

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, Б. М. КОРДУБА

РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЦИЛІНДРІВ

Задача розрахунку потенціалу осесиметричної системи електродів зводиться до розв'язку рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -q(r, z) \quad (1)$$

при відповідних граничних умовах.

З прикладної точки зору значний інтерес являє собою одержання числових, хоч і наближених, значень шуканих величин потенціалу. Од-

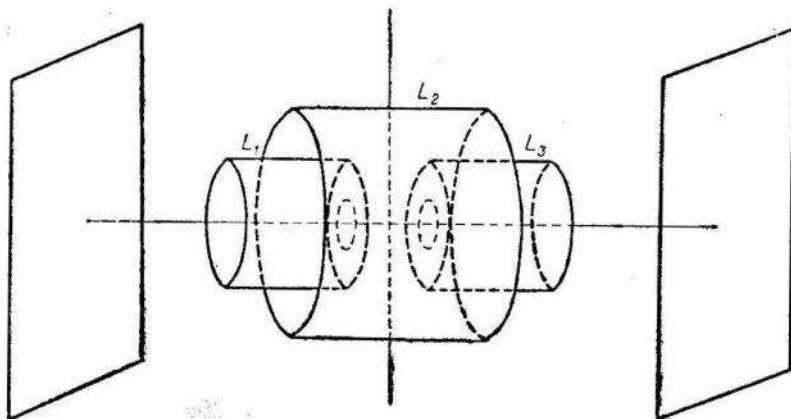


Рис. 1.

ним з таких методів є метод прямих [1, 2]. В роботі [3] даний метод застосовується до розв'язку задачі про розподіл потенціалу всередині системи, що складається з поверхонь обертання, поміщених між двома заземленими вертикальними площинами.

Розглянемо тепер систему, зображену на рис. 1. Зовні циліндри L_1 і L_3 закриті, а на внутрішніх торцях є отвори. На L_1 і L_3 задані потенціали $u=1$, а на L_2 — $u=0$. Розміри подані на рис. 2. (У зв'язку з симетрією задачі відносно осей $z=0$ і $r=0$ подано четверть осьового перерізу даної системи). По обидві сторони від центра системи на віддалі a помістимо вертикальні площини з заданим потенціалом $u=0$.

Замінімо рівняння (1) по змінній z його диференціально-різницеvim аналогом з точністю до $O(h^6)$. Система звичайних диференціальних рівнянь, яка одержиться в результаті цього, матиме вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dA_n \vec{U}(r)}{dr} - \frac{1}{h^2} G_n \vec{U}(r) = -A_n \vec{q} - \frac{1}{12} \vec{B}_n. \quad (2)$$

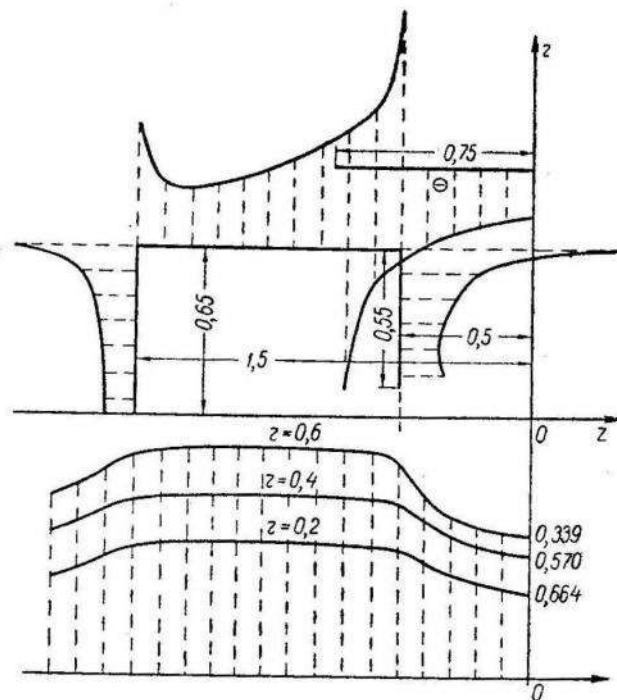


Рис. 2.

Тут

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q^{(1)}(r) \\ \vdots \\ q^{(n)}(r) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{B}_n = \begin{pmatrix} -\frac{12}{h^2} U^{(0)} - \frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial r} + q^{(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (n-2)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{12}{h^2} U^{(n+1)} - \frac{\partial^2 U^{(n+1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(n+1)}}{\partial r} + q^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

У зв'язку з тим, що k перших і k останніх прямих не перетинає несучих поверхонь електродів,

$$q^{(0)} = q^{(1)} = \dots = q^{(k-1)} = q^{(n-k+2)} = \dots = q^{(n)} = q^{(n+1)} = 0,$$

а

$$\vec{B}_n \equiv 0 \quad (U^{(0)} = U^{(n+1)} = 0).$$

$\vec{U}$ і G мають ті самі значення, що і в [3]. Після відповідних перетворень, як і в роботі [3], приходимо до системи рівнянь

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dV^{(k)}}{dr} - \delta_k^2 V^{(k)}(r) = -Q^{(k)}(r), \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

де

$$\delta_k^2 = \frac{\mu_k^2}{1 - \frac{\lambda_k}{12}}, \quad (5)$$

а μ_k^2 — відповідний коефіцієнт при $V^{(k)}(r)$ роботи [3].

Інтегруючи дану систему, аналогічно тому, як це робилося в [3], одержуємо таку розрахункову формулу:

$$U(r, z_k) = \frac{4}{n+1} \sum_{\alpha=\omega}^{\frac{\omega+1}{2}} \sum_{\beta=1}^{m_\alpha} q^{(\alpha, \beta)} r^{(\alpha, \beta)} \sum_{l=1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{l+1} \sin \frac{(2l-1)k\pi}{n+1} \times$$

$$\times \cos \frac{[(n+1)-2\alpha](2l-1)\pi}{n+1} \begin{cases} K_0(r^{(\alpha, \beta)} \delta_l) I_0(r \delta_l) & 0 \leq r \leq r^{(\alpha, \beta)} \\ I_0(r^{(\alpha, \beta)} \delta_l) K_0(r \delta_l) & r \geq r^{(\alpha, \beta)}, \end{cases} \quad (6)$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

де ω — порядковий номер першої прямої, що перетинає електрод; ω — номер останньої прямої, що перетинає електрод; m_α — кількість точок електрода, що лежить на прямій α .

Задача розв'язувалася при $\alpha=10, 15, 30$. Потенціал всередині системи в усіх трьох випадках збігається з точністю 2—3 знаків. На рис. 2 дано розподіл потенціалу в точках на прямих при $r=0,2$, $r=0,4$, $r=0,6$, а також розподіл густин зарядів $q(r, z)$ на кожному електроді.

Для знаходження невідомих параметрів $q^{(\alpha, \beta)}$ складаємо систему алгебраїчних рівнянь m -го порядку, де m — кількість невідомих параметрів (в нашому випадку $m=30$). Дана система має вигляд

$$\sum_{j=1}^{30} a_{ij} q_j^{(\alpha, \beta)} = b_i, \quad (i=1, 2, \dots, 30).$$

Вона легко одержується із (6). Якщо невідомі параметри $q^{(\alpha, \beta)}$ перенумерувати на $q_j^{(\alpha, \beta)}$ ($j=1, 2, \dots, 30$), то коефіцієнтом при $q_j^{(\alpha, \beta)}$ в i -му рівнянні буде

$$a_{ij} = \frac{4}{n+1} r_{ij}^{(\alpha, \beta)} \sum_{l=1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{l+1} \sin \frac{(2l-1)\alpha\pi}{n+1} \cos \frac{[(n+1)-2\alpha](2l-1)\pi}{n+1} \times$$

$$\times \begin{cases} K_0(r_{ij}^{(\alpha, \beta)} \delta_l) I_0(r_{ii} \delta_l) & (0 \leq r_{ii} \leq r_{ij}^{(\alpha, \beta)}) \\ I_0(r_{ij}^{(\alpha, \beta)} \delta_l) K_0(r_{ii} \delta_l) & (r_{ii} \geq r_{ij}^{(\alpha, \beta)}), \end{cases}$$

де $r_{ij}^{(\alpha, \beta)} = r_{ji}^{(\alpha, \beta)}$, що відповідають $q_j^{(\alpha, \beta)}$ в i -му рівнянні, а вільний член $b_i = U(r_{ii}, z_a)$ — відоме значення потенціалу в точці контура (r_{ii}, z_a) .

Зауважимо, що достатньо обчислити діагональні елементи даної матриці і елементи над діагоналлю. Елементи під діагоналлю можна одержати за формулою

$$a_{ji} = a_{ij} \frac{r_{ji}^{(\alpha, \beta)}}{r_{ij}^{(\alpha, \beta)}}.$$

Розрахунок на електронно-обчислювальній машині М-20 займає 2,5—3 хв.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. Г. Слободянский. Способ интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. 3, вып. 1, 1939.
2. В. Н. Фаддеева. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, т. 28, 1949.
3. Т. Л. Мартынович, Б. М. Кордуба. Применение метода прямых в сочетании с методом интегральных преобразований к расчету электростатических полей с осевой симметрией. Журн. вычисл. математики и матем. физики, т. 5, № 6, 1965.

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ, Б. М. КОРДУБА

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ ЦИЛИНДРОВ

(резюме)

Решается задача распределения потенциала внутри системы электродов в виде поверхностей вращения с заданными на них потенциалами. Задача доведена до числа.