ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 Серія механіко-математична Випуск 3

УДК 513.491

А. І. ПИЛИПОВИЧ

ПРО КОНСТРУКТИВНУ ПОТУЖНІСТЬ ПЛОЩИНОГРАФА

У процесі виготовлення моделей різних просторових форм важливою ланкою є розпилювання, яке можна розглядати як геометричні побудови площинографом — приладом, який будує в просторі площини. Виникає питання про конструктивну потужність цього приладу, якщо він використовується при певних умовах. Використання всякого комплексу інструментів для розв'язування конструктивної задачі супроводиться встановленням скінченної послідовності основних (для даного комплексу) побудов, виконання яких приводить до побудови шуканої фігури. Такими основними побудовами для комплексу площинограф і сферограф [1] є наступні: 1) побудова площини, 2) побудова сфери, 3) побудова довільного скінченного числа спільних точок двох побудованих фігур, якщо такі точки існують, 4) побудова довільних точок, які належать або не належать побудованій фігурі. Можливість виконання цих побудов обгрунтовується системою прийнятих аксіом [2].

Якщо припустити, що просторова фігура складається із скінченного числа точок, які її визначають, прямих, відрізків, променів, кіл, дуг, граней, сферичних поверхонь або їх частин, то має місце така теорема, аналогічна теоремі Штейнера:

Теорема 1. *Якщо геометрична задача на побудову просторової фігури, визначеної скінченним числом точок, розв'язується за допомогою площинографа і сферографа, то її можна розв'язати одним лише площинографом, якщо в конструктивному просторі побудовано сферу Ω і відмічено її центр — точку O.*

При розв'язуванні конструктивної задачі за допомогою даного комплексу інструментів точки одержуємо лише при виконанні таких побудов:

1) побудова спільних точок: а) двох прямих, б) прямої і кола, в) прямої і площини, г) прямої і сфери, д) двох кіл, е) кола і площини, є) кола і сфери;

2) побудова довільного скінченного числа точок, які належать: а) прямій, б) колу, в) площині, г) сфері;

3) побудова точки, яка не належить заданій фігурі.

Для виконання побудов 1-а, 1-в, 2-а, 2-в досить мати лише площинограф. Отже, для доведення теореми залишається показати, що й інші побудови 1—3 можуть бути виконані одним площинографом, якщо в конструктивному просторі побудована сфера Ω і відмічений її центр O, а саме:

(1-б) побудова спільних точок даної прямої заданого кола;

(1-г) побудова спільних точок даної прямої і заданої сфери;

(1-д) побудова спільних точок двох заданих кіл;

(1-е) побудова спільних точок даної площини і заданого кола;

(1-є) побудова спільних точок заданого кола і заданої сфери;

(2-б) побудова довільного скінченного числа точок, які належать заданому колу;

(2-г) побудова довільного скінченного числа точок, які належать заданій сфері;

3) побудова довільної точки, яка не належить заданій фігурі.

Використовуючи згадану сферу, розв'яжемо площинографом спочатку декілька допоміжних задач.

Задача 1. На даній прямій відкласти послідовно два довільні рівні між собою відрізки.

Через дану пряму a і центр сфери Ω проводимо площину γ, яка перетне сферу по колу ω (рис. 1). Оберемо на прямій a довільну точку A і проведемо деяку січну LA, яка перетне коло ω в точках P і Q. Побудуємо точки R, S, симетричні точкам P і Q відносно центра O. Знаючи середину діаметра PR, через точку Q проведемо пряму m_1, паралельну цьому діаметру, як показано на рис. 1. Також проведемо пряму m_2, паралельну діаметру QS. Нехай M — точка перетину прямих m_1 і m_2. Тоді пряма $OM \| PQ \| RS$. Якщо OM перетинає пряму a в точці B, а RS — в точці C, то $AB=BC$. Задача розв'язується одним площинографом, тому що вимагає проведення лише прямих ліній, які можна одержати як результат перетину площин.

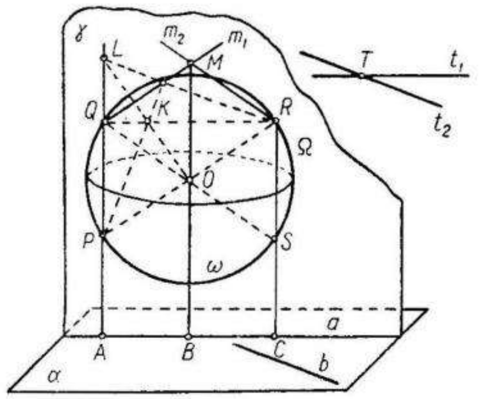

Рис. 1.

Задача 2. Через точку провести пряму, паралельну даній прямій.

Нехай дано пряму a і точку T. На прямій a відкладемо послідовно два рівні відрізки $AB=BC$ (рис. 1). Знаючи середину B відрізка AC, через точку T, як відомо [3], можна провести пряму $t_1 \| a$.

Задача 3. Даний відрізок поділити навпіл.

Спочатку проводимо пряму, паралельну даному відрізкові (задача 2), після чого, як відомо, задача розв'язується.

Задача 4. Через точку провести площину, паралельну даній площині.

Нехай дано площину α і точку T (рис. 1). В площині α оберемо дві непаралельні прямі a і b. Через точку T проведемо прямі t_1 і t_2, відповідно паралельні прямим a і b (задача 2). Площина, визначена прямими t_1 і t_2, є шуканою.

Задача 5. Через точку P провести пряму, перпендикулярну до площини α.

Через точку O (центр сфери Ω) проведемо площину β, паралельну до площини α (задача 4). Нехай площина β перетне сферу Ω по колу ω_1 (рис. 2). Оберемо в площині β довільний діаметр AB кола ω_1 і побудуємо в цій площині діаметр CD, перпендикулярний до AB. Для цього на колі ω_1 (рис. 2, a) оберемо довільну точку R, через яку проведемо хорду RQ, паралельну AB (задача 2). В перетині прямих AR і BQ визначиться така точка S, що пряма SO перпендикулярна до AB.

Через діаметр AB проведемо довільну площину γ, яка перетне сферу по колу ω_2. Побудуємо в цьому колі ω_2 діаметр KF, перпендикулярний до AB. Прямі CD і KF визначають площину δ, перпендикулярну прямій AB. Отже, площини δ і β, або δ і α, перпендикулярні. Нехай площина δ перетне сферу Ω по колу ω_3. Через точку K, яка належить колу ω_3, проведемо хорду KN цього кола, паралельну CD. Через N і O проведемо діаметр NL. Тоді хорда KL перпендикулярна площині β. Знаючи середину E хорди KL, проведем через точку P пряму a, паралельну прямій KL (задача 2). Пряма a перпендикулярна площині α.

Задача 6. Через точку P провести площину, перпендикулярну даній прямій l.

Через точку O (рис. 2) проведем пряму $AB \parallel l$ (задача 2). Побудуєм площину $\delta \perp AB$, як це зроблено в попередній задачі. Площина, що проходить через точку P паралельно площині δ, є шуканою і може бути побудована (задача 4).

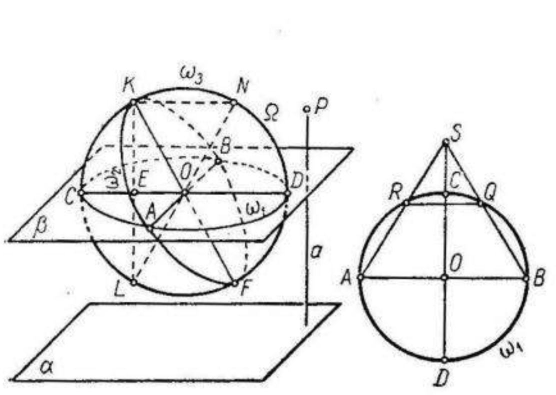

Рис. 2.

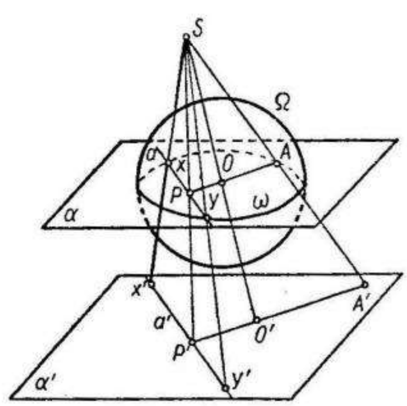

Рис. 3.

Задача 7. В даній площині α побудувати перпендикуляр до даної в цій площині прямої a.

Побудуєм площину β, перпендикулярну прямій a (задача 6). Лінія перетину площин α і β є шуканою.

Після розв'язання цих допоміжних задач можемо приступити до виконання згаданих побудов.

Побудова (1-б). Побудувати спільні точки даної прямої a' і заданого кола ω', які знаходяться в площині α'.

Нехай коло ω' задане центром O' і точкою A' (рис. 3). Через центр сфери Ω проведем площину α, паралельну площині α' (задача 4). Тоді коло ω перетину площини α з сферою Ω є гомотетичним (перспективно-подібним) до кола ω' з центром гомотетії S, який легко побудувати. Нехай пряма a (гомотетична прямій a') перетинає коло ω в точках X і Y, які є гомотетичними до шуканих точок X' і Y'. Знаючи точки X і Y, можна легко побудувати шукані точки X' і Y'.

Якщо дана пряма не лежить в площині заданого кола, то знайдемо точку X' перетину цієї прямої з площиною заданого кола і перевіримо, чи точка X' лежить на цьому колі, наприклад, методом гомотетії.

Побудова (1-г). Побудувати спільні точки даної прямої a' і заданої сфери Ω'.

Будемо вважати задану сферу Ω' гомотетичною сфері Ω. Нехай сфера Ω' задається центром O' і однією точкою A'. Провівши через точку O пряму OA, паралельну прямій $O'A'$, визначимо точку перетину A цієї прямої з сферою Ω. Знаючи точки O і O', A і A', побудуємо центр гомотетії S. Побудувавши пряму a, гомотетичну прямій a', визначимо точки X і Y перетину прямої a з сферою Ω. Точки X' і Y', гомотетичні точкам X і Y, є шуканими і можуть бути побудованими.

Побудова (1-д). Побудувати спільні точки двох заданих кіл.

Нехай в площині α задано два кола $O_1(R_1)$ і $O_2(R_2)$. Побудувавши радикальну вісь цих кіл [3], знайдемо точки її перетину з заданим колом (побудова 1-б), які й будуть шуканими. Але побудова радикальної осі є можливою на основі задачі 7, а тому задача може бути розв'язана.

Якщо кола $O_1(R_1)$ і $O_2(R_2)$ задані в різних площинах α_1 і α_2, то спочатку знайдемо точки A, B перетину кола $O_2(R_2)$ з площиною α_1 (наступна побудова (1-е)), а потім перевіримо, чи ці точки лежать на колі $O_1(R_1)$, наприклад, чи пряма AB перетинає коло $O_1(R_1)$ в точках A, B, чи в якихось інших точках (побудова (1-б)).

Побудова (1-е). Побудувати спільні точки даної площини α і заданого кола, яке лежить в площині β.

Побудувавши лінію перетину l площин α і β, визначимо точки перетину прямої l і заданого кола (побудова (1-б)), які й будуть шуканими.

Побудова (1-є). Побудувати спільні точки заданої сфери Ω_1 і заданого кола ω_2.

Нехай сфера Ω_1 задана центром O_1 і точкою A_1 (тобто радіусом $R_1=O_1A_1$), а коло ω_2 — центром O_2 і точкою A_2 (тобто радіусом $R_2=O_2A_2$), і розміщене воно в площині α, яка перетинає сферу Ω_1 по якомусь колу ω_1. Якщо замість кола $\omega_2(O_2, R_2)$ уявити собі сферу $\Omega_2(O_2, R_2)$ і побудувати радикальну площину β сфер Ω_1 і Ω_2 (задача аналогічна побудові (1-д) і може бути виконана на основі задач 7 і 6), то лінія перетину l площини α з площиною β буде радикальною віссю кіл ω_2 і ω_1. Точки перетину прямої l і заданого кола ω_2 (побудова (1-б)) є шуканими точками.

Побудова (2-б). Побудувати довільне скінченне число точок, які належать заданому колу.

Для розв'язання задачі використаємо побудову (1-б) спільних точок заданого кола і довільно проведеної прямої в площині заданого кола.

Побудова (2-г). Побудувати довільне скінченне число точок, які належать заданій сфері.

Побудова виконується аналогічно попередній.

Побудова 3. Побудувати точку, яка не належить заданій фігурі.

Нехай фігура задається скінченним числом точок, прямих, кіл, граней, сферичних поверхонь, які є заданими. Оберемо довільні дві точки з заданої сукупності точок і проведем через них пряму l. Знайдемо всі точки перетину даної прямої l з заданими прямими, колами, сферами, гранями і відмітимо їх на цій прямій. Тоді довільна точка прямої l, яка не належить до числа відмічених точок, не належить і заданій фігурі.

Теорема доведена.

Якщо на поверхні сфери Ω обрати область S, яка має такі властивості: а) границя області є крива без вузлів, б) дана область S містить пару точок сфери Ω, симетричних відносно її центра O, причому хоч би одна з них є всередині області, то має місце така теорема:

Теорема 2. *Всяка площина, яка проходить через центр сфери Ω, перетне область S по дузі великого кола.*

Ця теорема є очевидною, тому що всяка площина, що проходить через центр сфери, поділяє сферу на дві рівні частини, але область S

не вміщається на півсфері, а тому ця площина перетне область S по дузі великого кола. Ця дуга може виявитись як завгодно малою.

На основі теореми М. Болтовського і теореми 2 сферу Ω з відміченим її центром O в теоремі 1 можна замінити областю S з відміченим її центром O, тобто має місце така теорема:

Теорема 3. *Якщо геометрична задача на побудову просторової фігури, визначеної скінченим числом точок, розв'язується за допомогою площинографа і сферографа, то її можна розв'язати одним лише площинографом, якщо в конструктивному просторі побудовано частину S сферичної поверхні з відміченим її центром — точкою O, якщо область S задовольняє згадані вище умови.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Л. Буймола. Деякі питання геометрографії n-мірного евклідового простору. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.
2. А. І. Пилипович. Про геометричні побудови в просторі. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.
3. Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. Геометрические построения на плоскости. М., 1957.

А. И. ПИЛИПОВИЧ

О КОНСТРУКТИВНОЙ МОЩНОСТИ ПЛОСКОГРАФА

(резюме)

Рассматривается вопрос о возможности решения конструктивных задач в пространстве с помощью одного плоскографа, если в пространстве построена сфера с отмеченным ее центром или некоторая ее часть.

Доказываются соответствующие теоремы, аналогичные теоремам Штейнера и М.-Болтовского.