ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 517. 544

Л. О. СТАРОКАДОМСЬКИЙ

ПОТЕНЦІАЛ ПРОСТОГО ШАРУ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ 1-го РОДУ З ЛОГАРИФМІЧНОЮ ОСОБЛИВІСТЮ

1. Зведення до сингулярного інтегрального рівняння. Нехай в площині (x, y) проведено p розрізів $L_k=\widetilde{a_kb_k}$ (сукупність яких дає лінію $L=\sum\limits_{k-1}^{p} L_k$), що параметрично задаються так:

$$x=x_k(s),\ y=y_k(s)\ s_k \leqslant s \leqslant S_k \text{ на } L_k, \tag{1}$$

де s є будь-який параметр, наприклад довжина дуги. Будемо водночас користуватися комплексним зображенням точок (x, y) і $(x(s),\ y(s))$, $(s \in L)$, тобто $z=x+iy$, $t(s)=x(s)+iy(s)$. Припустимо, що індекс «+» («—») відповідає лівому (правому) околу точки $t \in L$, при обраному на L додатному напрямі. Введемо в розгляд потенціал простого шару $v(x_0, y_0)$ і видозмінений потенціал простого шару $u(x_0, y_0)$ з густинами $\mu(s)$ і $\overline{M}(s)$:

$$v(x_0, y_0)=\int\limits_L \mu(s) N[x_0, y_0; x(s), y(s)]ds; \tag{2}$$

$$u(x_0, y_0)=\int\limits_L \overline{M}(s)\ \frac{\partial}{\partial s}\ N[x_0, y_0; x(s), y(s)]ds, \tag{3}$$

де

$$N[x_0, y_0; x(s), y(s)]=l[x_0, y_0; x(s), y(s)]\ln r+n[x_0, y_0; x(s), y(s)]; \tag{4}$$

$$r\equiv r[x_0, y_0; x(s), y(s)]=|z_0-t|; \tag{5}$$

$$\mu(s)=\mu_k(s),\ \overline{M}(s)=\overline{M}_k(s) \text{ при } s\in L_k. \tag{6}$$

Для спрощення міркувань припустимо, що функції $x_k(s)$, $y_k(s)$ і $l(z_0, t)$, $n(z_0, t)$ належать до одного і того самого класу

$$x_k(s),\ y_k(s),\ l,\ n \in C_N(\lambda) \tag{7}$$

(для l, n належність (7) виконується по всіх змінних). Записом (7) позначуємо також, що N-похідна належить до $H(\lambda)$. Якщо функції x_k, y_k, l, n нескінченно диференційовані, то приймаємо $N=\infty$. Потенціали u і v зводяться один до одного інтегруванням по частинах, тому природно вважати

$$\overline{M}_k(s) = \int_{s_k}^{s} \overline{\mu}_k(s)\, ds. \tag{8}$$

Там, де потрібно, будемо вважати, що заміною

$$s = \frac{1}{2}(S_k + s_k) + \frac{1}{2}(S_k - s_k)\tau \quad (-1 \leqslant \tau \leqslant 1) \tag{9}$$

всі проміжки інтегрування зведені до $[-1, 1]$. Тепер зобразимо μ у вигляді

$$\mu_k(s) = -\overline{\mu}_k(s) + \alpha_k \sigma_k(s) \quad (s \in L_k), \tag{10}$$

де α_k — деякі константи, σ_k — функції такі, що потенціали

$$v_k = \int_{L_k} \sigma_k(s)\, N\, ds \tag{11}$$

належать на L класу $H(\lambda)$ і

$$l_k = \int_{L_k} \sigma_k(s)\, ds \neq 0, \tag{12}$$

а в іншому довільно обрані, наприклад у вигляді

$$\sigma_k = \frac{\sigma_k^{(1)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} + \sigma_k^{(2)}(\tau) \arccos \tau + \sigma_k^{(3)}(\tau). \tag{13}$$

Зробимо тепер важливе для дальшого припущення (A): густина $\overline{M}$ на кінцях дуг L_k дорівнює нулеві:

$$\overline{M}(s_k) = \overline{M}(S_k) = 0. \tag{A}$$

При умові (A) і маючи на увазі (10), (11), одержимо

$$v(x_0, y_0) = -u(x_0, y_0) + \sum_{k=0}^{p} \alpha_k v_k(x_0, y_0), \tag{14}$$

де $\alpha_0 = 0$ або $\alpha_0 \neq 0$, $u_0 = 1$ залежно від умови, що накладається на $v(\infty)$. Так, у випадку $l=1$, $n = \ln a$ $(a \neq 1)$ за формулою (2) одержимо логарифмічний потенціал, для якого найчастіше буде $|v(\infty)| < \infty$. Тоді $\alpha_0 \neq 0$, а на інші α_k накладається умова $\Sigma \alpha_k l_k = 0$. Якщо потенціал v є розв'язком якоїсь граничної задачі, то, прямуючи точку (x_0, y_0) до контура L, одержимо еквівалентні внаслідок (14) інтегральні рівняння 1-го роду:

$$\int_L \mu(s)\, N(s_0 s)\, ds = f_0(s_0); \tag{15}$$

$$\int_L \overline{M}(s) \frac{\partial}{\partial s} N(s_0, s)\, ds + \sum_{k=0}^{p} \alpha_k u_k(s_0) = f_0(s_0). \tag{16}$$

Зробимо тепер припущення (В): рівняння (15) має лише єдиний розв'язок, тобто

$$\mu \equiv 0, \text{ якщо } f_0 \equiv 0. \tag{17}$$

2. Дослідження рівнянь (15, (16). З умов (А); (В) і (12) випливає

$$\mu_k \equiv \overline{\mu}_k \equiv \overline{M}_k \equiv \alpha_k \equiv 0, \text{ якщо } f_0 \equiv 0. \tag{18}$$

Дослідження (15), (16) провадимо шляхом зведення (16) до сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{M}(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0 t)\,\overline{M}(t)\,dt = f(t_0);$$

$$B(t_0) = \pi i\, l(s_0,\ s_0);\ f(t_0) = f_0(s_0) - \sum_{k=0}^{p} \alpha_k v_k(s_0); \tag{19}$$

$$k(t_0 t) = \pi i \left\{ l_s' \ln r + N_s' + \frac{l(s_0 s) - l(s_0,\ s_0)}{s - s_0}\left[(s-s_0)\frac{\partial \ln r}{\partial s}\right] - \right.$$

$$\left. - il(s_0,\ s_0)\frac{\sin\alpha(s_0 s)}{r(s_0 s)} \right\} \left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}.$$

(інші позначення збігаються з позначеннями [1]). Запроваджуючи теорію сингулярних інтегральних рівнянь [1], зводимо (19) до рівняння Фредгольма II роду:

$$\overline{M}(t_0) + K^*\, k\overline{M} = f^*(t_0) \tag{20}$$

при умовах

$$\sum_k \alpha_k A_{jk} = B_j \quad (j = 1,\ 2. \ldots,\ p), \tag{21}$$

де

$$A_{jk} = \int\limits_L \frac{t^{j-1}\, v_k(t)\,dt}{l(t,\ t)\sqrt{R(t)}};\quad B_j = \int\limits_L \frac{t^{j-1}\,[f_0 - k\overline{M}]}{l(t,\ t)\sqrt{R(t)}}\,dt;$$

$$K^* f = -\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi^2}\int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{l(t,\ t)\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)};\ k\overline{M} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t t_1)\,\overline{M}(t_1)\,dt_1, \tag{22}$$

$$R(t) = \prod_{k-1}^{p}(t-a_k)(t-b_k).$$

Завдяки (18) система (21) має розв'язок і притому єдиний і, значить, (15), (16) еквівалентне (20). Знову завдяки (18) рівняння (20) має розв'язок і притому єдиний. З (21) α_k можна зобразити у вигляді лінійної комбінації правих частин B_j, що в свою чергу (див. (22) зображені через f_0 і $\overline{M}$. Таким чином, підставляючи $\alpha_k = \alpha_k(f_0, \overline{M})$ в рівняння (20), одержимо

$$\overline{M}(t_0) + \sqrt{R(t_0)} \int\limits_L \overline{M}(t_1) N_\omega(t_1 t_0)\, dt_1 = \sqrt{R(t_0)} F_\omega(t_0), \tag{23}$$

де N_ω, F_ω — відомі функції, причому $|N_\omega| < \text{const}$, $|F_\omega| < \text{const}$ і, значить, припущення (A) виправдане. Можна далі показати, що (20) або (23) мають лише дійсний розв'язок, збігаючись з розв'язком (16). Через те, що

$$\mu_k = -\frac{d\overline{M}_k}{ds} + \alpha_k \sigma_k, \tag{24}$$

і на основі вищесказаного робимо висновок: рівняння (15) при умові (B) має розв'язок при будь-якій правій частині f_0. Рівняння (19) має розв'язок при будь-якому значенні f_0 при виконанні умов (A) і (B).

3. Властивості рішень μ і $\overline{M}$. Провадячи відомими методами аналізу дослідження (20) або (23), використовуючи формули

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln|\tau_1 - \tau|\, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau - \tau_0)} = \pi \frac{\arccos\tau_0 - \eta(\tau_1 - \tau_0)}{\sqrt{1-\tau_0^2}} \quad \left(\eta(\tau_1 - \tau_0) = \begin{cases} 0 & \tau_0 > \tau_1 \\ 1 & \tau_0 < \tau_1 \end{cases}\right),$$

$$\int\limits_{v_0}^{1} \frac{f(\tau, \tau_0)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = f_1(\tau_0)\sqrt{1-\tau_0^2} + f_2(\tau_0) \arccos\tau_0 + f_3(\tau_0);$$

$$f(\tau, \tau_0) \in C_n,\ f_i(\tau_0) \in C_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \quad (i = 1, 2, 3),$$

одержимо

$$\overline{M}_k(\tau_0) = \overline{M}_{1k}(\tau_0)\sqrt{1-\tau_0^2} + \overline{M}_{2k}(\tau_0) \arccos\tau_0 + \overline{M}_{3k}(\tau_0), \tag{25}$$

де $\overline{M}_{ik}(\tau_0) \in C_\infty$, якщо в (7) $N = \infty$.

Якщо $N < \infty$, то $\overline{M}_{1k} \in C_{N-3}$, $\overline{M}_{2k} \in C_{N-1}$, $\overline{M}_{3k} \in C_1$, але можливе дальше виділення особливостей з функції $\overline{M}_{3k}$, причому виявляється, що $\overline{M}_{3k}$ знову має вигляд (25). Таким чином, можливе зображення (25), де $\overline{M}_{1k} \in C_m$, $\overline{M}_{2k} \in C_l$, $\overline{M}_{3k} \in C_r$, причому m, l, r є числа максимально однорідні, що одержуються при послідовному зменшенні на 1 класів C_{N-3}, C_{N-1} і відповідному підвищенні класу C_1 в (25). Очевидно, далі, що

$$\mu_k(\tau_0) = \frac{\mu_{1k}(\tau_0)}{\sqrt{1-\tau_0^2}} + \mu_{2k}(\tau_0) \arccos\tau_0 + \mu_{3k}(\tau_0), \tag{26}$$

де щодо μ_{ik} можемо повторити все, що говорилося щодо $\overline{M}_{ik}$ із зниженням на 1 порядка відповідних класів. При $N = \infty$ $\mu_{ik} \in C_\infty$. Відзначимо, що рівняння (20) або (23) будуть нестійкими відносно f_0 у рівномірному розумінні, значить, рівняння (16), а тим більше рівняння (15) будуть нестійкими в тому самому розумінні.

4. Дослідження $v(x_0y_0)$, $u(x_0y_0)$ та похідних від $v(x_0y_0)$, $u(x_0y_0)$ на L і поблизу L. Запишемо $u(x_0y_0)$ у вигляді

$$\frac{u(z_0)}{l(z_0, t^\circ)} = \operatorname{Re} \int\limits_L \frac{\overline{M}(t)\, dt}{t - z_0} + v_1(z_0), \tag{27}$$

де $l(z_0, t^0)=l[x_0, y_0; x(s^0), y(s^0)]$ і $t^0=x(s^0)+iy(s^0)$ є точка L, до якої прямує t_0, а $v_1(z_0)$ зводиться до потенціалу (2) з обмеженою густиною (ми далі вважатимемо, що мають місце (А) (25), (26) і (24). На основі (27) і (14) можемо відносно $u(x_0 y_0)$ і $v(x_0 y_0)$ твердити, що до них застосовані всі результати, одержані при вивченні інтеграла типу Коші [1, 2]. Наприклад, 1) $v(x_0, y_0)$ і $u(x_0 y_0)$ неперервно продовжуються на L, включаючи кінці, причому $v^+=v^-$, $u^+=u^-$; 2) $v(x_0, y_0)$ і $u(x_0, y_0)$ на L і поблизу L належать класу $H(\lambda)$ і т. д. [див. 1].

Для дослідження похідних від $v(x_0, y_0)$ і $u(x_0, y_0)$ зауважимо, що вірна рівність

$$\frac{1}{l}\frac{\partial v}{\partial z_0}\equiv\frac{1}{l(z_0, t^\circ)}\left(\frac{\partial v}{\partial x_0}-i\frac{\partial v}{\partial y_0}\right)=-\int_L\frac{\mu(t)}{t'}\frac{dt}{t-z_0}+v_2(x_0, y_0), \tag{28}$$

де $t'=\dfrac{dt}{ds}$, v_2 — є потенціал (2) з густиною μ. На основі теорії інтеграла типу Коші і формул (26), (28), (29)

$$\frac{\mu_k(t)}{t'}=\frac{\mu_{1k}}{\sqrt{t-c}}\sqrt{\frac{t-c}{1-\delta_c v}}\frac{1}{t'}+\frac{\mu^*(t)}{t'}\left(\delta_c=\begin{cases}-1 & c=a_k\\ \ \ 1 & c=b_k\end{cases}\right) \tag{29}$$

можемо одержати

$$\frac{1}{l}\frac{\partial v}{\partial z_0}=-\delta_L\pi\sqrt{S_k-s_k}\frac{\mu_{1k}}{\sqrt{r(z_0, c)}}ie^{i\Theta(z_0, c)}+\delta_c\mu^*(c)e^{-i\varkappa}\ln(z_0-c)+v(z_0), \tag{30}$$

де

$$\delta_L=\begin{cases}0 & (x_0, y_0)\in L\\ 1 & (x_0, y_0)\overline{\in}L\end{cases},\quad r(z_0, c)=|z_0-c|,\ \varkappa=\arg t'(c);$$

$$\Theta(z_0, c)=\frac{1}{4}[2\varkappa+2\vartheta(z_0, c)-(1+\delta_c)\pi];\ \vartheta(z_0, c)=\arg(z_0-c); \tag{31}$$

$$\mu^*=\mu_{2k}\arccos\tau+\mu_{3k};\ \mu^*\in H.$$

На основі (28) і (29) можемо на похідні $\dfrac{\partial v}{\partial z_0}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z_0}$ перенести всю теорію інтеграла типу Коші і зробити ряд висновків, з яких ми відзначимо лише такі.

1. Якщо $\dfrac{\mu_k}{t'}\in H$ на L (включаючи кінці), то $\dfrac{\partial v}{\partial z_0}$ неперервно продовжується на L зліва і справа, причому $\dfrac{\partial v}{\partial z_0}\in H$ в лівому і правому околі точки $t^0\in L$ і

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z_0}\right)^++\left(\frac{\partial v}{\partial z_0}\right)^-=2\frac{\partial v}{\partial t^\circ},\quad -\frac{t'(s^\circ)}{2\pi il(t^\circ, t^\circ)}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z_0}\right)^+-\left(\frac{\partial v}{\partial z_0}\right)^-\right]=\mu(s^\circ). \tag{32}$$

Якщо μ задовольняє (26) і справедливі формули (24), (14), то вищесказане і формула (32) справедливі для $\dfrac{\partial v}{\partial z_0}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z_0}$, за винятком околів кінців L_k.

2. З (30) випливає формула похідної по напряму m в околі кінців a_k, b_k. Напрям m збігається з напрямом (z_0-c).

$$\frac{\partial v}{\partial m}=\frac{\partial x}{\partial x_0}\cos\vartheta+\frac{\partial v}{\partial y_0}\sin\vartheta=-l(z_0,c)\,\delta_L\sqrt{S_k-s_k}\,\frac{\mu_{1k}(c)}{\sqrt{r(z_0,c)}}\sin\Theta_1(z_0,c)+$$
$$+\delta_c l(z_0,c)\,\mu^*(c)\,\{\ln|z_0-c|\cos(\vartheta-\varkappa)+\vartheta\sin(\vartheta-\varkappa)\}+w(x_0,y_0), \quad (33)$$

де

$$\Theta_1(z_0,c)=\frac{1}{4}[2(\varkappa-\vartheta)-(1+\delta_c)\pi].$$

З (33) випливає: а) особливість типу $\frac{1}{\sqrt{r(z_0,c)}}$ зникає при підході до кінця «c» з боку «внутрішньої» дотичної, тобто при $\vartheta=\varkappa$ для $c=a_k$ і $\vartheta=\varkappa+\pi$ для $c=b_k$; б) похідна $\frac{\partial v}{\partial m}$ є багатозначною функцією, завдяки присутності множника ϑ у формулі (33). Якщо μ матиме особливість типу $(1\pm\tau_c)^{-\gamma}$, де $0<\gamma<1$, то висновки а) і б) відповідно узагальнюються.

5. Дослідження густини μ і потенціалу $v(x_0,y_0)$ поблизу кутової точки контура L. Припустимо, що контур L утворений в площині z прямими розрізами Ac і cB, що створюють кут $\alpha\pi$. Позначимо ліву сторону контура L через Bc_2A, а праву — Ac_1B. Відобразимо конформно площину z на площину w з прямолінійним розрізом $A'B'$, що має ліву сторону $B'c_2'A'$ і праву сторону — $A'c_1'B'$. Припустимо, що точки c і c' лежать у початку координат площин z і w відповідно. Користуючись відомими формулами відображення верхньої півплощини ζ на z і w, одержимо

$$z=\mathrm{const}\,\frac{(\zeta-c_1'')^{\alpha}(\zeta-c_2'')^{2-\alpha}}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\overline{\zeta_0})};\quad w=\mathrm{const}\,\frac{(\zeta-c_1'')(\zeta-c_2'')}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\overline{\zeta_0})}, \quad (34)$$

звідки

$$\frac{dw}{dz}=(\zeta-c_1'')^{1-\alpha}(\zeta-c_2'')^{\alpha-1}\cdot\varphi(z), \quad (35)$$

причому

$$\varphi(c_1)=\frac{\mathrm{const}}{\alpha},\quad \varphi(c_2)=\frac{\mathrm{const}}{2-\alpha}.$$

Якщо $z\to c$, залишаючись ліворуч (праворуч) L (що записується так: $z\to c_2(c_1)$, $\zeta\to c_2''(c_1'')$), то поблизу c одержимо

$$\zeta-c_2''=(z-c)^{\frac{1}{2-\alpha}}\cdot\varphi_2(z);\ \zeta-c_1''=(z-c)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\varphi_1(z);\ |\varphi_1|,\ |\varphi_2|<\mathrm{const}, \quad (36)$$

звідки

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^{+}=(z-c)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}}\varphi_2(z);\quad \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-}=(z-c)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\varphi_1(z). \quad (37)$$

Припустимо тепер, що в площині w за формулою (2) заданий потенціал $v(w)$ з густиною в околі точки $c'\mu_1(\sigma)\in H$, що набуває на $L_w=A'B'$ якогось граничного значення, що також належить класу H в околі точки c'. За формулою (32) (точка $\tau\in L_w$)

$$\mu_1(\sigma)=-\frac{\tau'(\sigma)}{2\pi i l(\tau^0,\tau^0)}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^{+}-\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^{-}\right]. \quad (38)$$

В площині z потенціалові $v(w)$ відповідає потенціал $v[w(z)]=v(z)$ з густиною $\mu(s)$. Природно припустити, що в точці $t=c$ $\mu(s)$ має особливість вигляду $|s-s_0|^{-\gamma}$, тобто

$$\frac{\mu(s)}{t'}=\frac{\mu_*(t)}{(t-c)^\gamma}\left(\frac{t-c}{|s-s_0|}\right)^\gamma\frac{1}{t'}\quad(0\leqslant\gamma<1). \tag{39}$$

Для підтвердження цього припущення і визначення показника γ скористаємося теорією інтеграла типу Коші. На основі цієї теорії і припущення (39)

$$\frac{\mu(s)}{t'}=-\frac{1}{2\pi i l(t^0,\ t^0)}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^+-\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^-\right]+\varphi_0, \tag{40}$$

де φ_0 — відома обмежена функція. Зрівнюючи (40) і (38), на основі (37) можемо показати, що припущення (39) дійсно вірне, а показник γ знайдеться з рівності (маючи на увазі, що $\left(\frac{dv}{dz}\right)^\pm=\left(\frac{dv}{dw}\right)^\pm\left(\frac{dw}{dz}\right)^\pm$

$$\frac{\mu(s)}{t'}=-\frac{1}{2\pi i l(t^0,\ t^0)}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^+(t-c)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}}\varphi_2(t)-\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^-(t-c)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\varphi_1(t)\right]+\varphi_0. \tag{41}$$

Приймаючи $\alpha<1$ і користуючись тим, що $\operatorname{Im}\mu=0$, а функція t' має розрив 1-го роду при $t=c$, одержимо

$$\mu_1(s)=\begin{cases} m_1(s)\cdot|s-s_c|^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}}+\varphi_0 & (s\in L_{BC});\\ m_2(s)\cdot|s-s_c|^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}}+\varphi_0 & (s\in L_{AC}),\end{cases} \tag{42}$$

де $-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\alpha-1}{2-\alpha}\leqslant 0$.

Неважко також написати вираз похідної $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ поблизу кутової точки:

$$-\frac{1}{2\pi i l(z_0 c)}\frac{\partial v}{\partial z_0}=\begin{cases}\frac{e^{\gamma\pi i}m_2(c)-e^{-\gamma\pi i}m_1(c)}{2i\sin\gamma\pi}(z_0-c)^{-\gamma}+\Phi_0 & \text{ліворуч } L\\ \frac{e^{\gamma\pi i}m_2(c)-e^{\gamma\pi i}m_1(c)}{2i\sin\gamma\pi}(z_0-c)^{-\gamma}+\Phi_0 & \text{праворуч } L,\end{cases} \tag{43}$$

де

$$\gamma=\frac{1-\alpha}{2-\alpha},\quad |\Phi_0|<\frac{\text{const}}{|z_0-c|^{\alpha_0}},\ \alpha_0<\gamma.$$

6. Одержані результати можна застосувати для наближеного розв'язку задачі Діріхле на площині та в осесиметричному просторі з щілинами [див. 3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, 2-е изд., Физматгиз, 1962.
2. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, 2-е изд., М., 1964.
3. Л. А. Старокадомский. Решение задачи Дирихле для плоскости со щелями методом сингулярных интегральных уравнений. 1-ая республ. матем. конференция молодых исследователей, вып. 1. Изд-во АН УССР, стр. 606—616.

Л. А. СТАРОКАДОМСКИЙ

ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

(р е з ю м е)

Рассмотрены потенциал простого слоя (2) и видоизмененный потенциал простого слоя (3), с помощью которых решается внешняя задача Дирихле на плоскости и в осесимметрическом пространстве со щелями L_k путем сведения к интегральным уравнениям первого рода (15) и (16). Доказана разрешимость (15) при условии единственности решения (15). Исследованы свойства плотностей μ_k и $\overline{M}_k$ вблизи концов дуг L_k, свойства μ вблизи угловой точки контура, поведение потенциалов v и u и их первых производных вблизи линии L, включая концы, а также поведение v и первых производных v вблизи угловой точки.