ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 517.9

В. А. ГАЛАЗЮК

ПРО ОДИН НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЛАМЕ

Нехай дано диференціальне рівняння Ламе [1] у формі

$$y'' - \left[\lambda - \mu k^2 \frac{1}{dn^2(\beta, k')}\right] y = 0, \ 0 \leqslant \beta \leqslant 2K', \tag{1}$$

де $dn(\beta, k')$ — еліптична функція Якобі [1]; k і k' — відповідно модуль і додатковий модуль еліптичної функції; K' — повний еліптичний інтеграл першого роду, який відповідає модулю k', λ і μ — довільні комплексні числа. До стандартної Якобієвої форми [1] рівняння (1) може бути приведене заміною змінних $\beta = i(\alpha + K)$, де K — повний еліптичний інтеграл першого роду, який відповідає модулю k. Для рівняння (1) відомі [1] розв'язки в тому випадку, коли $n(n+1) = \mu$, де $h = 0, 1, 2...$

Запропонований спосіб розв'язку рівняння (1) при довільних комплексних μ полягає в тому, що в певних інтервалах зміни змінної β розв'язки рівняння (1) можуть бути зображені наближено через функції Матьє [2] або через функції Лежандра [3].

1. Розглянемо випадок, коли $0 \leqslant \beta \ll K'$. Використаємо відоме співвідношення [1]

$$\left.\frac{cn(\alpha, k)}{dn(\alpha, k)}\right|_{\alpha = i\beta} = \frac{1}{dn(\beta, k')}, \tag{2}$$

а потім функцію $\dfrac{cn^2(\alpha, k)}{dn^2(\alpha, k)}$ розкладемо в ряд Фур'є, отримаємо

$$k^2 \frac{cn^2(\alpha, k)}{dn^2(\alpha, k)} = \frac{K - E}{K} - \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nq^n}{1 - q^{2n}} \cos \frac{n\pi\alpha}{K}, \tag{3}$$

де E — повний еліптичний інтеграл другого роду, а $q = \exp\left(-\pi \dfrac{K'}{K}\right)$.
Ряд (3) збігається при

$$0 \leqslant \frac{\pi\alpha}{K} < i \frac{\pi K'}{K}. \tag{4}$$

З врахуванням співвідношення (2) і рівності (3) рівняння (1) можна записати у вигляді

$$y'' - \left[a + 8\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \operatorname{ch} 2n\psi \right] y = 0, \tag{5}$$

де, згідно з (4),

$$\left. \begin{aligned} 0 \leqslant \psi = \frac{\pi\beta}{2K} < \frac{\pi K'}{2K} \\ a = \left(\lambda - \frac{K-E}{K} \mu \right) \frac{4K^2}{\pi^2} \end{aligned} \right\}. \tag{6}$$

З [1] відомо, що якщо $0 \leqslant k < 1$, то $q \ll 1$. Тому, якщо вважати, що $\beta = pK'$, де $0 \leqslant p < 1$, і знехтувати в знакозмінному ряді рівняння (5) членами порядку

$$\frac{q^{1-p}(1+q^{4p})}{(1+q^2)(1+q^{2p})} \tag{7}$$

в порівнянні з одиницею, отримаємо рівняння Матьє [2]

$$y'' - [a - 2h \operatorname{ch} 2\psi] y = 0, \tag{8}$$

де $h = 4\mu q/1 - q^2$. Розв'язки рівняння Матьє добре вивчені в роботі [2]. Більш точні розв'язки рівняння (5) можна отримати, користуючись методами теорії збурень [4], якщо за незбурене рівняння взяти рівняння Матьє (8).

2. Для того, щоб отримати розв'язки рівняння (1) в околі точки $\beta = K'$, зробимо в рівнянні (5) заміну змінних

$$\psi = \frac{\pi K'}{2K} - \xi. \tag{9}$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$y'' - \left[a + 8\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \operatorname{ch} 2n\xi + 4\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2n\xi} \right] y = 0. \tag{10}$$

Якщо просумувати ряд, який містить експоненціальну функцію, то отримаємо

$$y'' + \left[\frac{\mu}{\operatorname{ch}^2 \xi} - a + 8\mu \sum_{n=1}^{n-1} (-1)^n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \operatorname{ch} 2n\xi \right] y = 0. \tag{11}$$

Якщо вважати, що $\xi = \frac{\pi K'}{2K}(1-p')$, де $0 \leqslant p' \leqslant 2$, і в рівнянні (11) знехтувати членами порядку

$$\frac{q^{2p}[1+q^{2(1-p)}][1+q^{(1-p)}]^2}{1-q^2} \tag{12}$$

в порівнянні з одиницею, то отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$y'' + \left[\frac{\nu(\nu+1)}{\operatorname{ch}^2 \xi} - m^2 \right] y = 0, \tag{13}$$

де $\nu(\nu+1) = \mu$, $m^2 = a$.

Загальний розв'язок рівняння (13) запишеться у вигляді

$$y = C_1 P_\nu^m(\text{th}\,\xi) + C_2 Q_\nu^m(\text{th}\,\xi), \tag{14}$$

де $P_\nu^m(\text{th}\,\xi)$ і $Q_\nu^m(\text{th}\,\xi)$ є [3] відповідно приєднані функції Лежандра першого і другого роду.

Більш точні розв'язки рівняння (11) можна отримати, користуючись методами теорії збурень [4], якщо за незбурене рівняння взяти рівняння Лежандра (13).

ЛІТЕРАТУРА

1. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, т. 2. М., 1963.
2. Н. В. Мак-Лахлан. Теория и приложения функций Матье. М., 1953.
3. Е. В. Гобсон. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952.
4. Ф. М. Морс, П. Фешбах. Методы теоретической физики. М., 1960.

В. А. ГАЛАЗЮК

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ

(резюме)

В работе предлагается приближенный способ решения дифференциального уравнения Ламе при произвольных комплексных значениях входящих в него параметров. Показано, что в определенных интервалах изменения независимой переменной дифференциальное уравнение Ламе может быть приближенно приведено к дифференциальному уравнению Матье или к дифференциальному уравнению присоединенных функций Лежандра.