ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 517.94

Л. О. СТАРОКАДОМСЬКИЙ

ПРО НАБЛИЖЕНЕ РІШЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ КОЛОКАЦІЇ І МЕТОДОМ ЗВЕДЕННЯ ДО ЗАДАЧІ ЧЕБИШЕВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ

Під наближеним рішенням рівняння

$$L(\mu) \equiv \delta\mu - \int_{-1}^{1} \mu(x) N(x_0, x)\, dx = f(x_0) \quad (\delta = 0 \text{ або } 1) \tag{1}$$

розумітимемо визначення такої густини $\overline{\mu}$, щоб

$$|L(\overline{\mu}) - f| < \varepsilon. \tag{2}$$

Припустимо, що рівняння (1) має розв'язок і при цьому тільки єдиний, тобто

$$\mu \equiv 0, \text{ якщо } f \equiv 0. \tag{3}$$

Тим чи іншим способом можна звести рівняння (1) з густиною μ до вигляду

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \psi_n(x_0) = f(x_0). \tag{4}$$

Для визначеності розглянемо спосіб заміни μ на $\overline{\mu}$:

$$\overline{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n(x), \tag{5}$$

де $\{\varphi_n\}$ — якась повна система лінійно незалежних функцій. Тоді $\psi_n(x_0) = L(\varphi_n)$ і $\{\psi_n\}$ є повна система лінійно незалежних функцій, якщо виконується (3). Повнота системи $\{\varphi_n\}$ в L_2, якщо $\{\varphi_n\}$ повна система в L_2, як і лінійна незалежність, перетворюється безпосередньо. Якщо $\{\varphi_n\}$ система повна в просторі C_μ, то $\{\psi_n\}$ є повною системою в просторі C_f всіх функцій f, що можуть бути подані виразом $L(\mu)$. Це також легко перевіряється.

1. ПРО МЕТОД КОЛОКАЦІЇ (ЗМІШАНИЙ МЕТОД) [1, 2]

Задаючи в рівності (4) набір M точок x_{0j} $(j=0, 1, \ldots, M-1)$, де $M \geqslant N$, одержимо алгебраїчну систему для визначення a_n

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \psi_{nj} = f_j \quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ M-1). \tag{6}$$

При $M=N$ приходимо до методу колокації. Питання про збіжність і помилку цього методу розглядалось, наприклад в роботі [2], методами функціонального аналізу. Але слід зауважити, що метод колокації безпосередньо збігається з задачею інтерполювання функції $f(x)$ за системою $\{\psi_n\}$, і тоді стає зрозумілим, що питання про збіжність і похибку методу колокації є питанням про збіжність і похибку інтерполяційного методу, теорія якого досить розроблена. Зробимо зауваження, що випливають з теорії інтерполяції:

а) $\{\psi_n\}$, взагалі кажучи, не буде чебишевською системою, тому визначник системи (6) може бути близьким до нуля або дорівнювати йому. Це може сильно впливати на єдиність і стійкість розв'язку;

б) якщо навіть $\{\psi_n\}$ є системою Чебишева, колокація може привести до розбіжного процесу. Так буде, наприклад, для рівняння

$$\mu(x_0) - \int_{-1}^{1} \mu(x)\, dx = f(x_0), \text{ де } f(x_0) = |x_0| \text{ або } f(x_0) = \frac{1}{1+25x_0^2} \text{ і ін.}$$

при виборі $\{\varphi_n\} = \left\{x^n - \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}$, якщо точки x_{0j} будуть рівновіддаленими;

в) між різними сукупностями точок колокації x_{0j} перевагу має сукупність коренів полінома Чебишева $T_N(x_0)$. Дійсно, заміняючи $f(x_0)$ і $\Psi(x_0) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \psi_n(x_0)$ їх поліномами Лагранжа $f_L = \sum_{j=0}^{N-1} L_j(x_0) f_j$ і $\Psi_L = \sum_{j=0}^{N-1} L_j(x_0)\Psi_j$, бачимо, що завдяки (6) $\Psi_L \equiv f_L$ і, значить,

$$\varepsilon = \sup |\Psi - f| \leqslant \Delta \operatorname{const}; \ \Delta = \max\ \{\Delta_f,\ \Delta_\Psi\}, \tag{7}$$

де Δ_f, Δ_Ψ — похибки інтерполяцій f і Ψ за Лагранжем. Таким чином, справа звелася до Лагранжевої інтерполяції, для якої сукупність коренів $T_N(x_0)$ має перевагу перед іншими сукупностями.

2. ЗВЕДЕННЯ ДО ЗАДАЧІ ЧЕБИШЕВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ

Рішення рівняння (1) в розумінні (2) при користуванні (4) або (6) рівнозначне такій задачі: потрібно визначити такі $a_n = \bar{a}_n$, щоб помилка $\Delta = \max\limits_{x_0} |\Sigma a_n \psi_n(x_0) - f(x_0)|$ була найменшою. Позначивши через $E_N(f)$ величину найкращого наближення за Чебишевим

$$E_N(f) = \min_{\{a_n\}} \max_{x_0} |\Sigma a_n \psi_n(x_0) - f(x_0)|, \tag{8}$$

приходимо до висновку, що задача наближеного рішення рівняння (1) в розумінні (2) є задачею чебишевського наближення функції $f(x_0)$ узагальненим поліномом $\Psi_N=\sum\limits_{n=0}^{N-1} a_n \psi_n(x_0)$. Відомо, що задача чебишевського наближення (в наших умовах) завжди має рішення, причому завдяки повноті $\{\psi_n\}$ буде $E_N \underset{N\to\infty}{\to} 0$. Слід зауважити, що $\bar{\mu}\to\mu$ при $E_N\to 0$, якщо рівняння (1) стійке в розумінні (2). На основі сказаного наближене рішення (1) можна провадити методами досить розробленої теорії чебишевського наближення [див., наприклад, 3]. Оскільки цю останню задачу на $[-1, 1]$ можна звести з заданою точністю до рішення аналогічної задачі на точковій множині $\{x_{0j}\}$, то повертаємось до рішення системи (6) при $M>N$ за чебишевським принципом (8).

Не зупиняючись на відомих методах побудови такого рішення [3], відзначимо лише таке.

а. При $M=N+1$ можна визначити $\bar{a}_n$ і відхилення $E_N^{(0)}$ з системи $(T_N(x_{0j})=0)$:

$$(-1)^j E_N^{(0)} + \Sigma\, \bar{a}_n \psi_{nj} = f_j. \tag{9}$$

Похибку Δ можна наближено оцінити, знаючи $E_N^{(0)}$ і порахувавши різницю $f(x_0)-\Sigma\bar{a}_n\psi_n(x_0)$ в проміжних точках. Відомими способами можна також оцінити різницю $E_N - E_N^{(0)}$.

б. Відомо, що задача чебишевського наближення зводиться до задачі середньостепеневого наближення, першим кроком якого є середнє квадратичне наближення.

Рішення системи (6) методом найменших квадратів провадиться шляхом заміни (6) на систему

$$\| \psi_{nj} \|' \, \| \psi_{nj} \| \, \hat{a} = \| \psi_{nj} \|' \hat{f}, \tag{10}$$

$\|\psi_{nj}\|$ і $\|\psi_{nj}\|'$, $\hat{a}$, $\hat{f}$ — відповідно матриця системи (6), транспонована матриця, стовпці невідомих $\bar{a}_n$ і відомих f_j. При достатньо великих M і визначнику системи (10), не близькому до нуля, цей спосіб дає досить добрі результати.

в. Більш загальними і потужними методами, що проходять і при поганій обумовленості (6), є α-алгоритм та інші, описані в монографії [3].

Зауваження. До системи (6) рівняння (1) можна звести ще так. Зобразимо $\bar{\mu}$ у вигляді інтерполяційного полінома

$$\bar{\mu}(x) = \frac{2}{N}\sum_{\alpha=0}^{N-1} \mu(x_\alpha)\left[\sum_{k=1}^{N-1} T_k(x_\alpha)\, T_k(x) + \frac{1}{2}\right], \tag{11}$$

де x_α — корені $T_N(x)$, тоді одержимо систему

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} \mu_\alpha \psi_{\alpha j} = f_j \ (j=0, 1, \ldots, M-1), \tag{12}$$

більш придатну при рішенні рівняння (1) 1-го роду через те, що ψ_α не зменшуються з ростом α.

ЛІТЕРАТУРА

1. Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. л-ры, 1953.
2. Л. В. Канторович Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи математических наук, III, вып 6, 1948.
3. Е. Я. Ремез. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Изд-во АН УССР, 1957.

Л. А. СТАРОКАДОМСКИЙ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ И МЕТОДОМ ПРИВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

(резюме)

Рассмотрен метод коллокации (смешанный метод) решения интегральных уравнений и показано, что теория этого метода совпадает с теорией интерполирования. Предлагаются приближенные методы решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода путем сведения к задаче чебышевского приближения, теория которого достаточно хорошо разработана.