ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 539. 311

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ВПРЕСОВКА ЗАМКНУТОГО СТЕРЖНЯ В КРИВОЛІНІЙНИЙ ОТВІР АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

Нехай в криволінійний отвір анізотропної пластинки, що має в кожній точці площину пружної симетрії, паралельну серединній площині, встановлений замкнутий ізотропний криволінійний стержень (кільце) сталого перерізу, контур якого до деформації відрізнявся від контура отвору на величину порядку допустимих пружних переміщень. При цьому припускається, що стержень дотикається пластинки по всьому краю отвору.

Поперечний переріз стержня може бути довільної форми, симетричної відносно серединної площини пластинки. В основу розрахунку стержня покладена гіпотеза нормального жорсткого перерізу. Тертям між пластинкою і стержнем нехтується. Аналогічна задача для ізотропної пластинки розглянута в роботі [3].

З умови задачі випливає, що після того, як кільце встановлене в отвір, на лінії контакту L повинні справджуватися такі рівності:

$$\begin{gathered} u_n - u_{1n} = \varepsilon^*; \\ N^{(i)} = N_1^{(i)}; \\ T^{(i)} = T_1^{(i)} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

де u_n — нормальна складова вектора переміщення контурних точок пластинки; $N^{(i)}$ і $T^{(i)}$ — відповідно нормальна і дотична складові вектора напруження; ε^* — мала величина порядку пружних переміщень *.

Контурні рівності (1) можна виразити через дві аналітичні в своїх площинах функції $\varphi_1(z_1)$ і $\psi_1(z_2)$ комплексного змінного $z_1 = x + s_1 y$ і $z_2 = x + s_2 y$; в результаті одержимо [5]

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\left\{i\frac{d}{dt}\left[(s_1 - i)\varphi_1(t_1) + (\bar{s}_1 - i)\overline{\varphi_1(t_1)} + (s_2 - i)\psi_1(t_2) + (\bar{s}_2 - i)\overline{\psi_1(t_2)}\right]\right\} = N_{(i)} \\ \operatorname{Re}\{e^{-i\alpha}[(p_1 + iq_1)\varphi_1(t_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\overline{\varphi_1(t_1)} + (p_2 + iq_2)\psi_1(t_2) + \\ + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\overline{\psi_1(t_2)}]\} = u_{1n} + \varepsilon^* \text{ на } L, \end{gathered} \tag{2}$$

де s_1, s_2, p_1, p_2, q_1, q_2 — відомі величини, що залежать від пружних

* Тут і далі величини, позначені індексом «1», відносяться до стержня.

сталих матеріалу; α — кут, утворений зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ з додатним напрямом осі x; t — афікс точки контура отвору L.

Розглянемо тепер деформацію стержня. Рівняння рівноваги елемента стержня з врахуванням третьої з умов (1) зводиться до таких співвідношень [2]:

$$-\frac{1}{2h}\left(\frac{dV_n}{ds_1}-\frac{1}{r_1}V_\tau\right)+\frac{h^*}{h}\frac{r_2}{r_1}N=N^{(t)};$$
$$\frac{dV_\tau}{ds_1}=-\frac{1}{r_1}V_n,\quad \frac{dM}{ds_1}=\frac{r_0}{r_1}V_n, \tag{3}$$

де V_τ і V_n — відповідно поздовжня і поперечна складові головного вектора внутрішніх зусиль; M — момент внутрішніх зусиль, які діють в довільному нормальному перерізі стержня; N — нормальне зусилля, прикладене до стержня; r_1, r_2 — радіуси кривини крайніх волокон стержня, причому під r_1 ми будемо розуміти радіус кривини того крайнього волокна, вздовж якого пластинка дотикається до стержня; елемент дуги цього волокна ми позначили через ds_1, а його відстань до осі стержня через ε_1; r_0 — радіус кривини осі стержня; $2h$ — висота пластинки; $2h^*$ — висота того краю стержня, що не контактує з пластинкою; b — ширина стержня в площині його осі.

Розглядаючи деформацію волокна стержня, еквідистантного його осі, одержимо співвідношення [2], [3].

$$\frac{d^2u_{1n}}{ds_1^2}-r_1\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{du_{1n}}{ds_1}+\frac{1}{r_1^2}u_{1n}=\frac{r_0}{r_1^2}e_0-\frac{r_0}{r_1}\frac{d\Theta}{ds_1}+r_1\Theta\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{r_1}\right), \tag{4}$$

де u_{1n} — нормальна складова вектора переміщення; e_0 — відносне подовження осі стержня; Θ — кут повороту нормального перерізу стержня внаслідок його деформації.

При малій деформації закон Гука для криволінійного стержня візьмемо в такому вигляді [7]:

$$e_0=\frac{V_\tau}{g_1}+\frac{M}{r_0g_1},$$
$$\frac{d\Theta}{ds_1}=\frac{r_0}{r_1}\left[\frac{M}{g_2}+\frac{M}{r_0^2g_1}+\frac{V_\tau}{r_0g_1}\right]. \tag{5}$$

Тут $g_1=E^*F$ — жорсткість стрежня на розтяг; $g_2=E^*I'$ — жорсткість стержня на згин; F — площа нормального перерізу стержня; E^* — модуль Юнга для стержня;

$$I'=\int_F\frac{r_0}{r_0+y}y^2\,dF,$$

де y — змінна величина, відраховувана від осі стержня. Для прямокутного перерізу стержня $2h^*\times b$ величина I' дорівнює

$$I'=\lambda I_z, \tag{6}$$

де $I_z=\dfrac{h^*b^3}{6}$ — момент інерції перерізу стержня; b — ширина стержня;

$$\lambda = 12\left(\frac{r_0^3}{b^3}\ln\frac{2r_0+b}{2r_0-b}-\frac{r_0^2}{b^2}\right).$$

Нормальне напруження в перерізі стержня визначається за формулою

$$\sigma = \frac{V_\tau}{F}+\frac{M}{r_0 F}+\frac{My}{I'}\cdot\frac{r_0}{r_0+y}. \tag{7}$$

З врахуванням (5) рівність (4) набуває вигляду

$$\frac{d^2 u_{1n}}{ds_1^2}-r_1\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{du_{1n}}{ds_1}+\frac{1}{r_1^2}u_{1n}=-\frac{r_0^2 M}{r_1^2 g_2}+r_1\Theta\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{r_1}\right). \tag{8}$$

На підставі співвідношень (3) контурні умови розглядуваної задачі (2) набудуть вигляду

$$\mathrm{Re}\left\{i\frac{d}{dt}\left[(s_1-i)\varphi_1(t_1)+(\bar{s}_1-i)\overline{\varphi_1(t_1)}+(s_2-i)\psi_1(t_2)+(\bar{s}_2-i)\overline{\psi_1(t_2)}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2h}\left[\frac{d}{ds_1}\left(r_1\frac{dV_\tau}{ds_1}\right)+\frac{1}{r_1}V_\tau\right]+\frac{h^*}{h}\frac{r_2}{r_1}N;$$

$$\mathrm{Im}\left\{i\frac{d}{dt}\left[(s_1-i)\varphi_1(t_1)+(\bar{s}_1-i)\overline{\varphi_1(t_1)}+(s_2-i)\psi_1(t_2)+(\bar{s}_2-i)\overline{\psi_1(t_2)}\right]\right\}=0; \tag{9}$$

$$\mathrm{Re}\{e^{-i\alpha}[(p_1+iq_1)\varphi_1(t_1)+(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\overline{\varphi_1(t_1)}+(p_2+iq_2)\psi_1(t_2)+$$

$$+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\overline{\psi_1(t_2)}]\}=u_{1n}+\varepsilon^*;$$

$$\frac{dM}{ds_1}=-r_0\frac{dV_\tau}{ds_1}.$$

Величина ε^* взагалі є функцією дуги контура отвору. Для прикладу розглянемо нескінченну анізотропну пластинку з круговим отвором радіуса r_1, в який впресовано пружне кільце ширини b. Зовнішній радіус кільця в недоформованому стані дорівнював $r_1+\varepsilon^*$ ($\varepsilon^*>0$ — величина стала).

Будемо вважати, що впресоване кільце вільне від дії зовнішніх зусиль, а напруження в пластинці на нескінченності обмежені:

$$X_x^\infty=p,\ Y_y^\infty=q,\ X_y^\infty=0;\ N=0.$$

Область зміни z, зайняту пластинкою, відобразимо на зовнішність одиничного кола функцією

$$z=\omega(\zeta)=r_1\zeta,\ t=r_1\sigma,\ \sigma=e^{i\theta}. \tag{10}$$

Тоді, очевидно, функції

$$z_1=\omega_1(\zeta_1)=\frac{r_1}{2}\left[(1-is_1)\zeta_1+(1+is_1)\frac{1}{\zeta_1}\right];$$

$$z_2=\omega_2(\zeta_2)=\frac{r_1}{2}\left[(1-is_2)\zeta_2+(1+is_2)\frac{1}{\zeta_2}\right] \tag{11}$$

будуть також конформно переводити відповідні області зміни z_1 і z_2

на зовнішність одиничного круга, причому для контурних точок змінні ζ_1 і ζ_2 набувають одного і того самого значення $\sigma = e^{i\theta}$.

Якщо ввести позначення

$$\varphi_1[\omega_1(\zeta_1)] = \varphi(\zeta_1); \ \psi_1[\omega_2(\zeta_2)] = \psi(\zeta_2),$$

контурні умови (8), (9) в розглядуваному випадку можна подати в такому вигляді:

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\sigma^3 \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} u_n\right)\right] = r_0^2 \frac{M}{g_2} - \varepsilon^*;$$

$$\operatorname{Re}\left\{i \frac{d}{d\sigma}\left[(s_1 - i)\varphi(\sigma) + (\bar{s}_1 - i)\overline{\varphi(\sigma)} + (s_2 - i)\psi(\sigma) + (\bar{s}_2 - i)\overline{\psi(\sigma)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2hr_0}\frac{d}{d\sigma}\left[\sigma^3 \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} M\right)\right] + C; \tag{12}$$

$$\operatorname{Im}\left\{i \frac{d}{d\sigma}(s_1 - i)\varphi(\sigma) + (\bar{s}_1 - i)\overline{\varphi(\sigma)} + (s_2 - i)\psi(\sigma) + (\bar{s}_2 - i)\overline{\psi(\sigma)}\right]\right\} = 0,$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sigma}\left[(p_1 + iq_1)\varphi(\sigma) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\overline{\varphi(\sigma)} + (p_2 + iq_2)\psi(\sigma) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\overline{\psi(\sigma)}\right]\right\} = u_n \text{ на } \gamma,$$

де

$$C = \frac{1}{2hr_0}(M_0 + r_0 V_{0\tau}), \ \frac{dM}{d\sigma} = -r_0 \frac{dV_\tau}{d\sigma}. \tag{13}$$

Комплексні потенціали $\varphi(\zeta_1)$ і $\psi(\zeta_2)$, що визначають напружений стан в анізотропній пластинці, можна подати у вигляді

$$\varphi(\zeta_1) = \frac{r_1(1 - is_1)}{2} A_0^* \zeta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_1^{-n};$$

$$\psi(\zeta_2) = \frac{r_1(1 - is_2)}{2}(B_0^* + iC_0^*)\zeta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta_2^{-n}, \tag{14}$$

де A_0^*, B_0^*, C_0^* — відомі величини, які виражаються через напруження на нескінченності [6].

Вирази внутрішніх зусиль у перерізі кільця подамо у формі комплексних рядів Фур'є:

$$V_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \sigma^{-n};$$

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n \sigma^{-n}; \tag{15}$$

$$u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n \sigma^{-n}.$$

Коефіцієнти розкладу функцій (14) і (15) визначимо з умови їх точного задоволення контурним рівностям (12) з врахуванням (13) і умови однозначності кута Θ повороту перерізу (5); в результаті прийдемо до таких систем алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів:

$$\mathrm{Re}\,[(1 + i\bar{s}_1)\bar{a}_1 + (1 + i\bar{s}_2)\bar{b}_1] = -\mathrm{Re}\,[(1 + is_1)A_0 + (1 + is_2)B_0] - \frac{g_2 + r_0^2 g_1}{2hr_0 g_2}\beta_0,$$

$$\mathrm{Re}\,[(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\bar{a}_1 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\bar{b}_1] = -\mathrm{Re}[(p_1 + iq_1)A_0 + (p_2 + iq_2)B_0] + \varepsilon^* - \frac{r_0^2}{g_2}\beta_0, \tag{16}$$

$$\mathrm{Im}\,[(1 + i\bar{s}_1)\bar{a}_1 + (1 + i\bar{s}_2)\bar{b}_1] = -\mathrm{Im}\,[(1 + is_1)A_0 + (1 + is_2)B_0];$$

$$3(1 + i\bar{s}_1)\bar{a}_3 + 3(1 + i\bar{s}_2)\bar{b}_3 = (1 - i\bar{s}_1)\bar{a}_1 + (1 - i\bar{s}_2)\bar{b}_1 + (1 - is_1)A_0 + (1 - is_2)B_0 + \frac{3}{hr_0}\beta_2,$$

$$(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\bar{a}_3 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\bar{b}_3 = -(\bar{p}_1 - i\bar{q}_1)\bar{a}_1 - (\bar{p}_2 - i\bar{q}_2)\bar{b}_1 - (p_1 - iq_1)A_0 - (p_2 - iq_2)B_0 + \frac{2r_0^2}{3g_2}\beta_2,$$

$$3(1 + i\bar{s}_1)\bar{a}_3 + 3(1 + i\bar{s}_2)\bar{b}_3 = -(1 - i\bar{s}_1)\bar{a}_1 - (1 - i\bar{s}_2)\bar{b}_1 - (1 - is_1)A_0 - (1 - is_2)B_0;$$

$$(n + 1)(1 + i\bar{s}_1)\bar{a}_{n+1} + (n + 1)(1 + i\bar{s}_2)\bar{b}_{n+1} = (n - 1)(1 - i\bar{s}_1)\bar{a}_{n-1} + (n - 1)(1 - i\bar{s}_2)\bar{b}_{n-1} + \frac{1}{hr_0}(n^2 - 1)\beta_n;$$

$$(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\bar{a}_{n+1} + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\bar{b}_{n+1} = -(\bar{p}_1 - i\bar{q}_1)a_{n-1} - (\bar{p}_2 - i\bar{q}_2)\bar{b}_{n-1} + \frac{2r_0^2}{(n^2 - 1)g_2}\beta_n;$$

$$(n + 1)(1 + i\bar{s}_1)\bar{a}_{n+1} + (n + 1)(1 + i\bar{s}_2)\bar{b}_{n+1} = -(n - 1)(1 - i\bar{s}_1)\bar{a}_{n-1} - (n - 1)(1 - i\bar{s}_2)\bar{b}_{n-1}\ (n = 4, 6, 8, \ldots),$$

$$\beta_n = -r_0\alpha_n, \quad \gamma_n = \frac{r_0^2}{(n^2 - 1)g_2}\beta_n, \ (n = 2, 4, 6, \ldots),$$

$$\alpha_0 = -\frac{g_2 + r_0^2 g_1}{r_0 g_2}\beta_0, \quad \gamma_0 = \varepsilon^* - \frac{r_0^2}{g_2}\beta_0,$$

$$A_0 = \frac{r_1(1 - is_1)}{2} A_0^*, \quad B_0 = \frac{r_1(1 - is_2)}{2} (B_0^* + iC_0^*).$$

Коефіцієнти a_n і b_n з парним індексом, а коефіцієнти α_n і β_n з непарним індексом дорівнюють нулеві.

Розв'язуючи систему (16), знайдемо коефіцієнти a_n, b_n і β_n; ці коефіцієнти будуть залежати від параметра β_0. Внаслідок голоморфності функцій $\varphi_0(\zeta_1)$ і $\psi_0(\zeta_2)$ коефіцієнти розкладу їх a_n і b_n з ростом номера «n» прямують до нуля. Тому знайдеться такий номер «N», починаючи з якого всі коефіцієнти a_n і b_n з наперед заданим ступенем точності можна покласти рівними нулеві, тобто

$$a_N(\beta_0) = 0, \; b_N(\beta_0) = 0. \tag{17}$$

Номер «N» повинен бути підібраний так, щоб параметр β_0, знайдений з першої і другої умов (17), з прийнятим ступенем точності збігався.

Нормальний тиск, що виникає на лінії контакту пластинки з кільцем, визначається за формулою

$$N^{(i)} = \frac{1}{2h\,r_1}\alpha_0 + \frac{1}{2h\,r_1}\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}(1 - n^2)(\alpha_n\sigma^n + \bar{\alpha}_n\sigma^{-n}). \tag{18}$$

Якщо $N^{(i)} \leqslant 0$, то пластинка буде контактувати з кільцем вздовж всього контура L. При розтязі пластинки вздовж осі Ox $(q=0)$ мінімальна величина ε^* визначається з умови

$$N^{(i)} = 0 \text{ при } \Theta = 0 \text{ (або } \Theta = \pi). \tag{19}$$

Розглянемо ортотропну пластинку. Напрямок координатних осей x і y спрямуємо вздовж головних напрямів пружності. Для більшості ортотропних матеріалів параметри s_1 і s_2 чисто уявні: $s_1 = i\beta_1^*$, $s_2 = i\beta_2^*$. Тоді величини p_1 і p_2 будуть дійсними, а величини q_1 і q_2 — чисто уявними [5]:

$$p_1 = -\frac{\beta_1^{*2} + \nu_1}{E_1}; \; q_1 = -i\frac{1 + \nu_2\beta_1^{*2}}{\beta_1^* E_2};$$
$$p_2 = -\frac{\beta_2^{*2} + \nu_1}{E_1}; \; q_2 = -i\frac{1 + \nu_2\beta_2^{*2}}{\beta_2^* E_2}. \tag{20}$$

У випадку ортотропної пластинки сталі A_0^* і B_0^* виражаються через напруження на нескінченності такими формулами [6]:

$$A_0^* = -\frac{X_x^\infty + \beta_2^{*2} Y_y^\infty}{2(\beta_1^{*2} - \beta_2^{*2})}; \; B_0^* = \frac{X_x^\infty + \beta_1^{*2} Y_y^\infty}{2(\beta_1^{*2} - \beta_2^{*2})}, \quad C_0^* = \frac{X_y^\infty}{2\beta_2^*}. \tag{21}$$

Із системи (16), з врахуванням (20) і (21), випливає, що для ортотропної пластинки при $X_y^\infty = 0$ коефіцієнти a_n, b_n і β_n будуть величинами дійсними.

Для кільця прямокутного поперечного перерізу $2h^* \times b$ систему рівнянь (16) подамо в безрозмірних величинах δ і γ, поклавши

$$\delta = \frac{b}{r_1}; \; \gamma = \frac{h^*}{h}; \; I^* = \lambda I_z = \lambda\frac{h^* b^3}{6}; \quad \varepsilon_1 = \frac{b}{2};$$

$$g_1 = 2h^* bE^*; \; g_2 = \lambda E^*\frac{h^* b^3}{6}. \tag{22}$$

Враховуючи (20), (21) і (22), система (16) для ортотропної пластинки з впресованим кільцем прямокутного перерізу набуде вигляду

$$(1+\beta_1^*)\,a_1+(1+\beta_2^*)\,b_1=-(1-\beta_1^*)\,A_0-(1-\beta_2^*)\,B_0-\frac{2\gamma[\lambda\delta^2+3(2-\delta)^2]}{\lambda\delta\,(2-\delta)}\,\beta_0';$$

$$(\bar p_1+i\bar q_1)\,a_1+(\bar p_2+i\bar q_2)\,b_1=-(p_1+iq_1)\,A_0-(p_2+iq_2)\,B_0+\varepsilon^*-$$
$$-\frac{3\,(2-\delta)^2}{\lambda E^*\,\delta^2}\,\beta_0';$$

$$3\,(1+\beta_1^*)\,a_3+3\,(1+\beta_2^*)\,b_3=(1-\beta_1^*)\,a_1+(1-\beta_2^*)\,b_1+(1+\beta_1^*)\,A_0+$$
$$+(1+\beta_2^*)B_0+12\,\gamma\,\frac{\delta}{2-\delta}\,\beta_2';$$

$$(\bar p_1+i\bar q_1)\,a_3+(\bar p_2+i\bar q_2)\,b_3=-(\bar p_1-i\bar q_1)\,a_1-(\bar p_2-i\bar q_2)\,b_1-$$
$$-(p_1-iq_1)\,A_0-(p_2-iq_2)\,B_0+\frac{2\,(2-\delta)^2}{\lambda E^*\,\delta^2}\,\beta_2';$$

$$3\,(1+\beta_1^*)\,a_3+3\,(1+\beta_2^*)\,b_3=-(1-\beta_1^*)\,a_1-(1-\beta_2^*)\,b_1-$$
$$-(1+\beta_1^*)\,A_0-(1+\beta_2^*)\,B_0; \tag{23}$$

$$(n+1)\,(1+\beta_1^*)\,a_{n+1}+(n+1)\,(1+\beta_2^*)\,b_{n+1}=(n-1)\,(1-\beta_1^*)\,a_{n-1}+$$
$$+(n-1)\,(1-\beta_2^*)\,b_{n-1}+\frac{4\gamma\delta\,(n^2-1)}{2-\delta}\,\beta_n';$$

$$(\bar p_1+i\bar q_1)\,a_{n+1}+(\bar p_2+i\bar q_2)\,b_{n+1}=-(\bar p_1-i\bar q_1)\,a_{n-1}-(\bar p_2-i\bar q_2)\,b_{n-1}+$$
$$+\frac{6\,(2-\delta)^2}{\lambda E^*\,\delta^2\,(n^2-1)}\,\beta_n';$$

$$(n+1)\,(1+\beta_1^*)\,a_{n+1}+(n+1)\,(1+\beta_2^*)\,b_{n+1}=-(n-1)\,(1-\beta_1^*)\,a_{n-1}-$$
$$-(n-1)\,(1-\beta_2^*)\,b_{n-1};\ (n=4,6,8,\ldots)$$

$$\alpha_n=-\frac{4h^*\delta}{2-\delta}\,\beta_n';\ \gamma_n=\frac{3\,(2-\delta)^2}{\lambda E^*\,\delta^2\,(n^2-1)}\,\beta_n'\ \ (n=2,4,6,\ldots);$$

$$\alpha_0=-\frac{4h^*\,[\lambda\delta^2+3\,(2-\delta)^2]}{\lambda\delta\,(2-\delta)}\,\beta_0';\ \ \gamma_0=\varepsilon^*-\frac{3\,(2-\delta)^2}{\lambda E^*\,\delta^2}\,\beta_0';$$

$$\lambda=3\,\frac{(2-\delta)^2}{\delta^2}\left[\frac{2-\delta}{2\delta}\ln\frac{1}{1-\delta}-1\right];\ \beta_n=2h^*\,b\beta_n'.$$

Для кільця прямокутного поперечного перерізу формула (7) в безрозмірних величинах зведеться до вигляду

$$\sigma=\frac{V_\tau}{2h^*\,b}+\frac{\eta M}{2h^*b^2}, \tag{24}$$

де

$$\eta=\frac{2k\,(1-\delta)\,[\delta^2(\lambda+3)-12\delta+12]-3\,(2-\delta)^3}{\lambda k\delta\,(1-\delta)\,(2-\delta)};$$

$$k=\frac{r}{r_2},\quad \frac{r_1}{r}=\frac{1}{k(1-\delta)}.$$

Кільцеві напруження σ_θ в ортотропній пластинці вздовж краю кругового отвору обчислюються за формулою

$$\sigma_\theta=\frac{2}{r_1}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{(\cos\Theta+i\beta_1^*\sin\Theta)^2[(1+\beta_1^*)-(1-\beta_1^*)\cos 2\Theta-i(1-\beta_1^*)\sin 2\Theta]\varphi'(\sigma)}{(1+\beta_1^{*2})-(1-\beta_1^{*2})\cos 2\Theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\cos\Theta+i\beta_2^*\sin\Theta)^2[(1+\beta_2^*)-(1-\beta_2^*)\cos 2\Theta-i(1-\beta_2^*)\sin 2\Theta]\psi'(\sigma)}{(1+\beta_2^{*2})-(1-\beta_2^{*2})\cos 2\Theta}\right\}.$$

Розглянемо числовий приклад. За ортотропну пластинку візьмемо склотекстоліт КАСТ-В [8] товщиною 1 *см* з пружними даними

$$E_1=1{,}97\cdot 10^5\ кг/см^2;\ E_2=1{,}36\cdot 10^5 кг/см^2;\ G=0{,}33\cdot 10^5 кг/см^2;\ \nu_2=0{,}12.$$

Впресоване кільце прямокутного поперечного перерізу з дюралюміна з модулем пружності $E^*=7{,}2\cdot 10^5$ *кг/см*². Пластинка розтягується в напрямі осі Ox зусиллям $X_x^\infty=p$ ($Y_y^\infty=0$, $X_y^\infty=0$). За величину ε^* прийнята величина $\varepsilon^*_{\min}$ згідно з умовою (19). Обчислення проводились при $\gamma=1$, $\delta=0{,}2$. Числові значення кільцевих напружень σ_θ в пластинці і σ_1 в кільці в окремих точках вздовж лінії дотику наведені в таблиці.

Θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
σ_Θ/p	−0,661	−0,531	−0,227	0,124	0,495	0,933	1,529	2,368	3,355	3,869
σ_1/p	2,524	2,350	1,850	1,088	0,157	−0,827	−1,747	−2,493	−2,978	−3,146
$\sigma_\theta^{(0)}/p$	−0,831	−0,688	−0,356	0,029	0,432	0,896	1,508	2,350	3,328	3,834
σ_2/p	−3,912	−3,725	−3,101	−2,148	−0,985	0,246	1,396	2,628	2,934	3,144
σ_0/p	−0,359	−0,359	−0,359	−0,359	−0,359	−0,359	−0,359	−0,359	−0,359	−0,359

Тут через $\sigma_\Theta^{(0)}$ позначені напруження, що виникають в пластинці з круговим отвором при відсутності кільця; σ_0 і σ_2 — нормальні напруження відповідно в точках осі стержня і в крайніх волокнах, що не контактують з пластинкою.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.
2. Т. Л. Мартинович. Пружна рівновага пластинки з криволінійним контуром, підкріпленим пружним кільцем. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 1, 1965.
3. Т. Л. Мартынович, М. П. Саврук. Упругое равновесие пластинки, в которую впрессован замкнутый стержень. «Прикладная механика», т. 1, вып. 8, 1965.
4. Т. Л. Мартынович. До питання про підкріплення анізотропної пластинки пружним стержнем. Вісн. Львів. ун-ту сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.
5. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. Гостехтеориздат, 1957.
6. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеориздат, 1951.
7. М. М. Филоненко-Бородич и др. Курс сопротивления материалов, ч. 1. Гостехтеориздат, 1955.
8. Стеклотекстолиты и другие конструкционные пластинки. Сб. статей. Оборонгиз, 1960.

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

ВПРЕССОВКА ЗАМКНУТОГО СТЕРЖНЯ В КРИВОЛИНЕЙНОЕ ОТВЕРСТИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

(р е з ю м е)

Рассматривается задача об упругом равновесии анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, в которое впрессован замкнутый стержень произвольного поперечного сечения, симметричного относительно срединной плоскости пластинки. Внешний контур стержня до деформации отличается от контура отверстия пластинки на величину допустимых упругих перемещений. Задача сводится к совместному решению уравнений (8) и (9).

В качестве примера рассмотрена бесконечная анизотропная пластинка с круговым отверстием, в которое впрессовано упругое кольцо. Для случая ортотропной пластинки при одноосном растяжении на бесконечности приводится числовой пример.

Стаття надійшла 23. XII 1965 р.