ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 539. 384

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Л. Й. ОЩИПКО

ЗГИН ТОНКОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ПЛИТИ З КРУГЛИМ ОПОРНИМ РЕБРОМ ЖОРСТКОСТІ

Розглянемо задачу про довільний згин круглої плити кінцевих розмірів, вільно опертої вздовж внутрішнього кругового опорного ребра жорсткості. Розв'язок записується через комплексні потенціали, для визначення яких використовуються умови опертя, підкріплення і спряження на ребрі, а також умови першої основної задачі на зовнішньому контурі плити. Методом інтегралів типу Коші задача звелась до системи двох алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих постійних коефіцієнтів розкладу шуканих функцій в комплексні ряди Фур'є.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається тонка неоднорідча плита, серединна площина якої займає внутрішність кола L радіуса R_1. Плита вільно оперта вздовж підкріплюючого тонкого ребра жорсткості по колу Γ радіуса R. Поведінка опорного ребра описується теорією малих деформацій тонких криволінійних стержнів. Допускається, що одна з головних центральних осей інерції поперечного перерізу ребра лежить в серединній площині плити xOy. Плита навантажена довільним поперечним навантаженням $q_k(x, y)$ $(k=1, 2)$ відповідно в областях S_1 $(r \leqslant R)$ і S_2 $(R \leqslant r \leqslant R_1)$. Вздовж Γ на плиту діють згинаючі моменти $m_0(\Theta)$, а по L — згинаючі моменти $m_2(\Theta)$ і перерізуючі сили p_2 (Θ) $(r, \Theta$ — полярні координати з полюсом в центрі плити). Циліндрична жорсткість плити дорівнює $D_k = \text{const}$ в областях S_k $(k=1, 2)$ відповідно.

Розв'язок основного диференціального рівняння згину плит

$$D_k \Delta\Delta w_k = q_k(x, y) \qquad (k = 1, 2) \tag{1.1}$$

запишемо у вигляді

$$w_k = 2\,\mathrm{Re}\,[\bar{z}\,\varphi_k^*(z) + \chi_k^*(z)] + w_{0k}(\bar{z}, z) \qquad (k = 1, 2). \tag{1.2}$$

Тут w_k — прогин плити в області S_k $(k=1, 2)$, а $\varphi_k^*(z)$ і $\chi_k^*(z)$ — аналітичні функції в тій же області; $w_{0k}(z, \bar{z})$ — будь-які часткові інтеграли рівняння (1.1). Без обмеження загальності приймемо, що

$$w_{01} = w_{02}; \; \frac{\partial w_{01}}{\partial r} = \frac{\partial w_{02}}{\partial r} \quad \text{на } \Gamma \tag{1.3}$$

На контурі Г шукані прогини повинні задовольняти такі умови підкріплення, опертя і спряження (див. [3], стор. 110):

$$(\delta_1+\nu_1-\lambda\nu_2)\frac{\partial w_1}{\partial r}+R\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2}-\lambda R\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2}-\delta_2\frac{\partial^3 w_1}{\partial r\,\partial\Theta^2}=-\frac{R}{D_1}m_0(\Theta); \quad (1.4)$$

$$w_1=0,\ w_2=0; \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial r}=\frac{\partial w_2}{\partial r}, \quad (1.6)$$

де $\lambda=\frac{D_2}{D_1}$, а $\delta_1=\frac{A}{RD_1}$ і $\delta_2=\frac{C}{RD_1}$ — відносні жорсткості опорного ребра на згин і кручення.

Крім того, на зовнішній границі плити L повинна виконуватись умова першої основної задачі (див. [3], стор. 23).

$$-\varkappa\overline{\varphi_2^*(z)}+z\overline{\varphi_2^{*\prime}(z)}+\overline{\chi_2^{*\prime}(z)}=F_2(z)-iC_1\bar{z}+C_2, \quad (1.7)$$

де $\varkappa=(3+\nu_2)/(1-\nu_2)$

$$F_2(z)=\frac{1}{2D_2(1-\nu_2)}\left\{\int_0^s\left[m_2(s_1)-i\int_0^{s_1}p_2(s_2)\,ds_2\right]d\bar{z}-i\int_0^s\left[m^\circ(s_1)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-i\int_0^{s_1}p^\circ(s_2)\,ds_2\right]d\bar{z}.\right. \quad (1.8)$$

Тут $m^0(s)$ і $p^0(s)$ позначають момент і перерізуючу силу, що відповідають частковому розв'язку w_{02}.

Введемо заміну $z=R\zeta$ і позначимо

$$\varphi_k^*(z)=\varphi_k^*(R\zeta)=\varphi_k(\zeta),\ \chi_k^*(z)=\chi_k^*(R\zeta)=R\chi_k(\zeta). \quad (1.9)$$

При такій заміні коло Г перейде в коло γ одиничного радіуса, а коло L — в коло l радіуса $\eta=\frac{R_1}{R}$.

Підставляючи вирази (1.2) в умови (1.4), (1.5) і враховуючи позначення (1.9) та співвідношення (1.9) статті [5], отримуємо

$$2\mathrm{Re}\,\{\delta_2\sigma^2\varphi_1'''(\sigma)+2\delta_2\sigma\varphi_1''(\sigma)+[\delta_1-\delta_2+\lambda(1-\nu_2)+3+\nu_1]\,\varphi_1'(\sigma)+$$

$$+[\delta_1+\delta_2+\lambda(1-\nu_2)-(1-\nu_1)]\frac{1}{\sigma}\varphi_1(\sigma)+\delta_2[\sigma\chi_1'''(\sigma)+3\chi_1''(\sigma)]\,\sigma^2+$$

$$+[\delta_1+\delta_2+\lambda(1-\nu_2)-(1-\nu_1)]\,\sigma\chi_1''(\sigma)-4\lambda\varphi_2'(\sigma)=F_1(\sigma) \text{ на } \gamma, \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{\sigma}\varphi_1(\sigma)+\chi_1(\sigma)+\sigma\overline{\varphi_1(\sigma)}+\overline{\chi_1(\sigma)}=0, \text{ на } \gamma, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{\sigma}\varphi_2(\sigma)+\chi_2(\sigma)+\sigma\overline{\varphi_2(\sigma)}+\overline{\chi_2(\sigma)}=0 \text{ на } \gamma, \quad (1.12)$$

де $\sigma=e^{i\Theta}$,

$$F_1(\sigma) = -m_0(\Theta)\frac{R}{D_1} - \left[(\delta_1 + \nu_1 - \lambda\nu_2)\frac{\partial w_{01}}{\partial r} + R\frac{\partial^2 w_{01}}{\partial r^2} - \right.$$

$$\left. - \lambda R\frac{\partial^2 w_{02}}{\partial r^2} - \delta_2\frac{\partial^3 w_{01}}{\partial r\,\partial\Theta^2}\right]_\Gamma.$$

Для перетворення умови (1.6) використаємо той факт, що

$$\frac{\partial w_1}{\partial\Theta} = 0; \quad \frac{\partial w_2}{\partial\Theta} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{1.13}$$

і складемо таку комплексну комбінацію:

$$\frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial w_1}{\partial\Theta} = \frac{\partial w_2}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial w_2}{\partial\Theta} \quad \text{на } \Gamma. \tag{1.14}$$

Одночасно згадуючи, що

$$\frac{\partial w_k}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial w_k}{\partial\Theta} = 2\left[\varphi_k'(\sigma) + \sigma\chi_k'(\sigma) + \sigma\overline{\varphi_k(\sigma)}\right] + \frac{\partial w_{0k}}{\partial r} - \frac{i}{r}\frac{\partial w_{0k}}{\partial\Theta}, \tag{1.15}$$

підставимо співвідношення (1.15) в (1.14), враховуючи умову (1.3). У результаті отримаємо

$$\varphi_1'(\sigma) + \sigma\chi_1'(\sigma) + \sigma\overline{\varphi_1(\sigma)} = \varphi_2'(\sigma) + \sigma\chi_2'(\sigma) + \sigma\overline{\varphi_2(\sigma)} \quad \text{на } \gamma. \tag{1.16}$$

Граничну умову (1.7) запишемо у вигляді

$$-\varkappa\,\overline{\varphi_2(t)} + \frac{\eta^2}{t}\varphi_2'(t) + \chi_2'(t) = F_2^*(t) - iC_1\frac{\eta^2}{t} + C_2 \text{ на } l. \tag{1.17}$$

Тут t афікс точки на колі l, $\eta = \frac{R_1}{R}$,

$$F_2^*(t) = F_2(R\zeta)|_l.$$

Отже, граничними умовами тепер є (1.10)—(1.12), (1.15) і (1.17).

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Враховуючи умову (1.3), зобразимо функції $\varphi_2(\zeta)$ і $\chi_2(\zeta)$ у вигляді

$$\varphi_2(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta),\ \chi_2(\zeta) = \chi_0(\zeta) + \chi_*(\zeta) + B\ln\zeta, \tag{2.1}$$

де B — дійсна постійна; $\varphi_0(\zeta)$ і $\chi_0(\zeta)$ — функції, аналітичні в області $|\zeta| < \eta$; $\varphi_*(\zeta)$ і $\chi_*(\zeta)$ — функції, аналітичні в області $|\zeta| \geqslant 1$.

Домножаючи умови (1.11), (1.12), (1.16) і (1.10) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ і інтегруючи їх по γ при $|\zeta| < 1$ [2], отримуємо

$$\chi_1(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}\varphi_1(\zeta); \tag{2.2}$$

$$a_1 + \alpha_0 = 0; \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{\zeta}\varphi_0(\zeta) + \chi_0(\zeta) + \zeta\bar{\varphi}_*\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \bar{\chi}_*\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 0; \tag{2.4}$$

$$d_1+b_0=0; \tag{2.5}$$

$$\zeta\bar{\varphi}_*\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\varphi_1'(\zeta)+\zeta\chi_1'(\zeta)-\varphi_0'(\zeta)-\zeta\chi_0'(\zeta)-\frac{B}{2}; \tag{2.6}$$

$$2(a_1-d_1)=B; \tag{2.7}$$

$$\delta_2\zeta^2\varphi_1'''(\zeta)+2\delta_2\zeta\varphi_1''(\zeta)+[\delta_1-\delta_2+\lambda(1-\nu_2)+3+\nu_1]\varphi_1'(\zeta)+$$

$$+[\delta_2+\delta_1+\lambda(1-\nu_2)-(1-\nu_1)]\left[\frac{1}{\zeta}\varphi_1(\zeta)+\zeta\chi_1'(\zeta)\right]+$$

$$+\delta_2[\zeta^3\chi_1'''(\zeta)+3\zeta^2\chi_1''(\zeta)]-4\lambda\left[\varphi_0'(\zeta)+d_1+\bar{\varphi}_*'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]+$$

$$+2[\delta_1+\lambda(1-\nu_2)+1+\nu_1]a_1=F(\zeta); \tag{2.8}$$

$$[\delta_1+\lambda(1-\nu_2)+1+\nu_1]a_1-2\lambda d_1=\frac{1}{4}F(0), \tag{2.9}$$

де

$$a_1=\varphi_1'(0);\ \alpha_0=\chi_1(0);\ d_1=\varphi_0'(0);$$

$$b_0=\chi_0(0);\ F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}F_1(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}. \tag{2.10}$$

При цьому внаслідок відомої довільності при визначенні шуканих функцій було прийнято, що

$$\varphi_1(0)=\operatorname{Im}\varphi_1'(0)=\operatorname{Im}\chi_1(0)=0;$$

$$\varphi_0(0)=\operatorname{Im}\varphi_0'(0)=\operatorname{Im}\chi_0(0)=0. \tag{2.11}$$

Диференціюючи співвідношення (2.2) і (2.6), підставляємо їх в (2.8) і отримуємо звичайне диференціальне рівняння на комплексній площині для функції $\varphi_1(\zeta)$:

$$[(\delta_2+\delta_1)+\lambda(1-\nu_2)-(1-\nu_1)-4\lambda]\frac{1}{\zeta}\varphi_1(\zeta)+(2-\delta_2+2\lambda)\varphi_1'(\zeta)+$$

$$+\delta_2\zeta\varphi_1''(\zeta)=G(\zeta)-\lambda B+2\lambda[\zeta\varphi_0''(\zeta)+\zeta^2\chi_0''(\zeta)]. \tag{2.12}$$

Тут

$$G(\zeta)=\frac{1}{8\pi i}\int\limits_{\gamma}F_1(\sigma)\frac{\sigma+\zeta}{\sigma(\sigma-\zeta)}d\sigma.$$

Розв'язуючи (2.12) так само, як в [5], знаходимо

$$\varphi_1(\zeta)=\frac{1}{\delta_2(\mu_2-\mu_1)}\left\{\zeta^{\mu_2+1}\int\limits_0^{\zeta}[G(\zeta)-\lambda B]\zeta^{-(\mu_2+1)}d\zeta-\right.$$

$$\left.-\zeta^{\mu_1+1}\int\limits_0^{\zeta}[G(\zeta)-\lambda B]\zeta^{-(\mu_1+1)}d\zeta\right\}+$$

$$+\frac{2\lambda}{\delta_2(\mu_2-\mu_1)}\left\{\zeta^{\mu_2+1}\int_0^\zeta[\zeta\varphi_0''(\zeta)+\zeta^2\chi_0''(\zeta)]\zeta^{-(\mu_2+1)}d\zeta-\right.$$

$$\left.-\zeta^{\mu_1+1}\int_0^\zeta[\zeta\varphi_0''(\zeta)+\zeta^2\chi_0''(\zeta)]\zeta^{-(\mu_1+1)}d\zeta\right\}, \qquad (2.14)$$

де

$$\mu_{1,2}=\frac{1}{\delta_2}\left\{-(1+\lambda)\pm\sqrt{(1+\lambda)^2-\delta_2[\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+(1+\nu_1)]}\right\}. \qquad (2.15)$$

З рівнянь (2.3), (2.5), (2.7) і (2.8) визначаємо постійні α_0, a_1, b_0, d_1 у вигляді

$$a_1=-\alpha_0=\frac{1}{4}\cdot\frac{F(0)-4\lambda B}{\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+(1+\nu_1)};$$

$$d_1=-b_0=\frac{1}{\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+(1+\nu_1)}\left[\frac{1}{4}F(0)-\frac{\delta_1+\lambda(1-\nu_2)+(1+\nu_1)}{2}B\right]. \qquad (2.16)$$

Зауважимо, що після визначення коефіцієнта B в чисельнику (2.16) з'являється множник, рівний знаменнику.

Зобразимо тепер всі функції $\varphi_1(\zeta)$, $\chi_1(\zeta)$; $\varphi_0(\zeta)$, $\chi_0(\zeta)$; $\varphi_*(\zeta)$, $\chi_*(\zeta)$ у вигляді комплексних рядів Фур'є з невідомими постійними коефіцієнтами

$$\varphi_1(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}\zeta^{n+1},\quad \chi_1(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\zeta^n; \qquad (2.17)$$

$$\varphi_0(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}d_{n+1}\zeta^{n+1},\quad \chi_0(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^n; \qquad (2.18)$$

$$\varphi_*(\zeta)=\sum_{n=2}^{\infty}\beta_{n-1}\zeta^{1-n},\quad \chi^*(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\zeta^{-n}. \qquad (2.19)$$

Підставляючи розклад (2.18) у вираз (2.14), отримуємо

$$\varphi_1(\zeta)=\left[A_1-\frac{\lambda B}{\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+(1+\nu_1)}\right]\zeta-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}\zeta^{n+1}, \qquad (2.20)$$

де

$$a_{n+1}=\frac{2\lambda n}{\Delta_n}[(n+1)d_{n+1}+(n-1)b_n]+A_{n+1}; \qquad (2.21)$$

$$\Delta_n=\delta_2n^2+2n(1+\lambda)+\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+(1+\nu_1);$$

A_{n+1} — коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є відомих членів правої частини (2.14), які виражаються через функцію $G(\zeta)$.

Легко перевірити, що, як і слід було чекати, коефіцієнт при ζ в (2.20) дорівнює раніше визначеному коефіцієнту a_1 (2.16), якщо розписати значення A_1. Використовуючи співвідношення (2.2), (2.4) і (2.6), виразимо всі функції через $\varphi_0(\zeta)$ і $\chi_0(\zeta)$. Тоді коефіцієнти відповідних рядів матимуть вигляд

$$a_{n+1} = -\alpha_n = A_{n+1} + \frac{2\lambda n}{\Delta_n}\left[(n+1)\,d_{n+1} + (n-1)\,b_n\right]$$

$$\bar{\beta}_{n-1} = a_{n+1} - (n+1)\,d_{n+1} - nb_n, \tag{2.22}$$

$$\bar{c}_n = -(d_{n+1} + b_n + \bar{\beta}_{n-1}),$$

$$\text{при } n \geqslant 2;$$

$$-\bar{c}_1 = d_2 + b_1. \tag{2.23}$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів d_{n+1} і b_n використаємо граничну умову (1.17), куди ми підставляємо вираз (2.1). В результаті отримуємо

$$-\varkappa\left[\overline{\varphi_0(t)} + \overline{\varphi_*(t)}\right] + \frac{\eta^2}{t}\left[\varphi_0'(t) + \varphi_*'(t)\right] +$$

$$+\left[\chi_0'(t) + \chi_*'(t)\right] + \frac{B}{t} = F_2^*(t) - iC_1\frac{\eta^2}{t} + C_2. \tag{2.24}$$

Отримане рівняння і комплексно спряжене до нього рівняння домножаємо на $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-\zeta}$ і інтегруємо їх по l при $|\zeta| < \eta$:

$$-\varkappa\bar{\varphi}_*\left(\frac{\eta^2}{\zeta}\right) + \frac{\eta^2}{\zeta}\varphi_0'(\zeta) - \frac{\eta^2 d_1}{\zeta} + \chi_0'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l F_2^*(t)\frac{dt}{t-\zeta} + C_2;$$

$$-\varkappa\varphi_0(\zeta) + \bar{d}_1\zeta + 2\bar{d}_2\eta^2 + \zeta\bar{\varphi}_*'\left(\frac{\eta^2}{\zeta}\right) + \bar{b}_1 + \bar{\chi}_*'\left(\frac{\eta^2}{\zeta}\right) +$$

$$+\frac{B}{\eta^2}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \overline{F_2^*(t)}\,\frac{dt}{t-\zeta} + iC_1\zeta + \bar{C}_2. \tag{2.25}$$

Підставляючи функції (2.18) і (2.19) в рівняння (2.25) і враховуючи співвідношення (2.22), отримуємо такі рівняння для визначення коефіцієнтів b_n і d_{n+1} та постійної B:

$$\left.\begin{aligned} 2\eta^2 d_2 + b_1 &= B_0 + C_2,\\ (1-\varkappa)\,d_1 + B\eta^{-2} &= \bar{B}_{-1}\,\eta^{-2} + iC_1,\\ -\bar{c}_1\,\varkappa\eta^4\,d_2 &= \bar{B}_{-2}; \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

$$\left.\begin{aligned} -\varkappa\eta^{2-2n}\bar{\beta}_{n-1} + (n+1)\,\eta^2 d_{n+1} + nb_n &= B_{n-1},\\ (n-1)(1-\eta^2)\bar{\beta}_{n-1} + a_{n+1} - (1+\varkappa\eta^{2(n+1)})\,d_{n+1} &= \bar{B}_{-(n+1)}. \end{aligned}\right\}\ (n \geqslant 2) \tag{2.27}$$

Тут використано розклад

$$F_2^*(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n t^n, \tag{2.28}$$

де B_n — відомі коефіцієнти.

З рівнянь (2.26) і (2.23) отримуємо

$$B=\frac{1+\nu}{2}\left[\frac{F(0)\,\eta^2}{\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+(1+\nu_1)}+\operatorname{Re}\overline{B}_{-1}\right]\times$$

$$\times\frac{\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+(1+\nu_1)}{(1+\nu_2)[\delta_1+\lambda(1-\nu_2)+(1+\nu_1)]\,\eta^2+(1-\nu_2)[\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+(1+\nu_1)]};\quad(2{,}29)$$

$$d_2=\frac{(\overline{B}_{-2}-A_2)\,\Delta_1}{4\lambda-(\varkappa\eta^4+1)\Delta_1};\quad b_1=\overline{B}_{-2}+\frac{(\overline{B}_{-2}-A_2)(\varkappa\eta^4-1)\,\Delta_1}{4\lambda-(\varkappa\eta^4+1)\,\Delta_1}.$$

Використовуючи співвідношення (2.22), з (2.27) отримуємо таку систему рівнянь для визначення d_{n+1} і b_n при $n\geqslant 2$:

$$[2\lambda n(n+1)-(\varkappa\eta^{2(n+1)}+1)\Delta_n+(n^2-1)(\eta^2-1)(\Delta_n-2\lambda n)]d_{n+1}+\quad(2.30)$$

$$+n(n-1)\{2\lambda+(\eta^2-1)[\Delta_n-2(n-1)\lambda]\}b_n=\{\overline{B}_{n+1}+[(n-1)\eta^2-n]A_{n+1}\}\Delta_n;$$

$$[(\eta^{2n}+\varkappa)\Delta_n-2\lambda n\varkappa](n+1)\,d_{n+1}+[(\eta^{2n-2}+\varkappa)\Delta_n-2\lambda(n-1)\varkappa]\,nb_n=$$

$$=(B_{n-1}\eta^{2n-2}+\varkappa A_{n+1})\,\Delta_n.$$

Визначник системи (2.30) має вигляд

$$I_n=-n\eta^{2n}\Delta_n\{2\lambda[2n(n^2-1)+(n-1)(1-\varkappa^2-n^2)\eta^2-2n\varkappa\eta^{-4n}-$$

$$-n^2(n+1)\eta^{-2}]+\Delta_n[(\varkappa\eta^{2n}+\eta^{-2})(\eta^{2n}+\varkappa\eta^2)-(n^2-1)(1-\eta^{-2})]\}.\quad(2.31)$$

Легко переконатись, що $I_n<0$.

При $\eta\to\infty$ і $B_n=0$ отримуємо нульовий розв'язок системи (2.30). У цьому випадку коефіцієнти d_{n+1} і b_n при $n\geqslant 2$ і коефіцієнт d_2 тотожньо дорівнюють нулеві, що і відповідає розв'язку для безмежної області.

Визначивши з (2.30) b_n і d_{n+1}, а із співвідношень (2.22) решту коефіцієнтів, отримуємо розв'язок поставленої задачі.

При часткових значеннях параметрів легко отримати розв'язки більш простих задач, які розглядаються в роботах [1] і [5].

Приклад. Як приклад розглянемо випадок дії зосередженої сили P в довільній точці $|\zeta_0|<1$. Без обмеження загальності будемо вважати, що точка ζ_0 лежить на дійсній осі. За часткові розв'язки w_{0k} візьмемо розв'язок задачі про дію зосередженої сили на жорстко защімлену по Γ безмежну плиту, а саме:

$$w_{01}=\frac{PR^2}{16\pi D_1}\left[(\zeta-\zeta_0)(\overline{\zeta}-\zeta_0)\ln\frac{(\zeta-\zeta_0)(\overline{\zeta}-\zeta_0)}{(1-\zeta\zeta_0)(1-\overline{\zeta}\zeta_0)}+(1-\zeta_0^2)(1-r^2)\right],$$

$$w_{02}=0.$$

Розв'язок поставленої задачі отримуємо у вигляді

$$w_1=\frac{PR^2}{16\pi D_1}\left\{(\zeta-\zeta_0)(\overline{\zeta}-\zeta_0)\ln\frac{(\zeta-\zeta_0)(\overline{\zeta}-\zeta_0)}{(1-\zeta\zeta_0)(1-\overline{\zeta}\zeta_0)}+(1-\zeta_0^2)(1-r^2)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{(1+\nu_2)[\delta_1+\lambda(1-\nu_2)+3+\nu_1]\,\eta^2+(1-\nu_2)[\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+3+\nu_1]}{(1+\nu_2)[\sigma_1+\lambda(1-\nu_2)+1+\nu_1]\,\eta^2+(1-\nu_2)[\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+1+\nu_1]}-\right.$$

$$\left.\left.-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta^{4n}\Delta_n}{I_n}n[(\varkappa+\eta^{-2(n+1)})(1+\varkappa\eta^{2-2n})-(n^2-1)\eta^{-2n}(1-\eta^{-2})]r^n\zeta_0^n\cos n\Theta\right)\right\};$$

$$w_2 = \frac{PR^2}{4\pi D_1}(1-\zeta_0^2)\left\{\frac{\Delta_1}{I_1}\zeta_0(1-r^2)(1+\varkappa)\varkappa(\eta^{-4}\frac{r}{\varkappa}+r^{-1})\cos\Theta -\right.$$

$$-\frac{(1+\nu_2)\eta^2\ln r+0,5(1-\nu_2)(r^2-1)}{(1+\nu_2)[\delta_1+\lambda(1-\nu_2)+(1+\nu_1)]\eta^2+(1-\nu_2)[\delta_1-\lambda(1+\nu_2)+(1+\nu_1)]}+$$

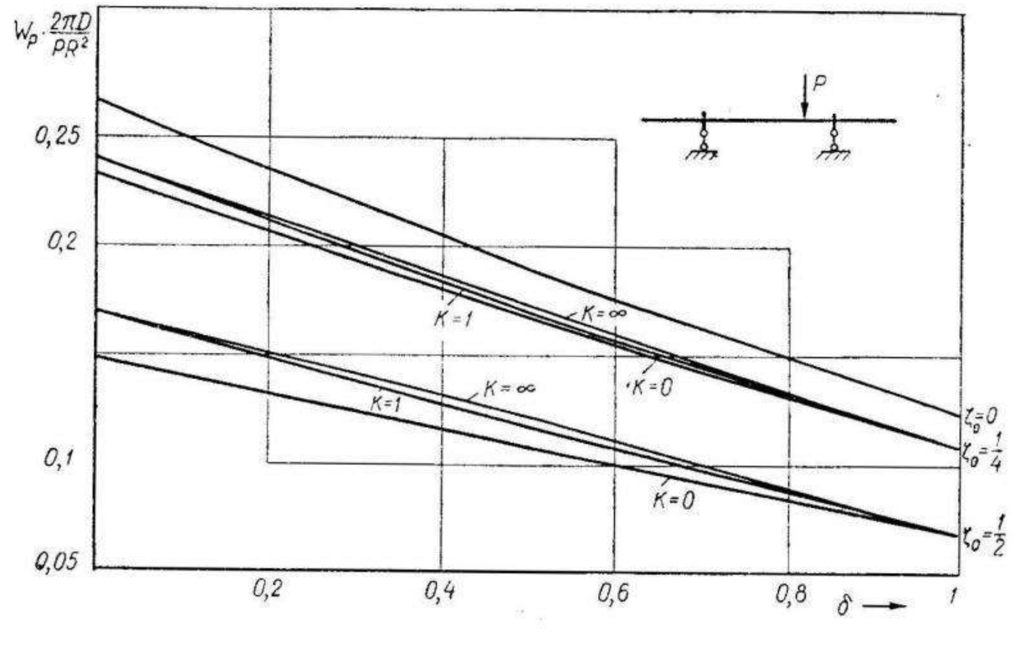
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta_n}{I_n}\zeta_0^n\{n[\varkappa\eta^{-2n}+n\eta^{-2}-(n-1)]r^{n+2}+n[(n+1)-n\eta^{-2}+$$

$$+\varkappa\eta^{2n}]r^{2-n}-[n(n+1)+(1-n^2-\varkappa^2)\eta^2+n\varkappa\eta^{-2n}]r^n+[n(n-1)+$$

$$\left.+(1-n^2-\varkappa^2)\eta^2-n\varkappa\eta^{2n}]r^{-n}\}\eta^{2n}\cos n\Theta\right\};$$

$$(I_1 = I_n \text{ при } n=1).$$

Якщо в цьому розв'язку покласти $\eta \to \infty$ (безмежна область) і $\delta_1=\delta_2=0$ (непідкріплена пластинка), отримаємо розв'язок, який збіга-



ється з [1]. Якщо ж покласти $\lambda=0$ і $\eta=1$, то w_1 дасть розв'язок для круглої плити з краєвим опорним ребром жорсткості [5].

На рисунку побудовані графіки прогину w_p під силою P в залежності від величини $\delta=\frac{\delta_1}{\delta_1+2}$ для трьох значень $k=\frac{\delta_1}{\delta_2}$ при $\nu=0,3$ і $\eta=2$. При порівнянні цих результатів з випадком, розгляненим в [5], що відповідає даному результату при $\eta=1$, можна відзначити, що при збільшенні $\eta=\frac{R_1}{R}$ жорсткість плити зростає. Прогин під силою при різних жорсткостях δ_1 і δ_2 зменшується від нуля при $\delta_1=\delta_2=\infty$ до 16% при $\delta_1=\delta_2=0$ в порівнянні з випадком $\eta=1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дандарс (I. Dundurs), Ли Тан-мин (Tung-Ming Lee). Изгиб сосредоточенной силой бесконечной пластинки, опертой по круговому контуру. Прикладная механика (Transactions of the ASME, русский перевод), т. 30, сер. E, № 2, 1963,
2. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
3. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., 1964.
4. Н. П. Флейшман, Л. Й. Ощипко. Згин тонкої плити з круглим опорним кільцем. Тези доповідей XXXIX наук. конференції ЛДУ, фіз.-матем. науки, 1965.
5. Н. П. Флейшман, Л. Й. Ощипко. Произвольный изгиб тонкой плиты с круглым опорным кольцом. Прикладная механика, т. II, вып. 4, 1966.

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Л. И. ОЩИПКО

ИЗГИБ ТОНКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛИТЫ С КРУГЛЫМ ОПОРНЫМ РЕБРОМ ЖЕСТКОСТИ

(резюме)

Решена задача о произвольном изгибе круглой плиты, свободно опертой по внутреннему опорному ребру жесткости. Решение записывается через комплексные потенциалы, для определения которых используются условия опирания, подкрепления и сопряжения на ребре, а также условия первой основной задачи на внешнем контуре плиты. Методом интегралов типа Коши задача свелась к системе двух алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных разложения искомых функций в комплексные ряды Фурье. Рассмотрен числовой пример изгиба плиты сосредоточенной силой, приложенной в точке внутри опорного кольца.