ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 Серія механіко-математична Випуск 3

УДК 517.55

А. І. КАРДАШ, О. М. КОСТОВСЬКИЙ, І. І. ЧУЛИК

МАЖОРАНТИ ТА ДІАГРАМИ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Метою даної роботи є введення для цілої раціональної функції багатьох змінних поняття мажоранти та діаграми Ньютона, аналогічно тому, як це було зроблено для функції однієї змінної [1, 2], вивчення їх властивостей та застосування отриманих результатів для виділення областей комплексних змінних, в яких ціла раціональна функція не набуває нульових значень. Для спрощення викладу будемо розглядати комплекснозначні цілі раціональні функції (многочлени) двох комплексних змінних.

§ 1. ПОБУДОВА ДІАГРАМИ НЬЮТОНА ЦІЛОЇ РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ n-ого СТЕПЕНЯ ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ. МАЖОРАНТА НЬЮТОНА. ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Побудова діаграми Ньютона. В даній роботі розглядатимуться цілі раціональні функції n-ого степеня

$$f(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in E} A_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu} \tag{1.1}$$

над полем комплексних чисел. Через E позначимо множину пар (μ, ν) цілих невід'ємних індексів, відмінних від нуля коефіцієнтів функції (1.1), які зображають точку в координатній площині $\mu\nu$.

Будемо розглядати також цілу раціональну функцію, складену з модулів коефіцієнтів функції (1.1)

$$f_{\text{mod}}(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in E} a_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu}, \tag{1.2}$$

де $|A_{\mu\nu}| = a_{\mu\nu}$.

Для кожної раціональної функції (1.1) зіставимо в координатній площині $\mu\nu$ опуклий многокутник Q_f, який можна побудувати таким способом: а) будуємо всі точки (μ, ν) з множини E, б) з'єднуємо попарно побудовані точки відрізками і дістанемо фігуру, яка складається з скінченного числа відрізків. Границю цієї фігури позначимо через L_f (або L), яка обмежує опуклий многокутник Q_f (або Q). Нехай вершинами цього многокутника будуть (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2), ..., (μ_t, ν_t). Через $\overline{Q}_f$ позначимо многокутник Q_f разом з його границею L_f і $(\mu, \nu) = C_{\mu\nu}$.

Таким чином, кожній раціональній функції (1.1) можна зіставити єдиний многокутник $\overline{Q}_f$ з першої чверті координатної площини $\mu\nu$.

Розглянемо тепер систему координат $\mu\nu\xi$, в якій для кожного відмінного від нуля коефіцієнта $A_{\mu\nu}$ функції (1.1) побудуємо точку $P_{\mu\nu}$ з координатами μ, ν і $\xi = -\ln|A_{\mu\nu}| = \ln \dfrac{1}{a_{\mu\nu}}$. Точка $P_{\mu\nu}$ називається точкою зображення коефіцієнта $A_{\mu\nu}$ функції (1.1). Очевидно, що $C_{\mu\nu} = \underset{\mu\nu}{\text{пр}}\, P_{\mu\nu}$. Візьмемо довільну трійку точок зображення $P_{\mu_1\nu_1}$, $P_{\mu_2\nu_2}$, $P_{\mu_3\nu_3}$ і з'єднаємо їх попарно відрізками $P_{\mu_1\nu_1} P_{\mu_2\nu_2}$, $P_{\mu_2\nu_2} P_{\mu_3\nu_3}$, $P_{\mu_1\nu_1} P_{\mu_3\nu_3}$, а отриманий просторовий трикутник $P_{\mu_1\nu_1} P_{\mu_2\nu_2} P_{\mu_3\nu_3}$ позначимо символом $\Delta(P_{\mu_1\nu_1} P_{\mu_2\nu_2} P_{\mu_3\nu_3})$ або простіше — $\Delta(\mu_1, \nu_1; \mu_2, \nu_2; \mu_3, \nu_3)$; зокрема, деякі трикутники можуть вироджуватися у відрізки. Побудуємо тепер такі трикутники для всіх можливих трьох точок зображення, в результаті отримаємо просторову фігуру Φ, яка складається із скінченного числа многокутників.

Кожна пряма, що проходить через точку (α, β) многокутника $\overline{Q}_f$ і паралельна осі аплікат, перетинатиме фігуру Φ у скінченному числі точок. Позначимо через $B(\alpha, \beta, \varkappa_{\alpha\beta})$ ту з точок, апліката якої буде найменшою. Множина точок $B_{\alpha\beta} = B(\alpha, \beta, \varkappa_{\alpha\beta})$, де $(\alpha, \beta) \in \overline{Q}_f$, утворює поверхню $\mathfrak{d}$, яка обмежує фігуру Φ знизу. З побудови фігури Φ випливає, що її границя $\mathfrak{d}$ є багатогранна відкрита поверхня, вершини якої перебувають в точках зображення коефіцієнтів функції (1.1). Поверхня $\mathfrak{d}$ називається діаграмою Ньютона функції (1.1) і позначається символом $\mathfrak{d}_f$. Контур або край цієї поверхні $\mathfrak{d}_f$ позначимо символом $\mathfrak{B}_f$, а її грані та ребра — відповідно символами $\sigma(P_{\mu_1\nu_1}, \ldots, P_{\mu_r\nu_r})$ і $\gamma(P_{k_1l_1} P_{k_2l_2})$, або простіше — $\sigma(\mu_1, \nu_1; \ldots; \mu_r, \nu_r)$ і $\gamma(k_1, l_1; k_2, l_2)$, де $P_{k_il_i}$ — вершини грані σ, яка є многокутником. Очевидно,

$$\underset{\mu\nu}{\text{пр}}\, \mathfrak{d}_f = \overline{Q}_f \text{ та } \underset{\mu\nu}{\text{пр}}\, \mathfrak{B}_f = L_f, \tag{1.3}$$

Теорема 1.1. *Діаграма Ньютона $\mathfrak{d}_f$ цілої раціональної функції (1.1) є відкритою багатогранною опуклою вниз поверхнею, для якої має місце рівність (1.3).*

Багатогранна поверхня називається опуклою, якщо вона розміщена по одну сторону від площини будь-якої її грані, продовженої необмежено. Покажемо, що поверхня $\mathfrak{d}_f$ має таку властивість. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що поверхня $\mathfrak{d}_f$ не опукла вниз, тоді існує грань $\sigma_i = \sigma(\mu_1, \nu_1; \ldots; \mu_r, \nu_r)$ така, що поверхня $\mathfrak{d}_f$ не розміщується по одну сторону від цієї грані, продовженої необмежено, отже, деяка грань σ_j цієї поверхні (або частина грані) розташована під площиною S, яка містить грань σ_i, тобто є принаймні одна вершина P_{kl} грані σ_j, яка лежить нижче від площини S. З'єднаємо точку зображення P_{kl} відрізками з усіма вершинами грані σ_i, тоді дістанемо просторові трикутники $\Delta(P_{kl} P_{\mu_1\nu_1} P_{\mu_2\nu_2})$, $\Delta(P_{kl} P_{\mu_2\nu_2} P_{\mu_3\nu_3})$, ..., $\Delta(P_{kl} P_{\mu_{r-1}\nu_{r-1}} P_{\mu_r\nu_r})$, які будуть лежати нижче від грані σ_i, а тому грань σ_i не може бути нижньою границею фігури Φ. Наше припущення неправильне. Теорема доведена.

Наслідок 1.1. а) Кожне ребро діаграми Ньютона $\mathfrak{d}_f$, що не належить контурові $\mathfrak{B}_f$, є стороною тільки двох її граней. Ребро, яке належить краю $\mathfrak{B}_f$, належить тільки одній грані. б) Кожна грань діаграми $\mathfrak{d}_f$ є опуклим многокутником. в) Кожна вершина діаграми

$\mathfrak{d}_f$ є спільною вершиною для декількох граней (не менше від трьох), причому багатогранний кут, що примикає до однієї вершини, завжди є опуклим багатогранним кутом. г) Будь-який відрізок $B_{\alpha\beta}\ B_{\alpha_1\beta_1}$, що з'єднує дві довільні точки діаграми (зокрема, дві вершини її, що не належать одній грані), завжди лежить вище поверхні $\mathfrak{d}_f$.

Точка зображення P_{kl}, яка знаходиться у вершині діаграми $\mathfrak{d}_f$, називається вершинною точкою діаграми, а її індекси k і l називаються вершинними індексами.

Будь-яка точка зображення $P_{\mu\nu}$, яка не є вершиною, лежить на грані або ребрі діаграми $\mathfrak{d}_f$, або розміщена вище неї. Якщо для точки зображення $P_{\mu\nu}=P(\mu,\nu,\ -\ \ln a_{\mu\nu})$ відповідну точку діаграми Ньютона позначити через $B_{\mu\nu}=B(\mu,\nu,\varkappa_{\mu\nu})$, то завжди

$$\xi=-\ln a_{\mu\nu}\geqslant\varkappa_{\mu\nu}. \tag{1.4}$$

Точка зображення $P_{\mu\nu}$ називається діаграмною точкою діаграми $\mathfrak{d}_f$, якщо

$$\xi=-\ln a_{\mu\nu}=\varkappa_{\mu\nu}, \tag{1.5}$$

а її індекси μ і ν є діаграмними індексами.

Вершини P_{kl}, $P_{k\pm1,\,l\pm1}$, а також P_{kl}, $P_{k\pm1,\,l}$, та P_{kl}, $P_{k,\,l\pm1}$ називаються сусідніми вершинами. Ребра, що з'єднують дві сусідні вершини, називаються елементарними ребрами діаграми Ньютона. В протилежному випадку будемо називати ребро складним (неелементарним).

Спрямленим ребром називається таке ребро, на якому розміщено декілька елементарних ребер. Для того щоб складне ребро було спрямленим, необхідно й достатньо, щоб проекція цього ребра на площину $\mu\nu$ була паралельна осі абсцис або осі ординат, або утворювала кут $\pm45^\circ$ з віссю абсцис.

Ребро, паралельне координатним площинам $\mu\xi$ чи $\nu\xi$, будемо називати орієнтованим або правильним ребром діаграми. Вершина P_{kl} діаграми називається правильною вершиною, якщо грані, що прилягають до цієї вершини, утворюють чотиригранний кут з правильними ребрами.

Діаграма Ньютона $\mathfrak{d}_f$ називається регулярною, якщо всі її ребра елементарні або спрямлені. Очевидно, що якщо регулярна діаграма $\mathfrak{d}_f$ не має спрямлених ребер, то всі точки зображення є вершинами. Діаграма Ньютона, яка складається тільки з чотирьох граней, що утворюють правильну вершину в деякій точці зображення P_{kl} $((k,l)\in\overline{Q}_f)$, називається найпростішою діаграмою Ньютона і позначається через $\overset{*}{\mathfrak{d}}_f\,(k,\,l)$.

Через кожне ребро контура $\mathfrak{B}_f$ діаграми проведемо півплощину, паралельну осі аплікат в додатному напрямі цієї осі. Отримаємо призматичну поверхню, обмежену знизу опуклою вниз багатогранною поверхнею $\mathfrak{d}_f$; тепер щодо кожної точки зображення контура $\mathfrak{B}_f$ можна сказати, чи є вона вершиною для багатогранного кута чи ні.

1.2. Нормальні раціональні функції. Мажоранта Ньютона цілої функції. Ціла раціональна функція

$$N(z,w)=\sum_{(\mu,\,\nu)\in\overline{Q}_N} t_{\mu\nu}\,z^{\mu}\,w^{\nu} \tag{1.6}$$

з додатними коефіцієнтами називається нормальною на опуклому многокутнику $\overline{Q}_N$, якщо всі її точки зображення діаграмні. З визначення випливає, що кожній відкритій опуклій вниз багатогранній поверхні, яка проектується на координатну площину $\mu\nu$ в деякий опуклий многокутник і абсциси і ординати вершин якої є цілі числа, відповідає єдиний нормальний многочлен (1.6).

Візьмемо тепер функцію (1.1) і побудуємо для неї многокутник Q_f та діаграму $\mathfrak{d}_f$. Позначимо через $B(\mu, \nu, \varkappa_{\mu\nu})$ точки багатогранної поверхні $\mathfrak{d}_f$, абсциси і ординати якої є цілі додатні числа, причому $(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f$. Складемо тепер цілу раціональну функцію

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f} T_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu}, \tag{1.7}$$

коефіцієнти якої обчислюються за формулами

$$T_{\mu\nu} = \exp(-\varkappa_{\mu\nu}) > 0 \quad (\mu, \nu) \in \overline{Q}_f. \tag{1.8}$$

Згідно з визначенням, (1.7) є нормальною раціональною функцією на многокутнику $\overline{Q}_f$ і називається **мажорантою Ньютона** раціональної функції (1.1) і позначається $\mathfrak{M}_f(z, w)$.

Справді, $\mathfrak{M}_f(z, w)$ є нормальною мажорантою функції (1.1) $|A_{\mu\nu}| \leqslant T_{\mu\nu}$ $((\mu, \nu) \in \overline{Q}_f)$, що зразу випливає з нерівності (1.4). З нерівності (1.5) для діаграмних точок, зокрема для вершинних точок, можемо записати

$$a_{\mu\nu} = |A_{\mu\nu}| = T_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu) \in \overline{Q}_f. \tag{1.9}$$

Теорема 1.2. *Якщо ціла раціональна функція (1.2) є нормальною, то*

$$f_{\text{mod}}(z, w) \equiv \mathfrak{M}_f(z, w). \tag{1.10}$$

Справедливість теореми випливає з визначення $f_{\text{mod}}(z, w)$ та $\mathfrak{M}_f(z, w)$.

1.3. Числові нахили та відхилення мажоранти та діаграми Ньютона. Нехай для функції (1.1) вже побудована діаграма $\mathfrak{d}_f$ і визначена мажоранта (1.7). Відношення

$$R_{kl}(\mu) = \frac{T_{k-1,\, l}}{T_{kl}} \quad \text{і} \quad R_{kl}(\nu) = \frac{T_{k,\, l-1}}{T_{kl}} \tag{1.11}$$

називаються (k, l)-ми *числовими нахилами* мажоранти $\mathfrak{M}_f(z, w)$ в напрямі осей абсцис і ординат. Відношення

$$D_{kl}(\mu) = \frac{R_{k+1,\, l}(\mu)}{R_{kl}(\mu)} = \frac{T_{kl}^2}{T_{k-1,\, l}\, T_{k+1,\, l}} \quad \text{і} \quad D_{kl}(\nu) = \frac{R_{k,\, l+1}(\nu)}{R_{kl}(\nu)} = \frac{T_{kl}^2}{T_{k,\, l-1}\, T_{k,\, l+1}} \tag{1.12}$$

називаються (k, l)-ми *відхиленнями* мажоранти Ньютона відповідно в напрямі осей 0μ і 0ν.

З опуклості вниз багатогранної поверхні $\mathfrak{d}_f$ випливають такі нерівності:

$$R_{kl}(\mu) \leqslant R_{k+1,\, l}(\mu), \ R_{kl}(\nu) \leqslant R_{k,\, l+1}(\nu), \ (k, l) \in \overline{Q}_f \tag{1.13}$$

та

$$D_{kl}(\mu) \geqslant 1, \ D_{kl}(\nu) \geqslant 1, \ (k, l) \in \overline{Q}_f. \tag{1.14}$$

Нехай точка зображення P_{kl} є вершинною (або діаграмною) точкою діаграми $\mathfrak{d}_f$. Проведемо через цю точку площину, паралельну площині $\mu\xi$, яка перетне багатогранний кут, що утворює вершину P_{kl}, по двох відрізках Γ_{kl}^+ і Γ_{kl}^-, кутові коефіцієнти яких ми позначимо відповідно через $\operatorname{tg}\varphi_{kl}^+(\mu)$ і $\operatorname{tg}\varphi_{kl}^-(\mu)$.

Величини

$$\tilde{R}_{k,l}^+(\mu) = \exp[\operatorname{tg}\varphi_{kl}^+(\mu)] \text{ і } \tilde{R}_{kl}^-(\mu) = \exp[\operatorname{tg}\varphi_{kl}^-(\mu)] \tag{1.15}$$

називаються **числовими нахилами** діаграми $\mathfrak{d}_f$ функції (1.1) в напрямі осі абсцис.

Відношення

$$\tilde{D}_{kl}(\mu) = \frac{\tilde{R}_{k,l}^+(\mu)}{\tilde{R}_{kl}^-(\mu)} = \exp[\operatorname{tg}\varphi_{kl}^+(\mu) - \operatorname{tg}\varphi_{kl}^-(\mu)] \tag{1.16}$$

називається (k, l)-м відхиленням діаграми $\mathfrak{d}_f$ функції (1.1)

Аналогічно визначаються числові нахили та відхилення в додатному напрямі осі ординат:

$$\tilde{R}_{k,l}^+(\nu) = \exp(\operatorname{tg}\varphi_{kl}^+(\nu)], \ \tilde{R}_{kl}^-(\nu) = \exp[\operatorname{tg}\varphi_{kl}^-(\nu)]; \tag{1.17}$$

$$\tilde{D}_{kl}(\nu) = \frac{\tilde{R}_{k,l}^+(\nu)}{\tilde{R}_{kl}^-(\nu)} = \exp[\operatorname{tg}\varphi_{kl}^+(\nu) - \operatorname{tg}\varphi_{kl}^-(\nu)]. \tag{1.18}$$

З пункту г) наслідку 1.1 та опуклості вниз діаграми $\mathfrak{d}$ легко встановити справедливість таких нерівностей:

$$R_{kl}(\mu) \leqslant \tilde{R}_{kl}^-(\mu) \leqslant \tilde{R}_{kl}^+(\mu) \geqslant R_{k+1,l}(\mu); \tag{1.19}$$

$$R_{kl}(\nu) \leqslant \tilde{R}_{kl}^-(\nu) \leqslant \tilde{R}_{kl}^+(\nu) \leqslant R_{k,l+1}(\nu); \tag{1.20}$$

$$\tilde{D}_{kl}(\mu) \leqslant D_{kl}(\mu), \ \tilde{D}_{kl}(\nu) \leqslant D_{kl}(\nu) \tag{1.21}$$

для кожної точки $B(k, l, \varkappa_{kl})$ поверхні $\mathfrak{d}_f$.

Теорема 1.3. *Для того щоб*

$$\tilde{R}_{kl}^-(\mu) = R_{kl}(\mu) \quad (k, l) \in \overline{Q}_f, \tag{1.22}$$

необхідно й достатньо щоб ні одна з проекцій складних ребер на площину $\mu\nu$ не перетинала внутрішньої частини відрізка $C_{kl}C_{k-1,l}$. Аналогічне твердження має місце й для виконання рівності

$$\tilde{R}_{kl}^-(\nu) = R_{kl}(\nu) \quad (k, l) \in \overline{Q}_f. \tag{1.23}$$

Наслідок 1.2. Для того щоб

$$\tilde{D}_{kl}^-(\mu) = D_{kl}(\mu) \text{ або } \tilde{D}_{kl}(\nu) = D_{kl}(\nu), \tag{1.24}$$

необхідно й достатньо, щоб проекції складних ребер $\mathfrak{d}_f$ (якщо діаграма має такі ребра) на площину $\mu\nu$ не перетинали внутрішніх частин відрізків $C_{k-1,l}C_{kl}$, $C_{kl}C_{k+1,l}$ (або $C_{k,l-1}C_{kl}$, $C_{kl}C_{k,l+1}$).

Наслідок 1.3. Якщо поверхня $\mathfrak{d}_f$ є регулярною, то рівності (1.22)—(1.24) мають місце для кожної пари індексів (μ, ν), для яких точка $(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f$.

Доведення теореми. Якщо ні одна з проекцій складних ребер не перетинає внутрішньої частини відрізка $C_{kl}\,C_{k-1,\,l}$, то відрізок $B_{kl}\,B_{k-1,l}$ або є частиною ребра діаграми, або всіма своїми точками лежить на одній грані σ_i; в обох випадках має місце рівність (1.22). Нехай тепер має місце (1.22). Припустимо, що проекція деякого ребра діаграми перетинає відрізок $C_{kl}\,C_{k-1,\,l}$ в точці H, що лежить в середині цього відрізка і $\underset{\mu\nu}{\text{пр}}\, B = H$. Відрізок $B_{k-1,\,l}\; B$ не може бути ребром діаграми, тому що абсциса та ордината будь-якого із кінців ребра повинні бути цілими числами. Отже, відрізок $B_{k-1,\,l}B$ ділить деяку грань σ на дві частини. Тому точка $B_{k-1,\,l}$ лежить вище грані σ_i продовженої в усі боки необмежено. Виходить, що $\widetilde{R_{kl}}\,(\mu) > R_{kl}\,(\mu)$, а це суперечить припущенню. Теорема доведена.

1.4. Характеристики (параметри) ребристості діаграми Ньютона. Величини

$$D_{kl}^{++} = \frac{T_{k+1,\,l}\,T_{k,\,l+1}}{T_{kl}\,T_{k+1,\,l+1}} = \frac{R_{k+1,\,l+1}\,(\mu)}{R_{k+1,\,l}\,(\mu)} = \frac{R_{k+1,\,l+1}\,(\nu)}{R_{k,\,l+1}\,(\nu)};$$

$$D_{kl}^{+-} = \frac{T_{k+1,\,l}\,T_{k,\,l-1}}{T_{kl}\,T_{k+1,\,l-1}} = \frac{R_{k+1,\,l-1}\,(\mu)}{R_{k+1,\,l}\,(\mu)} = \frac{R_{kl}\,(\nu)}{R_{k+1,\,l}\,(\nu)};$$

$$D_{kl}^{-+} = \frac{T_{k-1,\,l}\,T_{k,\,l+1}}{T_{kl}\,T_{k-1,\,l+1}} = \frac{R_{kl}\,(\mu)}{R_{k,\,l+1}\,(\mu)} = \frac{R_{k-1,\,l+1}\,(\nu)}{R_{k,\,l+1}\,(\nu)}; \tag{1.25}$$

$$D_{kl}^{--} = \frac{T_{k-1,\,l}\,T_{k,\,l-1}}{T_{kl}\,T_{k-1,\,l-1}} = \frac{R_{kl}\,(\mu)}{R_{k,\,l-1}\,(\mu)} = \frac{R_{kl}\,(\nu)}{R_{k-1,\,l}\,(\nu)}$$

називаються характеристиками або параметрами ребристості діаграми $\mathfrak{d}_f$ в околі точки C_{kl} (або в околі вершини P_{kl}). Під околом точки C_{kl} ми, як правило, будемо розуміти квадрат $C_{k-1,\,l-1}\,C_{k+1,\,l-1}\,C_{k+1,\,l+1}\,C_{k-1,\,l+1}$ з центром $C_{kl} = \underset{\mu\nu}{\text{пр}}\, P_{kl}$.

Теорема 1.4. *Для того, щоб вершина P_{kl} діаграми $\mathfrak{d}_f$ була правильною, необхідно й достатньо, щоб*

$$D_{kl}^{++} \geqslant 1,\; D_{kl}^{+-} \geqslant 1,\; D_{kl}^{-+} \geqslant 1,\; D_{kl}^{--} \geqslant 1. \tag{1.26}$$

Доведення. Нехай $B(\mu, \nu, \varkappa_{\mu\nu})$ — точка діаграми $\mathfrak{d}_f$. Припустимо, що для вершини $P_{kl} = B_{kl}$ виконуються нерівності (1.26). Тоді з першої нерівності

$$D_{kl}^{++} = \left[\exp\left(\ln\frac{1}{T_{kl}}\right) + \exp\left(\ln\frac{1}{T_{k+1,\,l+1}}\right)\right] : \left[\exp\left(\ln\frac{1}{T_{k+1,\,l}}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(\ln\frac{1}{T_{k,\,l+1}}\right)\right] = \exp\left[(\varkappa_{kl} + \varkappa_{k+1,\,l+1}) - (\varkappa_{k+1,\,l} + \varkappa_{k,\,l+1})\right] \geqslant 1$$

випливає, що точка $B_{k+1,\,l+1}$ розташована на площині або вище площини S_1, проведеної через точки B_{kl}, $B_{k+1,}$, $B_{k,\,l+1}$. Покажемо тепер, що всі точки $B_{k+i,\,l+j}$ $(i, j \geqslant 0)$ діаграми, а значить і точки зображення $P_{k+i,\,l+j}$ $(i, j \geqslant 0,\; (k+i, l+j) \in \overline{Q}_f)$ лежать на площині або вище площини S_1. Площини, проведені через точку B_{kl} паралельно координатним площинам $\mu\xi$ та $\nu\xi$, перетинають поверхню δ_f по опуклих вниз лініях, тому точки $B_{k,\,l+j}$ та $B_{k+i,\,l}$ з δ_f лежать на площині або вище площини S_1.

Візьмемо тепер довільну точку $B_{k+i,\,l+j}$ з δ_f та припустимо, що вона розташована нижче площини S_1. Звідси випливає, що точка $B_{k+1,\,l+1}$ лежить вище трикутника $\Delta(B_{kl}\,B_{k+1,\,l}\,B_{k+i,\,l+j})$ (або трикутника $\Delta(B_{kl}, B_{k,\,l+1}B_{k+i,\,l+j})$, які в свою чергу розміщені не вище діаграми δ_f згідно з властивістю г) наслідку 1.1. Отже, точка $B_{k+1,\,l+1}$ не може належати діаграмі δ_f. Наше припущення неправильне. Отже, всі точки $B_{k+i\,l+j}$ $(i, j \geqslant 0)$ розташовані на площині або вище площини S_1.

Цілком аналогічно, використовуючи нерівності (1.26), доведемо, що всі точки $B_{k+i,\,l-j}$, $B_{k-i,\,l+j}$, $B_{k-i,\,l-j}$ $(i, j \geqslant 0;\ (k\pm i, l\pm j)\ \in \overline{Q}_f)$ розміщені на площинах або вище відповідних площин S_2, S_3, S_4, проведених через точки B_{kl}, $B_{k+1,\,l}$, $B_{k,\,l-1}$; B_{kl}, $B_{k,\,l-1}$, $B_{k-1,\,l}$; B_{kl}, $B_{k-1,\,l}$, $B_{k,\,l-1}$. Таким чином, всі точки $B_{\mu\nu}$, а отже і всі точки зображення $P_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f$, лежать всередині чотиригранного кута, утвореного площинами S_1, S_2, S_3, S_4; тому що, крім того, точки $B_{k,\,l+1}$, $B_{k+1,\,l}$, $B_{k,\,l-1}$, $B_{k-1,\,l}$ лежать на діаграмі δ_f, то кожний з просторових трикутників $\Delta(B_{kl}\ B_{k+1,\,l}\ B_{k,\,l+1})$; $\Delta(B_{kl}\ B_{k+1,\,l}\ B_{k,\,l-1})$; $\Delta(B_{kl}\ B_{k,\,l+1},\ B_{k-1,\,l})$; $\Delta(B_{kl}\,B_{k-1\,\,l}\,B_{k,\,l-1})$ є гранню або складовою частиною грані діаграми δ_f, тобто вершина P_{kl} — правильна.

Доведемо тепер необхідність теореми. Припустимо, що вершина $P_{kl} = B_{kl}$ діаграми є правильна, тоді з трапецій $C_{k+1,\,l}\ B_{k+1\ \,l}\ B_{k,\,l+1}\ C_{k,\,l+1}$ та $C_{kl}\,B_{kl}\ B_{k+1,\,l+1}\ C_{k+1,\,l+1}$ легко зауважити нерівності $\varkappa_{kl} + \varkappa_{k+1,\,l+1} \geqslant \varkappa_{k+1,\,l} + \varkappa_{k,\,l+1}$ бо точка $B_{k+1,\,l+1}$ розміщена вище площини S_1, проведеної через точки $B_{kl}, B_{k+1,\,l}, B_{k,\,l+1}$. З останньої нерівності випливає $D_{kl}^{++} \geqslant 1$. Аналогічно доводиться решта нерівностей (1.26). Теорема доведена.

З доведення теореми випливає

Наслідок 1.4. Якщо діаграма δ_f є найпростішою, тобто складається тільки з чотирьох граней, які утворюють простий кут в деякій точці зображення P_{kl}, то всі параметри ребристості

$$D_{kl}^{++} = D_{kl}^{+-} = D_{kl}^{-+} = D_{kl}^{--} = 1 \quad (\mu, \nu) \in Q_f. \tag{1.27}$$

§ 2. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МАЖОРАНТИ НЬЮТОНА ТА ЧИСЛОВИХ НАХИЛІВ І ВІДХИЛЕНЬ ДІАГРАМИ δ_f

Формули, які виражають коефіцієнти мажоранти Ньютона через модулі коефіцієнтів функції (1.1), є досить складними навіть для раціональної функції однієї змінної. Ще більш складні ці формули для раціональної функції багатьох змінних. Те ж саме можна сказати про формули, які виражають числові нахили та відхилення діаграми Ньютона.

2.1. Обчислення окремого коефіцієнта T_{kl} мажоранти Ньютона. Введемо позначення

$$h_{23}(k_1, l_1) = h_{123} = \begin{vmatrix} k_1-k_2 & l_1-l_2 \\ k_3-k_2 & l_3-l_2 \end{vmatrix},$$

тоді

$$h_{123} = -h_{132},\ \ h_{312} = -h_{213} = h_{123}.$$

Умови, необхідні й достатні для того, щоб точка $C_{kl} = C_{k_0 l_0}$ перебувала всередині трикутника $\Delta(C_{k_1 l_1}\ C_{k_2 l_2}\ C_{k_3 l_3})$ або належала стороні чи вершині, як відомо, можна записати у вигляді таких нерівностей:

$$\begin{aligned} H_1 &= h_{23}(k, l)\cdot h_{23}(k_1, l_1) \geqslant 0; \\ H_2 &= h_{31}(k, l)\cdot h_{31}(k_2, l_2) \geqslant 0; \\ H_3 &= h_{12}(k, l)\cdot h_{12}(k_3, l_3) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Якщо $H_1=0$, $H_2\neq 0$, $H_3\neq 0$ або $H_1=0$, $H_2=0$, $H_3\neq 0$, то точка C_{kl} лежить відповідно на стороні $C_{k_2 l_2} C_{k_3 l_3}$ або вершині $C_{k_3 l_3}$ трикутника. Якщо $H_1=H_2=H_3=0$, то вершини $C_{k_1 l_1}$, $C_{k_2 l_2}$, $C_{k_3 l_3}$ лежать на одній прямій.

Розглянемо просторовий трикутник, утворений точками зображення $P_{k_1 l_1}$, $P_{k_2 l_2}$, $P_{k_3 l_3}$, проекція якого на площину $\mu\nu$ дасть трикутник $\Delta(C_{k_1 l_1} C_{k_2 l_2} C_{k_3 l_3})$, вершини якого не лежать на одній прямій.

Нехай для точки $C_{kl}=C_{k_0 l_0}$ виконуються нерівності (2.1). Визначимо аплікату точки $P_{kl}=P(k, l, \xi_{kl})$ перетину трикутника $\Delta(P_{k_1 l_1} P_{k_2 l_2} P_{k_3 l_3})$ з прямою, паралельною осі аплікат 0ξ, що проходить через точку C_{kl}. Рівняння площини, що проходить через точки зображення, $P_{k_1 l_1}$, $P_{k_2 l_2}$, $P_{k_3 l_3}$, можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} \mu-k_1 & \nu-l_1 & \xi-\xi_1 \\ k_2-k_1 & l_2-l_1 & \xi_2-\xi_1 \\ k_3-k_1 & l_3-l_1 & \xi_3-\xi_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu-k_1 & \nu-l_1 & \ln(a_{k_1 l_1}:t_{kl}) \\ k_2-k_1 & l_2-l_1 & \ln(a_{k_1 l_1}:a_{k_2 l_2}) \\ k_3-k_1 & l_3-l_1 & \ln(a_{k_1 l_1}:a_{k_3 l_3}) \end{vmatrix} = 0.$$

Визначаючи з цього рівняння коефіцієнт $t_{kl}=\exp(-\xi)$ і беручи до уваги, що

$$1-\frac{h_{13}(k, l)}{h_{13}(k_2, l_2)}+\frac{h_{12}(k, l)}{h_{13}(k_2, l_2)}=\frac{h_{32}(k, l)}{h_{13}(k_2, l_2)},$$

отримаємо

$$t_{kl}=\left(a_{k_1 l_1}^{h_{32}(k, l)}\, a_{k_2 l_2}^{h_{31}(k, l)}\, a_{k_3 l_3}^{h_{12}(k, l)}\right)^{\frac{1}{h_{12}(k_3, l_3)}}.$$

Нарешті, з визначення діаграми та мажоранти Ньютона отримаємо формулу для визначення коефіцієнта

$$T_{kl}=\max_{H_1, H_2, H_3\geqslant 0} t_{kl}, \tag{2.2}$$

де максимальне значення береться по всіх трикутниках $\Delta(P_{k_1 l_1} P_{k_2 l_2} P_{k_3 l_3})$, для яких в (2.1) має місце хоч би одна строга нерівність.

2.2. Визначення окремих числових нахилів і відхилень діаграми Ньютона. Припустимо, що точки зображення функції (1.1) вже побудовані. Визначимо спочатку необхідні й достатні умови, щоб задана точка зображення P_{kl} $(k, l)\in\overline{Q}_f$ була діаграмною точкою. Візьмемо для цього дві довільні точки зображення $P_{k_1 l_1}$, $P_{k_2 l_2}$ для деяких $k_2<k\leqslant k_1$ $[(k_1, l_1), (k_2 l_2)\in\overline{Q}_f]$ та визначимо тангенс кута φ між віссю 0ν і відрізком $P_{kl}N$ перетину трикутника $\Delta(P_{kl} P_{k_1 l_1} P_{k_2 l_2})$ з площиною, яка проходить через точку зображення P_{kl} паралельно координатній площині $\nu\xi$. Введемо позначення $\mu_1=k_1-k$, $\mu_2=k-k_2$, $\nu_1=l_1-l$, $\nu_2=l-l_2$, де $\mu_1\geqslant 0$, $\mu_2\geqslant 0$, $\nu_1\leqslant 0$, $\nu_2\leqslant 0$. З простих геометричних міркувань одержимо

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\varphi^{+}_{kl\, k_1 l_1 k_2 l_2}(\nu)=\ln\left(\frac{a_{kl}^{\mu_1+\mu_2}}{a_{k_1 l_1}^{\mu_2}\, a_{k_2 l_2}^{\mu_1}}\right)^{\frac{1}{\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1}}.$$

Визначимо тепер

$$r_{kl}^{+}(\nu)=\min_{\substack{\mu_1\geq 0,\ \mu_2>0\\ h_{12}(k,\,l)<0}}\exp\left[\operatorname{tg}\varphi_{klk_1l_1k_2l_2}^{+}(\nu)\right]=\min_{\substack{\mu_1\geq 0,\ \mu_2>0\\ h_{12}(k,\,l)<0}}\left(\frac{a_{kl}^{\mu_1+\mu_2}}{a_{k_1l_1}^{\mu_2}\,a_{k_2l_2}^{\mu_1}}\right)^{\frac{1}{\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1}}, \tag{2.3}$$

де $\dfrac{1}{k_2-k_1}h_{12}(k,l)>0$, але $k_2-k_1<0$, отже, $h_{12}(k,l)<0$.

Аналогічно встановимо

$$r_{kl}^{-}(\nu)=\max_{\substack{\mu_1\geq 0,\ \mu_2>0\\ h_{12}(k,\,l)>0}}\left(\frac{a_{k_1l_1}^{\mu_2}\,a_{k_2l_2}^{\mu_1}}{a_{kl}^{\mu_1+\mu_2}}\right)^{\frac{1}{\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1}}, \tag{2.4}$$

де $\dfrac{1}{k_2-k_1}h_{12}(k,l)<0$, але $k_2-k_1<0$, отже, $h_{12}(k,l)>0$. Введемо величину

$$d_{kl}(\nu)=\frac{r_{kl}^{+}(\nu)}{r_{kl}^{-}(\nu)}. \tag{2.5}$$

Аналогічно знайдемо

$$r_{kl}^{+}(\mu)=\min_{\substack{\nu_1\geq 0,\ \nu_2>0\\ g_{12}(k,\,l)<0}}\left(\frac{a_{kl}^{\nu_1+\nu_2}}{a_{k_1l_1}^{\nu_2}\,a_{k_2l_2}^{\nu_1}}\right)^{\frac{1}{\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1}}; \tag{2.6}$$

$$r_{kl}^{-}(\mu)=\max_{\substack{\nu_1\geq 0,\ \nu_2>0\\ g_{12}(k,\,l)>0}}\left(\frac{a_{k_1l_1}^{\nu_2}\,a_{k_2l_2}^{\nu_1}}{a_{kl}^{\nu_1+\nu_2}}\right)^{\frac{1}{\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1}}, \tag{2.7}$$

де $l_1\geqslant l>l_2$, $\dfrac{1}{l_2-l_1}\,g_{12}(k,l)=\dfrac{1}{l_1-l_2}h_{12}(k,l)$

і

$$d_{kl}(\mu)=\frac{r_{kl}^{+}(\mu)}{r_{kl}^{-}(\mu)}. \tag{2.8}$$

Якщо $d_{kl}(\mu)\geqslant 1$ і $d_{kl}(\nu)\geqslant 1$, то точка зображення P_{kl} є діаграмною. У цьому випадку

$$\tilde{R}_{kl}^{-}(\mu)=r_{kl}^{-}(\mu),\ \ \tilde{R}_{kl}^{-}(\nu)=r_{kl}^{-}(\nu);\ \ \tilde{R}_{kl}^{+}(\mu)=r_{kl}^{+}(\mu),\ \ \tilde{R}_{kl}^{+}=r_{kl}^{+}(\nu); \tag{2.9}$$

$$\tilde{D}_{kl}(\mu)=d_{kl}(\mu),\ \ \tilde{D}_{kl}(\nu)=d_{kl}(\nu), \tag{2.10}$$

де праві частини визначаються за формулами (2.3) — (2.8).

Якщо не виконується хоч одна з нерівностей $d_{kl}(\mu)\geqslant 1$ і $d_{kl}(\nu)\geqslant 1$, то точка зображення P_{kl} не є діаграмною і розміщена вище діаграми $\mathfrak{d}_f$.

Розглянемо всі точки $C_{k_1l_1}$ і $C_{k_2l_2}$ з многокутника Q_f, відмінні від точки C_{kl}, для яких $h_{12}(k,l)=0$, що означає, що точка C_{kl} лежить на відрізку $C_{k_1l_1}C_{k_2l_2}$. Позначимо через H_{kl} точку відрізка $P_{k_1l_1}P_{k_2l_2}$, абсциса якої дорівнює k, а ордината l; тоді легко показати, що

$$C_{kl}H_{kl}=\ln\left(a_{k_1l_1}^{-\mu_2}a_{k_2l_2}^{-\mu_1}\right)^{\frac{1}{\mu_1+\mu_2}}=\ln\left(a_{k_1l_1}^{-\nu_2}a_{k_2l_2}^{-\nu_1}\right)^{\frac{1}{\nu_1+\nu_2}},$$

де

$\mu_1=k_1-k>0$, $\mu_2=k-k_2>0$ і $\nu_1=l_1-l>0$, $\nu_2=l-l_2>0$ або $\nu_1=l-l_1<0$, $\nu_2=l_2-l<0$; $\dfrac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}=\dfrac{\nu_1}{\nu_1+\nu_2}$.

Рівність останніх співвідношень випливає з умови, що $h_{12}(k, l)=0$. Значить, щоб при умові $d_{kl}\ (\mu)>1$, $d_{kl}\ (\nu)>1$ в точці зображення P_{kl} була вершина, необхідно й достатньо, щоб виконувалась нерівність $-\ln a_{kl}=\xi<C_{kl}H_{kl}$ для всіх пар точок $C_{k_1l_1}$, $C_{k_2l_2}$ з $\overline{Q}_f$, для яких $h_{12}(k, l)=0$. Звідси одержимо

$$a_{kl}>(a^{\mu_1}_{k_1l_1}\ a^{\mu_1}_{k_2l_2})^{\frac{1}{\mu_1+\mu_2}}=(a^{\nu_2}_{k_1l_1}\ a^{\nu_1}_{k_2l_2})^{\frac{1}{\nu_1+\nu_2}}, \qquad (2.11)$$

де

$$\mu_1=k_1-k>0,\ \mu_2=k-k_2>0\ \text{ і }\ \nu_1=l_1-l>0,\ \nu_2=l-l_2>0\ \text{ або }\ \nu_1=l-l_1<0,$$

$$\nu_2=l_2-l<0. \qquad (2.12)$$

Якщо $d_{kl}\ (\mu)=1$, $d_{kl}\ (\nu)=1$, то точка P_{kl} лежить на грані σ діаграми Ньютона. Якщо $d_{kl}\ (\mu)>1$ і $d_{kl}\ (\nu)=1$ (або $d_{kl}\ (\mu)=1$ і $d_{kl}\ (\nu)>1$), то точка зображення лежить на спрямленому орієнтованому (правильному) ребрі, яке паралельне координатній площині $\nu\xi$ (відповідно $\mu\xi$). Якщо ж $d_{kl}\ (\mu)>1$, $d_{kl}\ (\nu)>1$, то точка P_{kl} лежить на ребрі $P_{k_1l_1}\ P_{k_2l_2}$, яке не є правильним ребром, або точка P_{kl} є вершиною діаграми $\mathfrak{d}_f$.

Звідси випливають теореми.

Теорема 2.1. *Для того щоб точка зображення P_{kl} була діаграмною, необхідно й достатньо, щоб*

$$\widetilde{D}_{kl}(\mu)=d_{kl}(\mu)\geqslant 1,\ \widetilde{D}_{kl}(\nu)=d_{kl}(\nu)\geqslant 1. \qquad (2.13)$$

$$a_{kl}\geqslant(a^{\mu_2}_{k_1l_1}a^{\mu_1}_{k_2l_2})^{\frac{1}{\mu_1+\mu_2}}$$

Теорема 2.2. *Для того щоб точка зображення P_{kl} була вершиною, необхідно й достатньо, щоб*

$$\widetilde{D}_{kl}(\mu)=d_{kl}(\mu)>1,\ \widetilde{D}_{kl}(\nu)=d_{kl}(\nu)>1 \qquad (2.14)$$

і

$$a_{kl}>(a^{\mu_2}_{k_1l_1}\ a^{\mu_1}_{k_2l_2})^{\frac{1}{\mu_1+\mu_2}}, \qquad (2.15)$$

де $h_{12}(k, l)=0$, при цьому повинні виконуватися нерівності (2.12) для всіх *точок (k_1, l_1), (k_2, l_2) многокутника $\overline{Q}_f$.*

2.3. Наявність правильної вершини в точці зображення. Розглянемо необхідні й достатні умови, щоб в даній точці зображення була правильна вершина. Обчислення величин $r^+_{kl}(\nu)$, $r^-_{kl}(\nu)$, $r^+_{kl}(\mu)$ і $r^-_{kl}(\mu)$ за формулами (2.3)—(2.7) слід здійснювати двома етапами: а) обчислити $\tilde{r}^+_{kl}(\nu)$ і $\tilde{r}^-_{kl}(\nu)$ за формулами (2.3) і (2.4) з припущенням, що $\mu_1>0$ і $\mu_2>0$; б) обчислити $\approx{r}^+_{kl}(\nu)$ і $\approx{r}^-_{kl}(\nu)$ за допомогою тих самих формул, припускаючи, що $\mu_1=0$ і $\mu_2>0$; ці формули тепер запишуться простіше, а саме

$$\overset{\approx}{r}{}^+_{kl}(\nu)=\min_{\mu_1=0,\ \nu>0}\left(\frac{a_{kl}}{a_{k,\ l+\nu}}\right)^{1/\nu},\quad \overset{\approx}{r}{}^-_{kl}(\nu)=\max_{\mu_1=0,\ \nu>0}\left(\frac{a_{k,\ l-\nu}}{a_{kl}}\right)^{1/\nu}.$$

Якщо $\tilde{r}^+_{kl}(\nu)\leqslant\overset{\approx}{r}{}^+_{kl}(\nu)$ або $\tilde{r}^-_{kl}(\nu)\geqslant\overset{\approx}{r}{}^-_{kl}(\nu)$, то в точці зображення P_{kl} вершина $\mathfrak{d}_f$ не може бути правильною. Якщо ж $\tilde{r}^+_{kl}(\nu)>\overset{\approx}{r}{}^+_{kl}(\nu)$ і $\tilde{r}^-_{kl}(\nu)<$

$<\tilde{\tilde{r}}_{kl}^{-}(\nu)$, то відрізки $P_{kl}B_{k,\,l-1}$ і $P_{kl}\,\boldsymbol{B}_{k,\,l+1}$ є елементарними (або спрямленими) орієнтованими ребрами діаграми $\mathfrak{d}_f$, які будуть паралельні координатній площині $\nu\xi$. За формулами (2.6) — (2.7) аналогічно обчислимо величини $\tilde{r}_{kl}^{+}(\mu)$, $\tilde{r}_{kl}^{-}(\mu)$ $(\nu_1, \nu_2>0)$ і величини

$$\tilde{\tilde{r}}_{kl}^{+}(\mu) = \min_{\nu_1=0,\mu>0}\left(\frac{a_{kl}}{a_{k+\mu,\,l}}\right)^{1/\mu},\quad \tilde{\tilde{r}}_{kl}^{-}(\mu) = \max_{\nu_1=0,\,\mu>0}\left(\frac{a_{k-\mu,\,l}}{a_{kl}}\right)^{1/\mu}.$$

Звідси випливає, що з точки зображення P_{kl} буде виходити чотири відрізки $P_{kl}\,B_{k,\,l-1}$, $P_{kl}\,B_{k,\,l+1}$, $P_{kl}B_{k-1,\,l}$, $\boldsymbol{P}_{kl}\boldsymbol{B}_{k+1,\,l}$, які є орієнтованими (правильними) ребрами $\mathfrak{d}_f$, якщо одночасно виконуються нерівності

$$d_{kl}(\nu) > 1,\ d_{kl}(\mu) > 1:$$

$$\tilde{r}_{kl}^{+}(\nu) > \tilde{\tilde{r}}_{kl}^{+}(\nu),\ \tilde{r}_{kl}^{-}(\nu) < \tilde{\tilde{r}}_{kl}^{-}(\nu);\ \tilde{r}_{kl}^{-}(\mu) > \tilde{\tilde{r}}_{kl}^{+}(\mu),\ \tilde{r}_{kl}^{-}(\mu) < \tilde{\tilde{r}}_{kl}^{-}(\mu) \qquad (2.16)$$

(при цьому слід зауважити, що кожен з цих відрізків може зображати частину спрямленого орієнтованого ребра діаграми). Неважко переконатися, що правильне й обернене твердження.

Для того, щоб при виконанні нерівностей (2.13) точка P_{kl} була правильною вершиною діаграми, необхідно й достатньо, щоб всі точки зображення раціональної функції перебували не нижче чотирьох площин, які утворюють чотиригранний кут в точці P_{kl} і проходять через ребра $P_{kl}\boldsymbol{B}_{k,\,l-1}$, $P_{kl}\boldsymbol{B}_{k,\,l-1}$, $P_{kl}B_{k+1.\,l}$, $P_{kl}B_{k-1,\,l}$. Цей чотиригранний кут утворює найпростішу багатогранну поверхню, спрямовану опуклістю вниз $\overset{*}{\mathfrak{d}_f}$.

Виведемо тепер аналітичну умову, яка показує, коли точка зображення $P_{k+\mu,\,l+\nu}$ $(\mu, \nu \leqq 0;\ (k+\mu, l+\nu) \in \overline{Q}_f)$ лежить не нижче поверхні $\mathfrak{d}_f^*$, яка утворює правильний кут в точці P_{kl}. Нехай нормальний многочлен, що відповідає найпростішій поверхні $\mathfrak{d}_N^*$, є

$$N^*(z, w) = \sum_{(\mu,\,\nu)\,\in\overline{Q}_N} \boldsymbol{T}_{\mu\nu}^{*}\, z^{\mu}\, w_{\nu}.$$

Точки зображення найпростішої поверхні будемо позначати через $\boldsymbol{B}_{\mu\nu}^{*} = B^{*}(\mu, \nu, \xi_{\mu\nu})$, де $\xi_{\mu\nu} = -\ln T_{\mu\nu}^{*}$. Тому що всі точки діаграмні, то $\boldsymbol{B}_{\mu\nu}^{*} = P_{\mu\nu}^{*}$. Через те, що правильне ребро поверхні $\mathfrak{d}_N^*$ проходить через точки B_{kl}, $\boldsymbol{B}_{k,\,l-1}$, $\boldsymbol{B}_{k,\,l+1}$, $B_{k-1,\,l}$ і $\boldsymbol{B}_{k+1,\,l}$ діаграми $\mathfrak{d}_f$, то ці точки збігаються відповідно з точками $\boldsymbol{B}_{kl}^{*}$, $B_{k,\,l-1}^{*}$, $\boldsymbol{B}_{k,\,l+1}^{*}$, $B_{k-1,\,l}^{*}$, $\boldsymbol{B}_{k+1,\,l}^{*}$ поверхні $\mathfrak{d}_N^*$, отже,

$$T_{kl} = \boldsymbol{T}_{kl}^{*},\ T_{k,\,l-1} = T_{k,\,l-1}^{*},\ \boldsymbol{T}_{k,\,l+1} = \boldsymbol{T}_{k,\,l+1}^{*},\ T_{k-1,\,l} = \boldsymbol{T}_{k-1,\,l}^{*},$$
$$\boldsymbol{T}_{k+1,\,l} = \boldsymbol{T}_{k+1,\,l}^{*}. \qquad (2.17)$$

Записуючи рівняння площини, що проходить через точки зображення B_{kl}, $\boldsymbol{B}_{k+1,\,l}$, $B_{k,\,l+1}$, неважко показати, що точка зображення $\boldsymbol{P}_{k+\mu,\,l+\nu}$ $(\mu>0,\ \nu>0)$ заданої раціональної функції розміщуватиметься не нижче проведеної площини, якщо виконується нерівність

$$\boldsymbol{T}_{k+\mu,\,l+\nu} \leqslant T_{k+1,\,l}^{\mu}\,\boldsymbol{T}_{k,\,l+1}^{\nu} : T_{kl}^{\mu+\nu-1}.$$

Аналогічні нерівності дістанемо і для точок $P_{k+\mu,\,l+\nu}$ $(\mu>0,\ \nu<0;$

$\mu<0,\ \nu>0;\ \mu<0,\ \nu<0$). Враховуючи (2.17), ці нерівності можна записати в загальному вигляді так:

$$T_{k+\mu,\,l+\nu} \leqslant \frac{T^{|\mu|}_{k+\operatorname{sign}\mu,\,l}\,T^{|\nu|}_{k,\,l+\operatorname{sign}\nu}}{T^{|\mu|+|\nu|-1}_{kl}}. \tag{2.18}$$

Звідси теорема

Теорема 2.3. *Для того щоб точка зображення P_{kl} функції (1.1) була правильною вершиною, необхідно й достатньо, щоб одночасно виконувались нерівності (2.18), причому остання нерівність виконувалась би для всіх точок зображення цієї функції.*

На закінчення цього параграфа зробимо такі зауваження. Коефіцієнти $T_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu)\in Q_f$ мажоранти Ньютона (1.7) можна визначити за формулами (2.2), коефіцієнти $T_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu)\in L_f$ визначаються так само, як це робилось для функції однієї змінної [1]. Знаючи коефіцієнти мажоранти $\mathfrak{M}_f(z,w)$, ми за формулами (1.11) і (1.12) легко обчислимо числові нахили і відхилення $\mathfrak{d}_f$, а також побудуємо всі точки $B_{\mu\nu}$ діаграми з цілочисловими значеннями μ і ν.

§ 3. ВИДІЛЕННЯ ПОЛІЦИЛІНДРІВ, В ЯКИХ ЦІЛА РАЦІОНАЛЬНА ФУНКЦІЯ $f(z,w)$ НЕ МОЖЕ НАБУВАТИ НУЛЬОВИХ ЗНАЧЕНЬ

Застосуємо тепер теорію мажорант і діаграм Ньютона, викладену вище, для виділення областей в площинах комплексних змінних z і w, в яких $f(z,w)$ не має нулів. У даній роботі ми розглянемо найпростіший випадок, коли $A_{00}\neq 0$.

3.1. Основна функція. За припущенням, $A_{00}\neq 0$, а тому що точка C_{00} лежить у вершині опуклого многокутника $\overline{Q}_f$, то, згідно з визначенням діаграми Ньютона, можна записати

$$|A_{00}|=a_{00}=T_{00},\quad |A_{\mu\nu}|=a_{\mu\nu}\leqslant T_{\mu\nu}\qquad (\mu,\nu)\in\overline{Q}_f. \tag{3.1}$$

З (1.11) і (1.12) знаходимо

$$\frac{T_{\mu\nu}}{T_{00}}=\prod_{i=0}^{\mu-1}\left(\frac{T_{i+1,\,0}}{T_{i0}}\right)\prod_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{T_{\mu,\,j+1}}{T_{\mu j}}\right)=R_{10}^{-\mu}(\mu)\prod_{i=1}^{\mu-1}D_{i0}^{-\mu+i}(\mu)\,R_{\mu1}^{-\nu}(\nu)\prod_{j=1}^{\nu-1}D_{\mu j}^{-\nu+j}(\nu), \tag{3.2}$$

або інакше

$$\frac{T_{\mu\nu}}{T_{00}}=\prod_{j=0}^{\nu-1}\left(\frac{T_{0,\,j+1}}{T_{0j}}\right)\prod_{i=0}^{\mu-1}\left(\frac{T_{i+1,\,\nu}}{T_{i\nu}}\right)=R_{01}^{-\nu}(\nu)\prod_{j=1}^{\nu-1}D_{0j}^{-\nu+j}(\nu)\,R_{1\nu}^{-\mu}(\mu)\prod_{i=1}^{\mu-1}D_{i\nu}^{-\mu+i}(\mu). \tag{3.3}$$

Припустимо, що z і w є коренями (1.1), тоді, ізолюючи коефіцієнт A_{00} в другий бік рівності та беручи до уваги (3.1) і (3.2) або (3.3), отримаємо

$$1\leqslant\sum_{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f}\left|\frac{A_{\mu\nu}}{A_{00}}\right|x^{\mu}y^{\nu}\leqslant\sum_{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f}\frac{T_{\mu\nu}}{T_{00}}=x^{\mu}y^{\nu}=$$

$$=\sum_{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f}\left[\prod_{i=1}^{\mu-1}D_{i0}^{-\mu+i}(\mu)\left(\frac{x}{R_{10}(\mu)}\right)^{\mu}\prod_{j=1}^{\nu-1}D_{\mu j}^{-\nu+j}(\nu)\left(\frac{y}{R_{\mu1}(\nu)}\right)^{\nu}\right], \tag{3.4}$$

де $(\mu,\nu)\neq(0,0)$, $x=|z|$, $y=|w|$.

Зробимо заміну $x=\frac{R_{10}(\mu)}{u}$ і $y=\frac{R_{01}(\nu)}{v}$, тоді, в силу позначень (1,25), нерівність (3.4) можна переписати так:

$$0\leqslant -1+\sum_{\substack{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}\prod_{i=0}^{\mu-1}D_{i0}^{-\mu+i}(\mu)\,u^{-\mu}\prod_{j=0}^{\nu-1}D_{\mu j}^{-\nu+j}(\nu)\,v^{-\nu}\frac{1}{(D_{00}^{++}D_{10}^{++}\cdots D_{\mu-1,0}^{++})^{\nu}},\tag{3.5}$$

де D_{i0}^{++}— параметри ребристості діаграми δ_f.

Кожній парі індексів μ і ν, $(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f$ в силу (1.14) можна зіставити пару цілих невід'ємних чисел $\tau_{\mu 0}$ і $\eta_{\mu\nu}$ таких, що будуть виконуватися нерівності

$$D_{\mu 0}(\mu)\geqslant u_0^{\tau_{\mu 0}}\ (\mu,0)\in\overline{Q}_f;\ D_{\mu\nu}(\nu)\geqslant v_0^{\eta_{\mu\nu}}\ (\mu,\nu)\in\overline{Q}_f,\tag{3.6}$$

де u_0 і v_0 — фіксовані додатні числа, більші від одиниці.

Нерівність (3.5),згідно з (3.6), тепер може бути записана так:

$$0\leqslant -1+\sum_{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f}b_{\mu\nu}\,u^{-\mu-\sum\limits_{i=1}^{\mu-1}(\mu-i)\tau_{i0}}\,v^{-\nu-\sum\limits_{j=1}^{\nu-1}(\nu-j)\eta_{\mu j}}=H(u,v),\tag{3.7}$$

де $(\mu,\nu)\neq(0,0)$, $u=u_0$, $v=v_0$;

$$b_{\mu\nu}=\begin{cases}(D_{00}^{++}D_{10}^{++}\cdots D_{\mu-1,0}^{++})^{-\nu}, & \text{якщо } D_{00}^{++}D_{10}^{++}\cdots D_{\mu-1,0}^{++}<1\\ 1, & \text{якщо } D_{00}^{++}D_{10}^{++}\cdots D_{\mu-1,0}^{++}\geqslant 1,\end{cases}\tag{3.8}$$

тобто завжди $1\leqslant b_{\mu\nu}\leqslant\infty$. (3.9)

Функція

$$H(u,v)=-1+\sum_{\substack{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}b_{\mu\nu}\,u^{-\alpha_{\mu 0}}v^{-\beta_{\mu\nu}},\tag{3.10}$$

де

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{\mu 0}&=\mu+\sum_{i-1}^{\mu-1}(\mu-i)\,\tau_{i0}\geqslant\mu\\ \beta_{\mu\nu}&=\nu+\sum_{j=1}^{\nu-1}(\nu-j)\,\eta_{\mu j}\geqslant\nu\end{aligned}\right.\quad(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f,\ (\mu,\nu)\neq(0,0),\tag{3.11}$$

називається о с н о в н о ю функцією в методах, за допомогою яких виділяються області змінних, де ціла раціональна функція не перетворюється в нуль.

Якщо при виводі (3.4) замість (3.2) використати (3.3), то основна функція запишеться так:

$$H(u,v)=-1+\sum_{\substack{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}b_{\mu\nu}\,u^{-\alpha_{\mu\nu}}v^{-\beta_{0\nu}},\tag{3.12}$$

де

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{\mu\nu} &= \mu + \sum_{i=1}^{\mu-1}(\mu - i)\tau_{i\nu} \geqslant \mu \\ \beta_{0\nu} &= \nu + \sum_{j=1}^{\nu-1}(\nu - j)\eta_{0j} \geqslant \nu\end{aligned}\right\} \quad (\mu, \nu) \in \overline{Q}_f,\ (\mu, \nu) \neq (0, 0). \tag{3.13}$$

і де

$$1 \leqslant b_{\mu\nu} \leqslant \infty,$$

$$b_{\mu\nu} = \begin{cases}(D_{00}^{++} D_{01}^{++} \cdots D_{0,\nu-1}^{++})^{-\mu}, & \text{якщо } D_{00}^{++} D_{01}^{++} \cdots D_{0,\nu-1}^{++} < 1 \\ 1 & \text{, якщо } D_{00}^{++} D_{01}^{++} \cdots D_{0,\nu-1}^{++} \geqslant 1.\end{cases}$$

$$D_{\mu\nu}(\mu) \geqslant u^{\tau_{\mu\nu}},\ D_{0\nu} \geqslant v^{\eta_{0\nu}} \quad (0, \nu) \in \overline{Q}_f,\ (\mu, \nu) \in \overline{Q}_f. \tag{3.14}$$

Примітка. При визначенні параметрів ребристості за формулами (1,25) може трапитися, що треба знати коефіцієнти мажоранти (1.7) точок $(k+1, l+1)$, $(k+1, l)$, $(k, l+1)$, які лежать зовні многокутника $\overline{Q}_f$. У цьому випадку такі коефіцієнти слід вважати нульовими або треба розглядати мажоранту $\overset{*}{\mathfrak{M}}_f(z, w)$ на многокутнику $\overline{Q}_f^*$, який вміщає всередині себе многокутник $\overline{Q}_f$, про що буде сказано нижче.

3.2. Дослідження основної функції. Для того, щоб показники степенів $\tau_{\mu 0}$ і $\eta_{\mu\nu}$ набували тільки цілих невід'ємних значень в (3.6) для відхилень, які задовольняють (1.14), було прийнято, що основи степенів u_0 і v_c більші за одиницю.

Зробивши це зауваження, визначимо тепер області зміни змінних, для яких основна функція (3.10) або (3.12) набуває від'ємних значень $H(u, v) \leqslant 0$. Зробити це для довільного опуклого многокутника $\overline{Q}_f$, на якому задана функція (3.10),в загальному випадку дуже важко, тому що ті області u і v, в яких основна функція набуває від'ємних значень, істотно залежать від форми та розташування прямокутника $\overline{Q}_f$. Тому замість опуклої вниз багатогранної поверхні $\mathfrak{d}_f$-діаграми Ньютона, заданої на многокутнику $\overline{Q}_f$, можна розглядати опуклу вниз багатогранну поверхню $\overset{*}{\mathfrak{d}}_f$ на більшому многокутнику $\overline{Q}_f^*$, який вміщає в собі многокутник $\overline{Q}_f$. Причому на многокутнику $\overline{Q}_f$ поверхні $\mathfrak{d}_f$ і $\overset{*}{\mathfrak{d}}_f$ збігаються. Ззовні многокутника $\overline{Q}_f$ опукла вниз поверхня $\mathfrak{d}_f$ продовжується довільно на многокутник $\overline{Q}_f^*$. Відповідно й мажоранта Ньютона (1.7) розглядається на многокутнику $\overline{Q}_f$.

В даній роботі домовимося вважати, що многокутник є прямокутником з вершинами в точках C_{00}, C_{p0}, C_{0q} і C_{pq}. Якщо через n_1 і n_2 позначити найбільші показники μ і ν змінних z і w в (1.1), то, очевидно,

$$p \geqslant n_1,\ q \geqslant n_2. \tag{3.15}$$

Основна функція (3.10), задана на прямокутнику $\overset{*}{Q}_f$, може бути записана так:

$$H(u, v) = -1 + \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu,\nu)\neq(0,0)}}^{p} \sum_{\nu=0}^{q} b_{\mu\nu} u^{-\alpha_{\mu 0}} v^{-\beta_{\mu\nu}}, \tag{3.16}$$

де $b_{\mu\nu}$, $\alpha_{\mu 0}$, $\beta_{\mu\nu}$ визначаються за формулами (3.8) і (3.11).

Можна вважати, що $n_1 > 0$ і $n_2 > 0$, бо при $n_1 = 0$ (або $n_2 = 0$) ціла раціональна функція залежить тільки від одної змінної, а такі функції були вивчені в роботах [1, 2].

Кожен доданок (3.16), за винятком першого, рівного мінус одиниці, є додатним, значить, щоб $H(u, v) \leqslant 0$, необхідно й достатньо, щоб суми

$$\varphi(u) = \sum_{i=0}^{p} u^{-\alpha_{i0}} \text{ і } \psi(v) = \sum_{j=1}^{q} v^{-\beta_{j0}} \tag{3.17}$$

були менші за одиницю. Звідси, в силу (3.9) і (3.10), дістаємо, що u і v, для яких $H(u, v) \leqslant 0$, повинні задовольняти нерівності

$$u > 1, \ v > 1. \tag{3.18}$$

Якщо $\varphi(u_0) < 1$, то для додатних значень v основна функція $H(u_0, v)$ в (3.16) строго спадає від ∞ до $-1 + \varphi(u_0) < 0$. Отже, вона перетворюється в нуль тільки при одному додатному значенні $v_0 > 1$, причому

$$\psi(v_0) < 1 \text{ і } H(u_0, v) < 0 \text{ при } v > v_0 > 1. \tag{3.19}$$

При $\psi(v_0) < 1$ так само знайдемо єдине значення $u_0 > 1$, при якому $H(u_0, v_0) = 0$ і

$$\varphi(u_0) < 1, \ H(u, v_0) < 0 \text{ при } u > u_0 > 1. \tag{3.20}$$

Припустимо тепер, що на прямокутнику $\overset{*}{Q}_f$ задана ще функція

$$\tilde{H}(u, v) = -1 + \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu,\nu)\neq(0,0)}}^{p} \sum_{\nu=0}^{q} \tilde{b}_{\mu\nu} u^{-\tilde{\alpha}_{\mu 0}} v^{-\tilde{\beta}_{\mu\nu}},$$

причому $\tilde{\alpha}_{\mu 0} \geqslant \alpha_{\mu 0}$, $\tilde{\beta}_{\mu\nu} \geqslant \beta_{\mu\nu}$, $\tilde{b}_{\mu\nu} \leqslant b_{\mu\nu}$ для всіх точок $(\mu, \nu) \in \overline{\overset{*}{Q}}_f$, де знак строгої нерівності зустрічається хоч би раз. Якщо $\varphi(u_0) < 1$, $\tilde{\varphi}(u_0) < 1$ і $H(u_0, v_0) = \tilde{H}(u_0 \tilde{v}_0) = 0$, то завжди

$$v_0 > \tilde{v}_0, \tag{3.21}$$

так само з $\psi(v_0) < 1$, $\tilde{\psi}(v_0) < 1$ і $H(u_0, v_0) = \tilde{H}(\tilde{u}_0, v_0) = 0$ випливає

$$u_0 > \tilde{u}_0. \tag{3.22}$$

3.3. Основні теореми.

Теорема 3.1. *Цілі невід'ємні показники $\tau_{\mu 0}$ і $\eta_{\mu\nu}$ степенів в нерівностях (3.6) (або (3.14) завжди можна підібрати так, що ці нерівності будуть виконуватися для всіх відхилень мажоранти (1.7) заданої функції (1.1). В цих нерівностях основа степеня u_0 (або v_0) береться довільно, але з умовою, що $\varphi(u_0) < 1$; значення v_0 — це додатний корінь сновної функції $H(u_0, v) = 0$ в (3.16).*

Якщо допустити тепер, що коефіцієнт A_{00} функції (1.1) і всі D_{i0}^{++} $(i, 0) \in \overline{Q}_f^*$ відмінні від нуля, то функція $f(z, w)$ не може набувати нульових значень у відкритому поліциліндрі з центром в точці $(0, 0)$:

$$|z| < \frac{R_{10}(\mu)}{u_0} \quad \text{i} \quad |w| < \frac{R_{01}(\nu)}{v_0}, \tag{3.23}$$

де $R_{10}(\mu)$ і $R_{01}(\nu)$ — числові нахили мажоранти $\mathfrak{M}_f(z, w)$.

Доведення. Справді, нерівності (3.6) і (3.14) завжди будуть виконуватися, якщо покласти $\tau_{\mu 0}$ і $\eta_{\mu\nu}$ рівними нулеві. Припустимо тепер від супротивного, що $f(\tilde{z}, \tilde{w}) = 0$ при $|\tilde{z}| < \frac{R_{10}(\mu)}{u_0}$ і $|\tilde{w}| < \frac{R_{01}(\nu)}{v_0}$. Покладемо $\tilde{u}_0 = \frac{R_{10}(\mu)}{|\tilde{z}|}$ і $\tilde{v}_0 = \frac{R_{01}(\nu)}{|\tilde{w}|}$. Звідси $\tilde{u}_0 > u_0$ і $\tilde{v}_0 > v_0$, значить, згідно з нерівністю (3.19), можемо записати

$$H(u_0, \tilde{v}_0) = -1 + \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu,\nu) \neq (0,0)}}^{p} \sum_{\nu=0}^{q} b_{\mu\nu} u_0^{-\alpha_{\mu 0}} \tilde{v}_0^{-\beta_{\mu\nu}} < 0,$$

якщо замінити в $H(u_0, \tilde{v}_0)$, u_0 на більшу величину $\tilde{u}_0$, то

$$\sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu,\nu) \neq (0,0)}}^{p} \sum_{\nu=0}^{q} b_{\mu\nu} \tilde{u}_0^{-\alpha_{\mu 0}} \tilde{v}_0^{-\beta_{\mu\nu}} < \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu,\nu) \neq (0,0)}}^{p} \sum_{\nu=0}^{q} b_{\mu\nu} u_0^{-\alpha_{\mu 0}} \tilde{v}_0^{-\beta_{\mu\nu}}$$

і, значить, $H(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) < 0$, що суперечить основній нерівності (3.7). Теорема доведена.

Примітка. Показники $\tau_{\mu 0}$ і $\eta_{\mu\nu}$ в нерівностях (3.6) слід брати відмінними від нуля для більшого по змозі числа індексів (μ, ν) з $\overline{Q}_f^*$, тому що в цьому випадку радіуси кіл в (3.23) будуть більшими. Це неважко зауважити з нерівностей (3.21) і (3.22).

Припустимо, що коефіцієнт A_{0n} при w^n в функції (1.1) n-ого степеня відмінний від нуля. Застосовуючи до функції $w^n f\left(z, \frac{1}{w}\right)$ теорему (3.1), дістанемо, що функція $f(z, w)$ не може набувати нульових значень, для модулів змінних якої одночасно виконуються нерівності

$$|z| < \frac{R_{1n}(\mu)}{u_0}, \ |w| < R_{0n}(\nu)\, v_0. \tag{3.24}$$

Аналогічно, якщо $A_{n0} \neq 0$, то функція $f(z, w)$ не набуває нульового значення для змінних, модулі яких одночасно задовольняють умови

$$|z| > R_{n0}(\mu)\, u_0, \ |w| < \frac{R_{n1}(\nu)}{v_0}. \tag{3.25}$$

Якщо функція $f(z, w)$ має коефіцієнт $A_{n_1 n_2} \neq 0$, де $n_1 + n_2 = n$, причому всі інші доданки $A_{\mu\nu} z^\mu w^\nu$ мають $\mu \leqslant n_1$ і $\nu \leqslant n_2$, то, застосовуючи теорему (3.1) до функції $z^{n_1} w^{n_2} f\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right)$, одержимо, що функція $f(z, w)$

не може набувати нульових значень для змінних, модулі яких задовольняють одночасно умову

$$|z| > R_{n_1 n_2}(\mu)\, u_0, \quad |w| > R_{n_1 n_2}(\nu)\, v_0. \tag{3.26}$$

Нарешті, якщо $A_{0n_2} \neq 0$, а всі інші доданки $A_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu}$ функції (1.1) n-ого степеня мають $\nu \leqslant n_2$, то нерівності (3.24) можна замінити нерівностями

$$|z| < \frac{R_{1n_2}(\mu)}{u_0}, \quad |w| > R_{0n_2}(\nu)\, v_0. \tag{3.27}$$

Якщо ж $A_{n_1 0} \neq 0$, а всі доданки $A_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu}$ мають $\mu \leqslant n_1$, то нерівності (3.25) можна замінити нерівностями

$$|z| > R_{n_1 0}(\mu)\, u_0, \quad |w| < \frac{R_{n_1 1}(\nu)}{v_0}. \tag{3.28}$$

3.4. Заміна основної функції $H(u, v)$ більш простою функцією $H^*(u, v)$. У попередніх рубриках даного параграфа за значенням u_0 $(\varphi(u_0) < 1)$ доводилось визначати додатний корінь v_0 основної функції $H(u_0, v)$ в (3.16). Ще більші труднощі виникають при складанні основної функції (3.16), тому що треба виконати велику обчислювальну роботу для обчислення коефіцієнтів $b_{\mu\nu}$ цієї функції, а для цього треба визначити коефіцієнти мажоранти $T_{\mu\nu}$ і характеристики ребристості діаграми D_{i0}^{++}. Цих труднощів можна уникнути, хоч при цьому отримаємо більш грубі результати.

Для цього замінимо мажоранту (1.7) функції (1.1), в якої $A_{00} \neq 0$, нормальною мажорантою

$$\mathfrak{M}_f^*(z, w) = \sum_{\mu=0}^{p} \sum_{\nu=0}^{q} T_{\mu\nu}^* z^{\mu} w^{\nu}, \tag{3.29}$$

де

$$T_{00} = T_{00}^*, \quad T_{\mu\nu} \leqslant T_{\mu\nu}^* \qquad (\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^*, \tag{3.30}$$

$\overline{Q}_f^*$ — прямокутник з вершинами C_{00}, C_{p0}, C_{0q}, C_{pq}.

Нерівності (3.4) в цьому випадку можуть бути переписані так:

$$1 \leqslant \sum_{\substack{(\mu,\nu) \in \overline{Q}_f \\ (\mu,\nu) \neq (0,0)}} \frac{T_{\mu\nu}}{T_{00}} x^{\mu} y^{\nu} \leqslant \sum_{\substack{(\mu,\nu) \in \overline{Q}_f^* \\ (\mu,\nu) \neq (0,0)}} \frac{T_{\mu\nu}^*}{T_{00}} x^{\mu} y^{\nu} =$$

$$= \sum_{\substack{(\mu,\nu) \in \overline{Q}_f^* \\ (\mu,\nu) \neq (0,0)}} \left[\prod_{i=1}^{\mu-1} D_{i0}^{*-\mu+i}(\mu) \left(\frac{x}{R_{10}^*(\mu)} \right)^{\mu} \prod_{j=1}^{\nu-1} D_{\mu j}^{*-\nu+j}(\nu) \left(\frac{y}{R_{\mu\nu}^*(\nu)} \right)^{\nu} \right].$$

Поклавши $x = \frac{R_{10}^*(\mu)}{u}$, $y = \frac{R_{01}^*(\nu)}{v}$ і використовуючи замість нерівностей (3.6) нерівності

$$D_{\mu 0}^*(\mu) \geqslant u_{0\mu 0}^{-*}, \quad D_{\mu\nu}^* \geqslant v_{0\mu\nu}^{\eta *} \quad (\mu, 0) \in \overline{Q}_f^*, \ (\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^*, \tag{3.31}$$

отримаємо

$$0 \leqslant -1 + \sum_{\substack{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f \\ (\mu,\nu)\neq(0,0)}} b^*_{\mu\nu}\, u^{-\mu-\sum\limits_{i=1}^{\mu-1}(\mu-i)\tau^*_{i0}}\, v^{-\nu-\sum\limits_{j=0}^{\nu-1}(\nu-j)\tau^*_{\mu j}} = H^*(u, v), \qquad (3.32)$$

де $b_{\mu\nu}$ визначаються аналогічно формулі (3.8) і задовольняють нерівності (3.9).

Для функції (3.32) мають місце нерівності (3.18)—(3.22), а також справедлива теорема (3.1), в якій тільки треба замінити числові нахили $R_{10}(\mu)$ і $R_{01}(\nu)$ в (3.23) відповідно через числові нахили $R^*_{10}(\mu)$ і $R^*_{01}(\nu)$ нормальної мажоранти (3.29).

В цій роботі братимемо нормальну мажоранту (3.29) найпростішою, а саме — будемо розглядати мажоранту $\overset{*}{\mathfrak{M}}_f(z, w)$, в якої діаграма $\overset{*}{\mathfrak{d}}_f$ — найпростіша, тобто складається з чотирьох граней, що утворюють кут у вершині P_{kl}. Тут беремо $k=0$, $l=0$, тому діаграма $\overset{*}{\mathfrak{d}}_f$ буде складатися з одної грані, яка утворює в точці P_{00} правильний кут. Тому що точка C_{00} належить контуру многокутника $\overline{Q}_f$, то два правильні ребра збігаються з віссю аплікат.

Якщо діаграма Ньютона $\mathfrak{d}_f$ утворює в точці зображення правильний кут, тобто просторовий трикутник $\Delta(B_{00}B_{01}B_{10})$ належить грані σ діаграми $\mathfrak{d}_f$, то за діаграму $\overset{*}{\mathfrak{d}}_f$ мажоранти (3.29) можна брати площину, що проходить через точки $P_{00}=B_{00}$, B_{01}, B_{10}. У цьому випадку $R^*_{10}(\mu)=R_{10}(\mu)$ і $R^*_{01}(\nu)=R_{01}(\nu)$. Якщо ж вершина P_{00} діаграми $\mathfrak{d}_f$ неправильна, то замість діаграми $\overset{*}{\mathfrak{d}}_f$ мажоранти (3.29) беремо довільну площину, яка проходить через точку P_{00}, причому всі точки зображення $P_{\mu\nu}$, $(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f$ розміщені не нижче цієї площини. В останньому випадку

$$R^*_{10}(\mu) \leqslant R_{10}(\mu), \quad R^*_{01}(\nu) \leqslant R_{01}(\nu).$$

Теорема 3.1 для випадку, який розглядається, запишеться так.

Теорема 3.2. *Якщо для цілої раціональної функції (1.1) з коефіцієнтом $A_{00}\neq 0$ нормальна мажоранта (3.29) має найпростішу діаграму $\overset{*}{\mathfrak{d}}_f$, для якої при $k=l=0$ виконується (3.30), то функція $f(z, w)$ не може перетворюватися в нуль у відкритому поліциліндрі з центром в точці $(0, 0)$*

$$|z| < \frac{R^*_{10}(\mu)}{u_0}, \quad |w| < \frac{R^*_{01}(\nu)}{v_0}, \qquad (3.33)$$

де

$$v_0 = 1 + \frac{u_0}{u_0 - 2} \quad (u_0 > 2,\ v_0 > 2), \qquad (3.34)$$

$R^*_{10}(\mu)$ і $R^*_{01}(\nu)$ — числові нахили нормальної мажоранти (3.29).

Доведення. Згідно з умовою теореми діаграма $\mathfrak{d}^*_f$ мажоранти (3.29) є найпростішою, причому виконуються нерівності (3.30), отже, діаграма $\mathfrak{d}^*_f$ складається з однієї грані, що виходить з точки P_{00}; проекція цієї грані на площину $\mu\nu$ збігається з $\overline{Q^*_f}$. Оскільки прямокутник $\overline{Q^*_f}$ може бути довільним, тільки б він вміщав в собі многокутник

$\overline{Q}_f$, то ми візьмемо його таким, що збігається з першим квадрантом площини $\mu\nu$, тобто покладемо $p=\infty$ і $q=\infty$. Згідно з визначенням, для простішої діаграми δ_f^* маємо $D_{\mu\nu}^*(\mu)=D_{\mu\nu}^*(\nu)=1$ $(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f^*$. Крім того, в силу наслідку 1.4 одержимо рівності $D_{\mu\nu}^{++}=1$ $(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f^*$. Звідси отримаємо, що всі $\alpha_{\mu 0}^*=\mu$, $\beta_{\mu\nu}^*=\nu$ і $b_{\mu\nu}=1$ $(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f^*$. Таким чином, основне рівняння запишеться так:

$$H(u,v)=-1+\sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu,\nu)\neq(0,0)}}^{\infty} u^{-\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty} v^{-\nu}=-2+$$

$$+\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\cdots\right)=-2+\frac{u}{u-1}\cdot\frac{v}{v-1};$$

$$\varphi(u)=\sum_{\mu=1}^{\infty} u^{-\mu},\quad \psi(v)=\sum_{\nu=1}^{\infty} v^{-\nu}.$$

Якщо $\varphi(u_0)<1$, $\psi(v_0)<1$, то $u_0>2$, $v_0>2$.

З цих нерівностей випливає (3.34). Доведення того факту, що $f(z,w)$ не може перетворюватися в нуль при змінних, модулі яких задовольняють нерівності (3.33), здійснюється аналогічно доведенню теореми 3.1.

У даній роботі було розглянуто для простоти випадок, коли $A_{00}\neq 0$. Це обмеження не є істотним. Коефіцієнт A_{00} може дорівнювати нулю, але в цьому випадку в основній теоремі два круги в (3.23) замінюються кругом і кільцем.

Очевидно, що якщо $f(z,w)$ не може набувати нульових значень при виконанні нерівностей (3.23) або (3.33), то нульових значень не може набирати й система рівнянь, в яку входить ця функція.

Примітка. Якщо в теоремі (3.2) розглядати скінченний прямокутник $\overline{Q}_f^*$ з вершинами C_{00}, C_{p0}, C_{0q}, C_{pq}, то в теоремі (3.2) треба рівність (3.34) замінити основною функцією

$$H(u,v)=-2+\sum_{\mu=0}^{p} u^{-\mu}\sum_{\nu=0}^{q} v^{-\nu}=-2+\left(1+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\cdots\right);$$

$$\varphi(u)=\sum_{\mu=1}^{p} u^{-\mu},\quad \psi(v)=\sum_{\nu=1}^{q} v^{-\nu}, \tag{3.35}$$

Нехай маємо систему

$$\begin{aligned} f(z,w)&=\sum_{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f} A_{\mu\nu}z^{\mu}w^{\nu} \qquad (A_{00}\neq 0);\\ g(z,w)&=\sum_{(\mu,\nu)\in\overline{Q}_f} B_{\mu\nu}z^{\mu}w^{\nu} \qquad (B_{00}\neq 0) \end{aligned} \tag{3.36}$$

цілих раціональних функцій.

Застосовуючи теорему (3.1) або (3.2) до функції $f(z, w)$, а потім до функції $g(z, w)$, можемо неоднозначно знаходити радіуси кіл (3.23) (або (3.33)) $\tilde{r}_1$, $\approx{r}_1$ і $\tilde{r}_2$, $\approx{r}_2$, такі, що функція $f(z, w)$ не може набувати нульових значень, коли одночасно виконуються нерівності $|z| < \tilde{r}_1$, $|w| < \tilde{r}_2$, а функція $g(z, w)$ не може перетворюватися в нуль, коли $|z| < \overset{\approx}{r}_1$, $|w| < \overset{\approx}{r}_2$. Звідси теорема.

Теорема 3.3. *Система рівнянь (3.36) при $A_{00} \neq 0$, $B_{00} \neq 0$ не може мати кореня (z_1, w_1), що задовольняє нерівності*

$$|z_1| < r_1, \ |w_1| < r_2,$$

де $r_1 = \min(\tilde{r}_1, \overset{\approx}{r}_1)$, $r_2 = \max(\tilde{r}_2, \overset{\approx}{r}_2)$ або $r_1 = \max(\tilde{r}_1, \overset{\approx}{r}_1)$, $r_2 = \min(\tilde{r}_2, \overset{\approx}{r}_2)$.

Краще в основних функціях $H(u, v)$, $H(U, V)$, складених для функцій $f(z, w)$ і $g(z, w)$, змінну u_0 і U_0 обирати так, щоб $\tilde{r}_1 = \overset{\approx}{r}_1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Ostrowski. Recheches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries Laurent, Acta Math., 72, 1940.
2. О. М. Костовський. Узагальнення теореми Островського про локалізацію по модулях нулів рядів Лорана. Вісн. ЛДУ, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.

А. И. КАРДАШ, А. Н. КОСТОВСКИЙ, И. И. ЧУЛИК

МАЖОРАНТЫ И ДИАГРАММЫ НЬЮТОНА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(резюме)

В данной работе строится аппарат мажорант и диаграмм Ньютона для целой рациональной функции двух комплексных переменных, исследуются их общие свойства. Вводится понятие числовых наклонов и отклонений в направлении координатных осей, а также понятие ребристости диаграммы Ньютона. Предлагаются формулы для определения основных характеристик диаграммы и мажоранты Ньютона.

В качестве приложения полученных результатов строятся полицилиндры, в которых целая рациональная функция не может принимать нулевых значений.