

Н. П. ФЛЕЙШМАН, О. В. МАРКОВСЬКА

ВПЛИВ РЕБРА ЖОРСТКОСТІ НА ЗГИН КРУГЛОЇ ПЛИТИ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ МОМЕНТАМИ

Розглядається згин круглої ізотропної тонкої плити з підкріпленням краєм. Пружне ребро, яке підкріплює контур γ плити, є тонким стержнем сталого перетину. Плита перебуває під дією зосереджених моментів, які прикладені до краю. Розв'язок знайдено у замкнутому вигляді, що дозволяє дослідити задачу якісно і кількісно. В іншій постановці розв'язок аналогічних задач методом рядів Фур'є одержаний в монографії [1]. Вплив криволінійних ребер жорсткості на згин плит при різних інших навантаженнях досліджено в працях [4, 7, 8] та ін. [див. огляд 3].

1. Жорсткості на згин (A) та кручення (C) підкріплюючого ребра та циліндрична жорсткість D плити вважаються сталими величинами. Бігармонічна функція прогинів w шукається у вигляді

$$w = w_0 + w_1, \quad (1.1)$$

де w_0 — відомий основний прогин плити при відсутності ребра жорсткості, а w_1 — шуканий додатковий прогин, який обумовлений наявністю підкріплюючого ребра.

Без обмеження загальності прийемо радіус плити за одиницю. За формулою Гурса маємо

$$w_k = 2 \operatorname{Re} \left[\bar{\zeta} \varphi_k(\zeta) + \int \psi_k(\zeta) d\zeta \right] \quad (k = 0, 1). \quad (1.2)$$

Тут $\varphi_k(\zeta)$ та $\psi_k(\zeta)$ — функції комплексного змінного $\zeta = x + iy = \rho e^{i\theta}$, які голоморфні всередині γ . Напруження та деформації плити для основного та додаткового напружених станів виражаються відповідно через функції $\varphi_k(\zeta)$ та $U_k(\zeta) = \varphi_k'(\zeta) + \zeta \psi_k(\zeta)$.

Як показано в [5], визначення шуканих функцій $\varphi_1(\xi)$ і $U_1(\xi)$ зводиться до інтегрування системи двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку із змінними коефіцієнтами на комплексній площині:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(\zeta) + \alpha_{11} \zeta^{-1} \varphi_1(\zeta) + \alpha_{12} U_1(\zeta) &= V_1; \\ U_1'(\zeta) + \alpha_{21} \zeta^{-2} \varphi_1(\zeta) + \alpha_{22} \zeta^{-1} U_1(\zeta) &= V_2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Сталі коефіцієнти α_{ij} виражаються через відносні жорсткості підкріплюючого ребра на згин та кручення

$$\delta_1 = \frac{A}{D}; \quad \delta_2 = \frac{C}{D} \quad (1.4)$$

таким чином:

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \frac{3+\nu}{2} \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right); \quad \alpha_{21} = \frac{3+\nu}{2} \left(\frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1} \right); \\ \alpha_{12} &= \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1} \right); \quad \alpha_{22} = \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) - 1.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Праві частини рівнянь (1.3) мають вигляд

$$\begin{aligned}V_1 &= V_1^0 + \bar{a}_1(\alpha_{21} + \alpha_{22}); \\ \zeta V_2 &= V_2^0 + \bar{a}_1(\alpha_{11} + \alpha_{12} + 1),\end{aligned}\quad (1.6)$$

де у випадку довільного статично зрівноваженого навантаження по контуру плити матимемо

$$V_1^0 = -\varphi_0'(\zeta) - \overline{\varphi_0'(0)}; \quad (1.7)$$

$$V_2^0 = \overline{\varphi_0'(0)} + U_0(\zeta) - \zeta U_0'(\zeta); \quad (1.8)$$

$$a_1 = -\frac{\delta_1}{2(1+\nu+\delta_1)} [\varphi_0'(0) + \overline{\varphi_0'(0)}]. \quad (1.9)$$

Остаточно розв'язок системи (1.3) при $\delta_1 \neq \delta_2$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\varphi_1(\zeta) &= \frac{\zeta}{k_2 - k_1} \{ [k_2 I_{11}(\zeta) - I_{12}(\zeta)] - [k_1 I_{21}(\zeta) - I_{22}(\zeta)] \} - \\ &\quad - \bar{a}_1 \zeta \left[1 - \frac{2(\alpha_{12} + \alpha_{22})(1+\nu+\delta_1)}{\mu_1 \mu_2 \delta_1} \right];\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}U_1(\zeta) &= \frac{1}{k_2 - k_1} \{ k_1 [k_2 I_{11}(\zeta) - I_{12}(\zeta)] - k_2 [k_1 I_{21}(\zeta) - I_{22}(\zeta)] \} + \\ &\quad + \bar{a}_1 \left[1 + \frac{2(1+\alpha_{11} + \alpha_{21})(1+\nu+\delta_1)}{\mu_1 \mu_2 \delta_1} \right].\end{aligned}\quad (1.11)$$

Тут

$$I_{kj}(\zeta) = \zeta^{\mu_k} \int \zeta^{-1-\mu_k} V_j^0 d\zeta \quad (k, j=1, 2).$$

$$k_{1,2} =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\left[(1+\nu) \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) + 2 \right] \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right)^2 + (1+\nu) \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) + 1 - \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{\delta_1 \delta_2}}}{-(1-\nu) \left(\frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1} \right)};\end{aligned}\quad (1.12)$$

$$\mu_{1,2} = -\left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right)^2 + (1+\nu) \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) + 1 - \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{\delta_1 \delta_2}}. \quad (1.13)$$

Розв'язок для рівних жорсткостей можна одержати, якщо інтегрувати (1.3) при $\delta_1 = \delta_2$. Якщо відомі функції (1.10) та (1.11), то функція $\psi_1(\zeta)$, яка голоморфна всередині γ , виразиться формулою

$$\psi_1(\zeta) = \frac{1}{\zeta} U_1(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \varphi_1'(\zeta). \quad (1.14)$$

2. Нехай плита навантажена зосередженими моментами M_l ($l=1, 2, \dots, r$), які прикладені в точках контура $\sigma_l = e^{i\alpha_l}$. Ці моменти задовольняють умову рівноваги

$$\sum_1^r M_l = \sum_1^r (M_{xl} + iM_{yl}) = 0.$$

Для непідкріпленої плити маємо [9]

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= -\frac{i}{4\pi D(3+\nu)} \sum M_l \ln(\sigma_l - \zeta) + \frac{i(1-\nu)\zeta}{8\pi D(1+\nu)(3+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l}; \\ \psi_0(\zeta) &= \frac{i}{4\pi D(1-\nu)} \sum \bar{M}_l \ln(\sigma_l - \zeta) - \frac{i}{4\pi D(3+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l(\sigma_l - \zeta)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Звідси

$$U_0(\zeta) = \frac{i\zeta}{4\pi D(1-\nu)} \sum \bar{M}_l \ln(\sigma_l - \zeta) + \frac{i}{8\pi D(1+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l}. \quad (2.2)$$

Підставляючи функції (2.1) та (2.2) у формули (1.7) — (1.9), знаходимо

$$\begin{aligned} V_1^0 &= -\frac{i}{4\pi D(3+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l - \zeta} - \frac{i(1-\nu)}{8\pi D(3+\nu)(1+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l} + \\ &+ \frac{i}{8\pi D(1+\nu)} \sum \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} V_2^0 &= \frac{i\zeta^2}{4\pi D(1-\nu)} \sum \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l - \zeta} + \frac{i}{8\pi D(1+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l} - \\ &- \frac{i}{8\pi D(1+\nu)} \sum \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$a_1 = -\frac{\delta_1}{4(1+\nu+\delta_1)} \cdot \frac{i}{4\pi D(1+\nu)} \sum \left(\frac{M_l}{\sigma_l} - \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l} \right). \quad (2.5)$$

За допомогою останніх виразів шукані функції (1.10) та (1.11) остаточно запишуться так:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= -\frac{i}{4\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \cdot \left\{ \zeta^{1+\mu_1} \left[k_2 \sum M_l \int \frac{\zeta^{-1-\mu_1}}{\sigma_l - \zeta} d\zeta + \right. \right. \\ &+ \frac{3+\nu}{1-\nu} \sum \bar{M}_l \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{\sigma_l - \zeta} d\zeta \left. \right] - \zeta^{1+\mu_2} \left[k_1 \sum M_l \int \frac{\zeta^{-1-\mu_2}}{\sigma_l - \zeta} d\zeta + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{3+\nu}{1-\nu} \sum \bar{M}_l \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{\sigma_l - \zeta} d\zeta \right] \right\} + \frac{i\alpha_{22}\zeta}{4\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l} - \end{aligned}$$

$$-\frac{i\delta_1\zeta}{16\pi D(1+\nu)(1+\nu+\delta_1)} \sum \left(\frac{M_l}{\sigma_l} - \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l} \right); \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(\zeta) = & -\frac{i}{4\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ [k_1-(1+\mu_1)] \zeta^{-1+\mu_1} \left[k_2 \sum M_l \int \frac{\zeta^{-1-\mu_1}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta + \right. \right. \\ & + \frac{3+\nu}{1-\nu} \sum \bar{M}_l \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta \left. \right] - [k_2-(1+\mu_2)] \zeta^{-1+\mu_2} \left[k_1 \sum M_l \int \frac{\zeta^{-1-\mu_2}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta + \right. \\ & \left. + \frac{3+\nu}{1-\nu} \sum \bar{M}_l \int \frac{\zeta^{1+\mu_2}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta \right] \left. \right\} - \frac{i(\alpha_{21}+\alpha_{22})}{4\pi D(3+\nu)\mu_1\mu_2} \zeta^{-1} \sum \frac{M_l}{\sigma_l} + \\ & + \frac{i}{4\pi D(3+\nu)} \sum \frac{M_l}{\zeta(\sigma_l-\zeta)}. \end{aligned}$$

У розв'язок (2.6) входять інтеграли вигляду

$$I(\zeta) = \int \frac{\zeta^{\pm 1-\mu_j}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta, \quad (2.7)$$

які можна обчислити лише при раціональних значеннях чисел μ_j . Але при довільних жорсткостях ребра δ_1 та δ_2 згідно з (1.13) числа μ_j можуть бути ірраціональними. Тому при підрахунках краще задатися значеннями μ_1 та μ_2 і обчислювати відповідні величини δ_1 і δ_2 за формулою

$$\frac{1}{\delta_{2,1}} = -\frac{\mu_1+\mu_2}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{4}\right)^2 - \frac{1+\mu_1\mu_2 - \frac{1+\nu}{2}(\mu_1+\mu_2)}{(3+\nu)(1-\nu)}}. \quad (2.8)$$

Відносні жорсткості δ_1 , δ_2 для деяких значень μ_1 та $\mu_2 = -\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2) = \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1}$ наведені в табл. 1. Числа табл. 1 зображені у вигляді дробів, чисельник яких дорівнює δ_1 , а знаменник — δ_2 .

З (2.8) видно, що не всякій довільній парі чисел μ_1, μ_2 відповідають дійсні невід'ємні значення δ_1, δ_2 (див. риси в табл. 1). Якщо покласти під інтегралом в (2.7) $\zeta = t^n$ та $\pm 1 - \mu_j = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ — дріб, що не скорочується, дістанемо

$$I(t) = n \int \frac{t^{m+n-1}}{\sigma_l - t^n} dt. \quad (2.9)$$

При $m \geq 1$ очевидно, що $m+n-1 \geq n$ і підінтегральна функція в (2.9) може бути записана у вигляді

$$\frac{t^{m+n-1}}{\sigma_l - t^n} = - \sum_{k=0}^j \sigma_l^k t^{m-kn-1} + \sigma_l^{j+1} \frac{t^{m-jn-1}}{\sigma_l - t^n},$$

де $m-jn-1 < n$; $j = E\left(\frac{m-1}{n}\right)$.

Таблиця 1

$\mu \downarrow$		-2	-1	-3/4	-1/2	-1/4	$\leftarrow \mu_1$
0,75	$\frac{4,035}{1,991}$	$\frac{0,316}{0,146}$	$\frac{0,579}{0,121}$	$\frac{0,696}{0,117}$	$\frac{0,859}{0,113}$	$\frac{1,110}{0,110}$	10
1	$\frac{8,595}{1,132}$	$\frac{2,896}{1,527}$	$\frac{0,521}{0,179}$	$\frac{0,640}{0,168}$	$\frac{0,803}{0,160}$	$\frac{1,047}{0,153}$	7,5
1,25	$\frac{14,55}{0,847}$	$\frac{4,653}{0,966}$	$\frac{0,426}{0,274}$	$\frac{0,568}{0,236}$	$\frac{0,737}{0,215}$	$\frac{0,980}{0,201}$	6
1,5	$\frac{24,52}{0,685}$	$\frac{6,105}{0,748}$	$\frac{1,842}{1,045}$	—	$\frac{0,655}{0,288}$	$\frac{0,906}{0,257}$	5
1,75	$\frac{45,62}{0,579}$	$\frac{7,511}{0,618}$	$\frac{2,423}{0,748}$	—	—	$\frac{0,764}{0,372}$	4
2	$\frac{122,7}{0,502}$	$\frac{8,921}{0,530}$	$\frac{2,814}{0,608}$	—	—	—	3
2,25	—	$\frac{10,35}{0,464}$	$\frac{3,129}{0,518}$	$\frac{1,189}{0,710}$	—	—	2,5
2,5	—	$\frac{11,82}{0,414}$	$\frac{3,391}{0,454}$	$\frac{1,407}{0,559}$	—	—	2,25
3	—	$\frac{14,87}{0,341}$	$\frac{3,835}{0,365}$	$\frac{1,659}{0,417}$	$\frac{0,876}{0,538}$	—	2
4	—	$\frac{21,63}{0,253}$	$\frac{4,474}{0,265}$	$\frac{1,946}{0,287}$	$\frac{1,173}{0,318}$	—	1,75
5	—	$\frac{29,50}{0,201}$	$\frac{4,925}{0,208}$	$\frac{2,118}{0,221}$	$\frac{1,304}{0,236}$	—	1,5
6	—	$\frac{38,82}{0,167}$	$\frac{5,263}{0,172}$	$\frac{2,236}{0,180}$	$\frac{1,386}{0,189}$	—	1,25
7,5	—	$\frac{56,56}{0,134}$	$\frac{5,639}{0,137}$	$\frac{2,356}{0,141}$	$\frac{1,465}{0,147}$	—	1
10	—	$\frac{103,8}{0,100}$	$\frac{6,058}{0,102}$	$\frac{2,480}{0,104}$	$\frac{1,543}{0,107}$	—	0,75
$\mu_1 \rightarrow$	3/4	2/3	1/2	1/4	0	—	$\uparrow \mu$

Функція $f(t) = \frac{t^{m-jn-1}}{\sigma_l - t^n}$, яка має n полюсів у точках $t_k = e^{(ia_l + 2k\pi i)/n}$ ($k=0, 1, \dots, n-1$), може бути записана у вигляді суми головних частин лоранівських розкладів в околі кожного з полюсів [2]:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\text{res}_{t=t_k} f(t)}{t-t_k} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t_k^{m-n(1+j)}}{t-t_k}.$$

Тепер інтеграл $I(t)$ легко обчислюється

$$I(t) = -n \sum_{k=0}^j \sigma_i^k \frac{t^{m-kn}}{m-kn} - \sigma_i^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2k\pi i \left(\frac{m}{n} - j - 1\right)} \ln(t - t_k). \quad (2.10)$$

3. Для ілюстрації впливу підкріплюючого ребра на зусилля в плиті розглянемо дві окремі задачі: на кінцях діаметра круглої плити з підкріпленим краєм діють рівні та протилежно направлені 1) згинаючі моменти M (рис. 1), 2) крутильні моменти M (рис. 2).

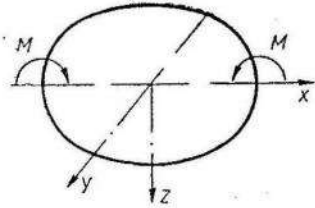


Рис. 1.

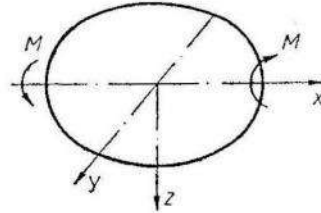


Рис. 2.

Для задачі 1 маємо

$$\begin{aligned} M_1 &= iM \text{ при } \sigma_1 = 1; \\ M_2 &= -iM \text{ при } \sigma_2 = -1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для задачі 2 маємо

$$\begin{aligned} M_1 &= M \text{ при } \sigma_1 = 1; \\ M_2 &= -M \text{ при } \sigma_2 = -1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Підставляючи значення (3.1) та (3.2) у формули (2.6), після деяких перетворень одержуємо додаткові функції $\varphi_1(\zeta)$ та $\psi_1(\zeta)$ для задачі 1:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= \frac{M\zeta}{2\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ \left(k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_1} \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{1-\zeta^2} d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - \left(k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_2} \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{1-\zeta^2} d\zeta \right\} + \frac{M\delta_1\zeta}{4\pi D(1+\nu)(1+\nu+\delta_1)}; \\ \psi_1(\zeta) &= \frac{M\zeta^{-1}}{2\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ [k_1 - (1+\mu_1)] \left(k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_1} \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{1-\zeta^2} d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - [k_2 - (1+\mu_2)] \left(k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_2} \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{1-\zeta^2} d\zeta \right\} - \frac{M\zeta}{2\pi D(3+\nu)(1-\zeta^2)}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для задачі 2 [6]

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= -\frac{iM\zeta}{2\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ \left(k_2 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_1} \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{1-\zeta^2} d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - \left(k_1 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_2} \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{1-\zeta^2} d\zeta \right\}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\psi_1(\zeta) = -\frac{iM\zeta^{-1}}{2\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ [k_1-(1+\mu_1)] \left(k_2+\frac{3+\nu}{1-\nu}\right) \zeta^{\mu_1} \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{1-\zeta^2} d\zeta - \right. \\ \left. - [k_2-(1+\mu_2)] \left(k_1+\frac{3+\nu}{1-\nu}\right) \zeta^{\mu_2} \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{1-\zeta^2} d\zeta \right\} + \frac{iM}{2\pi D(3+\nu)} \cdot \frac{\zeta}{1-\zeta^2}.$$

Згинаючі моменти та зусилля в плиті (в полярній системі координат), які діють в точках $\sigma=e^{i\theta}$ контура γ , виражаються за відомими формулами [4] у вигляді:

для задачі 1:

$$M_\theta = -4D(1+\nu) \operatorname{Re}[\varphi'(\sigma)] + 2D(1-\nu) \operatorname{Re}[\sigma\varphi''(\sigma) + \sigma^2\psi'(\sigma)] = \\ = M \sum_{1,2} A_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j); \\ M_\rho = -4D(1+\nu) \operatorname{Re}[\varphi'(\sigma)] - 2D(1-\nu) \operatorname{Re}[\sigma\varphi''(\sigma) + \sigma^2\psi'(\sigma)] = \\ = M \sum_{1,2} B_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j) + \frac{M}{\pi} \frac{1+\nu}{1+\nu+\delta_1}; \quad (3.5)$$

$$Q_\rho = -8D \operatorname{Re}[\sigma\varphi''(\sigma)] = \\ = M \sum_{1,2} C_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j) + \frac{4M}{\pi(3+\nu)} \left(\alpha_{11} + \frac{3+\nu}{1-\nu} \alpha_{12}\right) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\sigma^2}\right);$$

для задачі 2

$$H_{\rho\theta} = 2D(1-\nu) \operatorname{Im}[\sigma\varphi''(\sigma) + \sigma^2\psi'(\sigma)] = M \sum_{1,2} D_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j); \quad (3.6)$$

$$Q_\theta = 8D \operatorname{Im}[\sigma\varphi''(\sigma)] = \\ = M \sum_{1,2} E_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j) + \frac{4M}{\pi(3+\nu)} \left(\alpha_{11} - \frac{3+\nu}{1-\nu} \alpha_{12}\right) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\sigma^2}\right).$$

Тут позначено

$$\Phi(\mu_j) = \sigma^{\mu_j} \int \frac{\sigma^{1-\mu_j}}{1-\sigma^2} d\sigma; \\ \operatorname{Re}\Phi(\mu) = \operatorname{Im}[i\Phi(\mu)]. \quad (3.7)$$

Формули для коефіцієнтів A_j, B_j, C_j, D_j, E_j ($j=1,2$) наведені в табл. 2.

У розв'язок (3.3)–(3.4) входить інтеграл вигляду

$$\zeta^\mu \int \frac{\zeta^{1-\mu}}{1-\zeta^2} d\zeta.$$

Для прикладу обчислимо цей інтеграл при $\mu_1=0,5$; $\mu_2=-3,5$. Згідно з (2.10) маємо

$$V\zeta \int \frac{V\zeta}{1-\zeta^2} d\zeta = -\frac{V\zeta}{2} \left(\ln \frac{1-V\zeta}{1+V\zeta} + i \ln \frac{1-iV\zeta}{1+iV\zeta} \right);$$

Таблиця 2

	$j=1$	$j=2$
A_j	$-\frac{k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} [(1+3\nu)(1+\mu_1) + k_1(1-\nu)(1-\mu_1)]$	$\frac{k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} [(1+3\nu)(1+\mu_2) + k_2(1-\nu)(1-\mu_2)]$
B_j	$-\frac{k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} [(3+\nu)(1+\mu_1) - k_1(1-\nu)(1-\mu_1)]$	$\frac{k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} [(3+\nu)(1+\mu_2) - k_2(1-\nu)(1-\mu_2)]$
C_j	$-4 \frac{k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} \mu_1(1+\mu_1)$	$4 \frac{k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} \mu_2(1+\mu_2)$
D_j	$-\frac{k_2 + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} (1-\nu) [(1+\mu_1) - k_1(1-\mu_1)]$	$\frac{k_1 + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} (1-\nu) [(1+\mu_2) - k_2(1-\mu_2)]$
E_j	$-4 \frac{k_2 + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} \mu_1(1+\mu_1)$	$4 \frac{k_1 + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} \mu_2(1+\mu_2)$

$$\zeta^{-3,5} \int \frac{\zeta^{4,5}}{1-\zeta^2} d\zeta = -\frac{2}{7} - \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{V\zeta}{\zeta^4} \left(\ln \frac{1-V\zeta}{1+V\zeta} + i \ln \frac{1-iV\zeta}{1+iV\zeta} \right).$$

Тут $|\arg \zeta| \leq \pi$.

Аналітична функція $V\zeta \left(\ln \frac{1-V\zeta}{1+V\zeta} + i \ln \frac{1-iV\zeta}{1+iV\zeta} \right)$ є регулярною в безмежній площині з розрізами вздовж променів $(0, -\infty)$ та $(1, \infty)$, а тому можна продовжити аналітично розв'язок задачі на всі точки контура γ за винятком точок ± 1 , в яких діють зосереджені моменти.

В непідкріпленій плиті [9] при підході до точок прикладання зосереджених моментів внутрішні згинаючі та крутячі моменти мають особливості вигляду $\frac{1}{1-\rho}$, а перерізуючі сили Q_ρ та Q_θ — особливості

вигляду $\frac{1}{(1-\rho)^2}$. Щодо плити з підкріпленням краєм, то, як показує аналіз наведених вище формул, в околі точок прикладання зосереджених моментів моменти та перерізуючі сили мають більш слабкі особливості вигляду відповідно $\ln(1-\rho)$ та $\frac{1}{1-\rho}$.

На рис. 3 наведені графіки залежності зусиль та моментів (3.5) та (3.6) в точці $\sigma=i$ для $\mu_1=0,5$ та $1,5 \leq \mu \leq 10$. Відповідні значення відносних жорсткостей ребра змінюються при цьому (табл. 1) в інтер-

валах $1,842 \leq \delta_1 \leq 6,058$; $0,102 \leq \delta_2 \leq 1,045$. Для порівняння на тому ж рис. 3 пунктиром показані значення відповідних зусиль в невідкріпленій плиті [9].

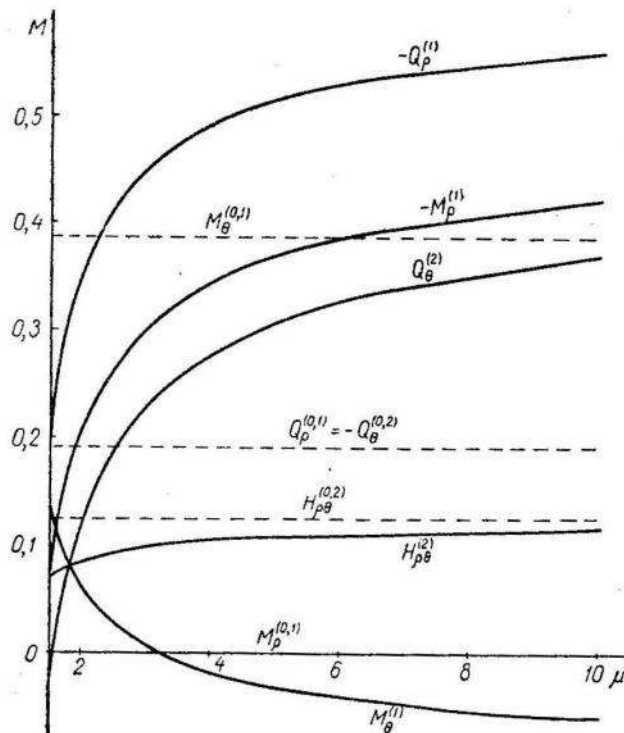


Рис. 3.

ЛІТЕРАТУРА

1. Д. В. Вайнберг. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд-во АН УССР, 1952.
2. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. М., 1950.
3. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. Пластинки с криволинейными ребрами жесткости. Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (обзорные доклады). Изд-во АН СССР, 1965.
4. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Изд-во «Наукова думка», К., 1964.
5. Н. П. Флейшман. Изгиб произвольно нагруженной тонкой плиты с подкрепленной круговой границей. Прикладная механика, т. II, вып. 8, 1966.
6. Н. П. Флейшман, О. В. Марковська. Дія зосереджених моментів на круглій плиті з підкріпленням краю. Тези доповідей 39 наукової конференції ЛДУ, фіз.-матем. науки, 1965.
7. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.
8. М. П. Шереметьев, Т. Л. Мартинович. Згин нескінченної пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. III, вип. 2, 1957.
9. Yu Yi-Yuan. Journal of Applied Mechanics, vol. 21, № 2, 1954.

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Е. В. МАРКОВСКАЯ

ВЛИЯНИЕ РЕБРА ЖЕСТКОСТИ НА ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МОМЕНТАМИ

(резюме)

В замкнутой форме получено решение задачи изгиба круглой изотропной плиты с подкрепленным краем под действием сосредоточенных моментов, приложенных к краю. Показано, что в точках приложения сосредоточенных моментов внутренние усилия имеют более слабые особенности, чем в неподкрепленной плите.