10^6$ *кг/см²*, $\nu = 0{,}32$, де R — радіус сферичної оболонки, a — радіус колового контура оболонки, максимальний згинаючий момент на контурі оболонки $M_r = 17{,}6$ *кгм/м*. Відповідне значення згинаючого моменту, одержане при нехтуванні зсувами [7], більше на 12,5%.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
2. А. Л. Гольденвейзер. Рецензия на книгу В. В. Новожилова «Теория тонких оболочек». Прикл. матем. и мех., т. XIII, вып. 1, 1949.
3. Е. І. Лунь. До теорії пружних оболонок. Зб. робіт аспірантів ЛДУ ім. Ів. Франка. Вид-во Львів. ун-ту, 1963.
4. М. Мишонов. К теории пологих оболочек. Прикл. матем. и мех., т. XXII, вип. 5, 1958.

5. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек. Судпромгиз. Л., 1962.
6. Б. Л. Пелех. Кандидатская диссертация. ЛГУ им. Ив. Франко, 1965.
7. С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М., 1963.
8. М. П. Шереметьев. Лекции по теории упругости. Изд-во Львов. ун-та, 1962—1963.
9. М. П. Шереметьев, Е. И. Лунь. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Труды IV Всесоюз. конференции по теории оболочек и пластин, 1962.

Е. И. ЛУНЬ

УПРОЩЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

(резюме)

Рассматриваются упрощения основных уравнений теории оболочек типа Тимошенко применительно к оболочкам нулевой гауссовой кривизны, к пологим оболочкам и к оболочкам, в которых напряженное состояние достаточно быстро изменяется в направлении хотя бы одной из координатных линий.