

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, В. Г. КОСТЕНКО

## ЕЛІПТИЧНА ДИСТОРСІЯ ЕЛЕКТРОННОЇ ЛІНЗИ

В роботі [1] методом збурень було встановлено, що у випадку симетричної еліптичної дисторсії електронної лінзи поле потенціалу може бути зображене у вигляді

$$u(r, z, \Theta) = u_0(r, z) + \lambda u_1(r, z) \cos 2\Theta + O(\lambda^2), \quad (1)$$

де  $u_0(r, z)$  — розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

зовні електродів  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  незбуреної осесиметричної лінзи, який задовільняє умови

$$u_0(r, z)|_{l_1, l_3} = 1, \quad u_0(r, z)|_{l_2} = 0, \quad \frac{\partial u_0(0, z)}{\partial r} = 0; \quad (3)$$

$u_1(r, z)$  — розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{4}{r^2} u_1 = 0, \quad (4)$$

який задовільняє умови

$$u_1(r, z)|_{l_1, l_3} = a_1 \frac{\partial u_0}{\partial n}, \quad u_1(r, z)|_{l_2} = a_2 \frac{\partial u_0}{\partial n}, \quad u_1(0, z) = 0; \quad (5)$$

$\lambda$  — параметр збурення;  $a_1$  і  $a_2$  — радіуси електродів  $l_1$ ,  $l_3$  і  $l_2$  відповідно;  $n$  — зовнішня до поверхні електродів нормаль.

У випадку несиметричної еліптичної дисторсії досить ввести два параметри збурення, а для знаходження поля потенціалу такої лінзи потрібно буде розв'язати дві задачі для рівняння (4) з умовами виду (5).

У тій же роботі [1] була запропонована схема знаходження наближених розв'язків задач (2), (3) і (4), (5) з застосуванням методу прямих і спряжень. За цією схемою легко одержується поле потенціалу в аналітичній формі на окремих прямих, перпендикулярних до електродів лінзи. Але пізніше з'ясувалося, що таке поле потенціалу мало придатне для знаходження траекторій руху електронів лінзи на ЕОМ.

Наведемо тепер схему знаходження наближених розв'язків задач (2), (3) і (4), (5), основану на використанні власних функцій дис-

ретного аргументу [2]. Остання приводить до одержання числового поля потенціалу, з якого легко знаходиться траєкторії руху електронів лінзи на ЕОМ.

Розглянемо, наприклад, задачу (4), (5). Розв'язок цієї задачі прямує до нуля на нескінченності, а тому в межах точності, яка вимагається, завжди можна підібрати такий паралелепіпед, одна грань якого проходить через вісь симетрії лінзи, а інші симетрично віддалені від лінзи настільки, що на них шукану функцію можна покласти рівною нулеві.

Границі умови (5) виражаються через нормальну похідну потенціалу осесиметричної лінзи, яка має розрив при переході через електроди. Тому, природно, під  $\frac{\partial u_0}{\partial n}$  в умовах (5) розуміти граничні значення цієї нормальної похідної  $\frac{\partial u_0}{\partial n^-}$  і  $\frac{\partial u_0}{\partial n^+}$  при наближенні по нормальні до електродів відповідно знизу і зверху.

Отже, будемо шукати в прямокутнику  $D$  розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{4}{r^2} u_1 = 0, \quad (4)$$

який задовольняє умови

$$u_1(r_\alpha \pm 0, z) = a_1 \frac{\partial u_0}{\partial n^\pm} \text{ на } l_1 \text{ і } l_3; \\ u_1(r_\beta \pm 0, z) = a_2 \frac{\partial u_0}{\partial n^\pm} \text{ на } l_2; \\ u_1(r, z) = 0 \text{ на } S, \quad (5')$$

де  $r=r_\alpha$  і  $r=r_\beta$  — прямі, на яких лежать електроди  $l_1$ ,  $l_3$  і  $l_2$  відповідно;  $D$  — перетин раніше підібраного паралелепіпеда з площею  $z, r$ ;  $S$  — границя  $D$  (рис. 1).

Замінюючи похідні кінцево-різницевими відношеннями у вузлі  $z_i = z_0 + ih_1$ ,  $r_k = kh$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, \beta - 1, \beta + 1, \dots, m$ ) і позначаючи  $u_1(r_k, z_i) = u_{1i}(r_k)$ , одержимо з рівняння (4)

$$R \vec{u}_1(r_k) + \gamma^2 T \vec{u}_1(r_k) = 0, \quad (6)$$

де

$$\gamma = \frac{h}{h_1}, \quad R u_{1i}(r_k) = \left(1 + \frac{h}{r_k}\right) u_{1i}(r_{k+1}) - \left(2 + \frac{h}{r_k} + \frac{4h^2}{r_k^2}\right) u_{1i}(r_k) + u_{1i}(r_{k-1}); \\ \vec{u}_1(r_k) = \begin{pmatrix} u_{11}(r_k) \\ \vdots \\ u_{1n}(r_k) \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тому що  $T = P \Delta P$ ,  $P = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left\| \sin \frac{ij\pi}{(n+1)} \right\|_{i,j=1}^n$ ,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_k = -4\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

то домножаючи (6) зліва на  $P$  і позначаючи  $\vec{P}\tilde{u}_1(r_k) = \vec{u}_1(r_k)$ , одержимо

$$\vec{R}\tilde{u}_1(r_k) + \gamma^2 \Lambda \tilde{u}_1(r_k) = 0, \quad (7)$$

що після підстановки оператора  $R$  і  $r_k = kh$  дає

$$(k+1)\tilde{u}_{1i}(r_{k+1}) - (2k^2 + k + 4)\tilde{u}_{1i}(r_k) + k^2\tilde{u}_{1i}(r_{k-1}) + \gamma^2 k^2 \lambda_i \tilde{u}_{1i}(r_k) = 0, \quad (8)$$

$$(i=1, 2, \dots, n), \quad (k=1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, \beta-1, \beta+1, \dots, m).$$

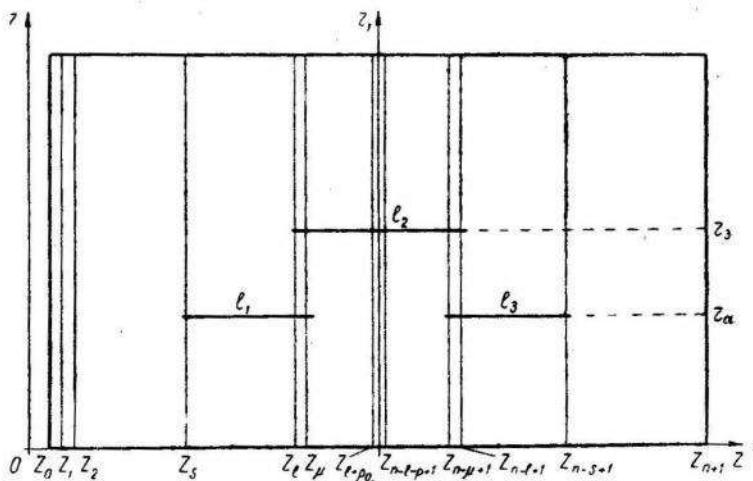


Рис. 1.

Розіб'ємо тепер прямокутник  $D$  прямими  $r=r_\alpha$  і  $r=r_\beta$  на частини  $D_1, D_2, D_3$  так, щоб в  $D_1$  ввійшли нижні сторони поверхонь електродів  $l_1$  і  $l_3$ , в  $D_2$  — верхні сторони поверхонь електродів  $l_1, l_3$  та нижня сторона поверхні електроду  $l_2$ , в  $D_3$  — верхня сторона поверхні електроду  $l_2$ .

Позначимо тепер через  $q(r_\alpha, z)$  і  $q(r_\beta, z)$  стрибки функції  $u_1(r, z)$  у напрямі осі  $or$  на прямих  $r=r_\alpha$  і  $r=r_\beta$  відповідно, а через  $\sigma(r_\alpha, z)$  і  $\sigma(r_\beta, z)$  стрибки  $\frac{\partial u_1}{\partial r}$  у напрямі  $or$  на прямих  $r=r_\alpha$  і  $r=r_\beta$  відповідно, тобто

$$q(r_k, z) = u_1(r_k + 0, z) - u_1(r_k - 0, z) \quad (k=\alpha, \beta);$$

$$\sigma(r_k, z) = \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=r_k+0} - \frac{\partial u_1}{\partial r} \Big|_{r=r_k-0} \quad (k=\alpha, \beta). \quad (9)$$

Тоді, очевидно, згідно з попередніми позначеннями, покриттям області  $D$  сіткою прямих, симетричністю та постановкою задачі (4), (5), матимемо для  $k=\alpha, \beta$  стовпці

$$\vec{q}(r_\alpha) = (0, \dots, 0, q_s(r_\alpha), \dots, q_\mu(r_\alpha), 0, \dots, 0, q_\mu(r_\alpha), \dots, q_s(r_\alpha), 0, \dots, 0);$$

$$\begin{aligned}\vec{q}(r_\beta) &= (0, \dots, 0, q_l(r_\beta), \dots, q_{l+p}(r_\beta), q_{l+p}(r_\beta), \dots, q_l(r_\beta), 0, \dots, 0); \\ \vec{\sigma}(r_\alpha) &= (0, \dots, 0, \sigma_s(r_\alpha), \dots, \sigma_p(r_\alpha), 0, \dots, 0, \sigma_p(r_\alpha), \dots, \sigma_s(r_\alpha), 0, \dots, 0); \quad (10) \\ \vec{\sigma}(r_\beta) &= (0, \dots, 0, \sigma_l(r_\beta), \dots, \sigma_{l+p}(r_\beta), \dots, \sigma_{l+p}(r_\beta), \dots, \sigma_l(r_\beta), 0, \dots, 0),\end{aligned}$$

причому ненульові елементи стовпців  $\vec{q}(r_k)$  для  $k=\alpha, \beta$  знайдуться за формулами

$$\vec{q}(r_k z) = a_\eta \left( \frac{\partial u_0}{\partial n^+} - \frac{\partial u_0}{\partial n^-} \right) \Big|_{r=r_k} \quad \eta = 1, 2, \quad (11)$$

при відомому розв'язку задачі (2), (3).

Якщо позначити через  $\tilde{q}(r_\alpha, z)$  і  $\tilde{q}(r_\beta, z)$  стрибки функції  $\tilde{u}_1(r, z)$ , а через  $\tilde{\sigma}(r_\alpha, z)$  і  $\tilde{\sigma}(r_\beta, z)$  стрибки  $\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial r}$  при переході у напрямі осі *or* через прямі  $r=r_\alpha$  і  $r=r_\beta$ , то одержимо

$$\begin{aligned}\tilde{q}_i(r_k) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} q_j(r_k); \\ (k &= \alpha, \beta) \quad (12)\end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_i(r_k) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \sigma_j(r_k).$$

Отже, ми приходимо до такої задачі спряження: знайти розв'язки рівнянь (8) у вигляді

$$\tilde{u}_{ii}(r_k) = \begin{cases} \tilde{u}_{ii}^{(1)}(r_k) & 1 \leq k \leq \alpha - 1; \\ \tilde{u}_{ii}^{(2)}(r_k) & \alpha + 1 \leq k \leq \beta - 1; \\ \tilde{u}_{ii}^{(3)}(r_k) & \beta + 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

і які б задоволяють умови

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{ii}^{(1)}(r_0) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} u_{ij}^{(1)}(r_0) = 0; \\ \tilde{u}_{ii}^{(2)}(r_\alpha) - \tilde{u}_{ii}^{(1)}(r_\alpha) &= \tilde{q}_i(r_\alpha), \quad \frac{d\tilde{u}_{ii}^{(2)}}{dr} \Big|_{r=r_\alpha} - \frac{d\tilde{u}_{ii}^{(1)}}{dr} \Big|_{r=r_\alpha} = \tilde{\sigma}_i(r_\alpha); \\ \tilde{u}_{ii}^{(3)}(r_\beta) - \tilde{u}_{ii}^{(2)}(r_\beta) &= \tilde{q}_i(r_\beta), \quad \frac{d\tilde{u}_{ii}^{(3)}}{dr} \Big|_{r=r_\beta} - \frac{d\tilde{u}_{ii}^{(2)}}{dr} \Big|_{r=r_\beta} = \tilde{\sigma}_i(r_\beta); \quad (13) \\ \tilde{u}_{ii}^{(3)}(r_{m+1}) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} u_{ij}^{(3)}(r_{m+1}) = 0.\end{aligned}$$

Загальний розв'язок рівнянь (8) для вказаних проміжків зміни  $k$  матиме вигляд

$$\tilde{u}_{1i}(r_k) = \begin{cases} \tilde{u}_{1i}^{(1)}(r_k) = A_i^{(1)} P_i(r_k) + B_i^{(1)} T_i(r_k) & 1 \leq k \leq \alpha - 1; \\ \tilde{u}_{1i}^{(2)}(r_k) = A_i^{(2)} P_i(r_k) + B_i^{(2)} T_i(r_k) & \alpha + 1 \leq k \leq \beta - 1; \\ \tilde{u}_{1i}^{(3)}(r_k) = A_i^{(3)} P_i(r_k) + B_i^{(3)} T_i(r_k) & \beta + 1 \leq k \leq m, \end{cases} \quad (14)$$

де  $P_i(r_k)$  та  $T_i(r_k)$  — власні функції дискретного аргументу рівняння (8), які одержуються з умов

$$\begin{aligned} P_i(r_0) &= 0, \quad P_i(r_1) = 1; \\ T_i(r_0) &= 1, \quad T_i(r_1) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

за рекурентними формулами

$$\begin{aligned} P_i(r_k) &= \frac{2(k-1)^2 + k + 3 - \lambda_i \gamma^2 (k-1)^2}{(k-1)k} P_i(r_{k-1}) - \frac{k-1}{k} P_i(r_{k-2}); \\ T_i(r_k) &= \frac{2(k-1)^2 + k + 3 - \lambda_i \gamma^2 (k-1)^2}{(k-1)k} T_i(r_{k-1}) - \frac{k-1}{k} T_i(r_{k-2}). \end{aligned} \quad (16)$$

Задовольняючи умови (13), одержимо

$$\begin{aligned} B_i^{(1)} &= 0, \quad B_i^{(2)} = \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\alpha) P_i(r_\alpha) - \tilde{q}_i(r_\alpha) \frac{dP_i}{dr} \Big|_{r=r_\alpha}}{\Delta_{i,\alpha+1}}; \\ B_i^{(3)} &= \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\beta) P_i(r_\beta) - \tilde{q}_i(r_\beta) \frac{dP_i}{dr} \Big|_{r=r_\beta}}{\Delta_{i,\beta+1}} + \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\alpha) P_i(r_\alpha) - \tilde{q}_i(r_\alpha) \frac{dP_i}{dr} \Big|_{r=r_\alpha}}{\Delta_{i,\alpha+1}}; \\ A_i^{(3)} &= -B_i^{(3)} \frac{T_i(r_{m+1})}{P_i(r_{m+1})}, \quad A_i^{(2)} = A_i^{(3)} + \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\beta) T_i(r_\beta) - \tilde{q}_i(r_\beta) \frac{dT_i}{dr} \Big|_{r=r_\beta}}{\Delta_{i,\beta+1}}; \\ A_i^{(1)} &= A_i^{(2)} + \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\alpha) T_i(r_\alpha) - \tilde{q}_i(r_\alpha) \frac{dT_i}{dr} \Big|_{r=r_\alpha}}{\Delta_{i,\alpha+1}}, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\Delta_{i,k+1} = \begin{vmatrix} P_i(r_k) & T_i(r_k) \\ \frac{dP_i}{dr} \Big|_{r=r_k} & \frac{dT_i}{dr} \Big|_{r=r_k} \end{vmatrix} \quad \text{для } k = \alpha, \beta.$$

Легко встановити, заміняючи похідні кінцево-різницевими відношеннями і використовуючи формули (16), що

$$A_{i,k+1} = -\frac{1}{h(k+1)},$$

Враховуючи, що  $PP=E$  (одинична матриця), маємо

$$\vec{P}\tilde{\vec{u}}_1 = P\vec{P}\tilde{\vec{u}}_1(r_k) = \vec{u}_1(r_k),$$

тобто

$$u_{1i}(r_k) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \tilde{u}_{1j}(r_k). \quad (18)$$

Прирівнюючи тепер, згідно з (5'),

$$u_{1i}^{(1)}(r_\alpha) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \tilde{u}_{1j}^{(1)}(r_\alpha) = a_1 \frac{\partial u_0}{\partial n^-} \Big|_{r=r_\alpha} \quad i=s, \dots, \mu; \quad (19)$$

$$u_{1i}^{(2)}(r_\beta) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \tilde{u}_{1j}^{(2)}(r_\beta) = a_2 \frac{\partial u_0}{\partial n^-} \Big|_{r=r_\beta} \quad i=l, \dots, l+p$$

і використовуючи при цьому формулі (14), (17), (12) та (11), одержимо систему  $\mu+p-s+2$  рівнянь для визначення

$$\sigma_s(r_\alpha), \dots, \sigma_\mu(r_\alpha), \sigma_l(r_\beta), \dots, \sigma_{l+p}(r_\beta).$$

Після знаходження останніх невідомих наближений розв'язок розглядуваної задачі набере вигляду

$$u_{1i}(r_k) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \begin{cases} A_i^{(1)} P_i(r_k) + B_i^{(1)} T_i(r_k) \\ 1 \leq k \leq \alpha - 1 \\ A_i^{(2)} P_i(r_k) + B_i^{(2)} T_i(r_k) \\ \alpha + 1 \leq k \leq \beta - 1 \\ A_i^{(3)} P_i(r_k) + B_i^{(3)} T_i(r_k) \\ \beta + 1 \leq k \leq m \end{cases} \sin \frac{ij\pi}{n+1}. \quad (20)$$

Знаходження  $P_i(r_k)$  та  $T_i(r_k)$  за формулами (16) при великих  $i, k$  приводить до переповнення розрядної сітки ЕОМ і додаткових затрат машинного часу. Щоб уникнути цього недоліку, комбінації функцій  $P_i(r_k)$  та  $T_i(r_k)$ , що входять в систему рівнянь (19) і формулі (20), перетворюються за допомогою ланцюгових дробів.

За викладеною схемою на машині «Мінск-2» були розв'язані задачі (2), (3) та (4), (5), при цьому взято  $s=148$ ,  $\mu=180$ ,  $l=180$ ,  $l+p=184$ ,  $n=368$ ,  $m=169$ ,  $a_1=1$ ,  $a_2=1.7$ ,  $h_1=0.15$ ,  $h=0.05$ .

Розв'язки обох задач знайдено в 1300 вузлах сітки, які розміщені в області лінзи ( $148 < i < 184$ ;  $0 < k < 35$ ) і використовуються для знаходження траекторій руху електронів. Частина поля потенціалів — розв'язків задач (2), (3) і (4), (5) зображена в таблицях.

Методом Штермера були знайдені траекторії руху електронів осесиметричної лінзи, а також при різних значеннях параметра  $\lambda$  і кута  $\Theta$  з використанням формулі

$$u(r, z, \Theta) = u_0(r, z) + \lambda u_1(r, z) \cos 2\Theta, \quad (1')$$

$u_{0i}(r_k)$ 

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6
172	0,98708	0,98718	0,98736	0,98753	0,98800	0,98844
173	0,98152	0,98165	0,98191	0,98229	0,98280	0,98342
174	0,97364	0,97382	0,97417	0,97469	0,97539	0,97625
175	0,96259	0,96282	0,96329	0,96399	0,96492	0,96608
176	0,94733	0,94763	0,94822	0,94911	0,95031	0,95180
177	0,92676	0,92711	0,92780	0,92885	0,93027	0,93206
178	0,89996	0,90032	0,90104	0,90212	0,90361	0,90551
179	0,86679	0,86707	0,86764	0,86851	0,86973	0,87132
180	0,82856	0,82866	0,82885	0,82915	0,82961	0,83023
181	0,78865	0,78847	0,78809	0,78783	0,78678	0,78586
182	0,75214	0,75166	0,75069	0,74922	0,74723	0,74471
183	0,72433	0,72362	0,72219	0,72002	0,71709	0,71335
184	0,70933	0,70850	0,70683	0,70429	0,70087	0,69651

 $u_{1i}(r_k)$ 

$i \backslash k$	1	2	3	4	5
172	-0,00011	-0,00037	-0,00080	-0,00137	-0,00208
173	-0,00016	-0,00055	-0,00118	-0,00208	-0,00309
174	-0,00024	-0,00082	-0,00175	-0,00301	-0,00458
175	-0,00035	-0,00121	-0,00257	-0,00443	-0,00676
176	-0,00050	-0,00173	-0,00370	-0,00639	-0,00978
177	-0,00068	=0,00240	-0,00513	-0,00888	-0,01364
178	-0,00088	-0,00309	-0,00665	-0,01157	-0,01787
179	-0,00103	-0,00361	-0,00776	-0,01359	-0,02112
180	-0,00109	-0,00363	-0,00784	-0,01372	-0,02141
181	-0,00086	-0,00300	-0,00650	-0,01130	-0,01755
182	-0,00057	-0,00198	-0,00423	-0,00733	-0,01125
183	-0,00029	-0,00099	-0,00210	-0,00356	-0,00530
184	-0,00012	-0,00042	-0,00085	-0,00135	-0,00182

траекторії руху електронів лінзи, збуреної симетричною еліптичною дисторсією. Останні можуть бути використані для визначення оптичних характеристик таких лінз.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Є. С. Дорожовський, В. Г. Костенко. Поле потенціалу електронної лінзи з порушенням осьовою симетрією. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.

2. Г. Н. Пологий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киев. ун-та, 1962.

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, В. Г. КОСТЕНКО

#### ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ДИСТОРСИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ЛИНЗЫ

(ре зю м е)

В работе дается схема нахождения потенциала электронной линзы, мало отличающейся от симметрической (случай эллиптической дисторсии) с применением собственных функций дискретного аргумента. Приводится рассчитанное поле как осесимметрической линзы, так и возмущенной эллиптической дисторсией.