ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 531.6 : 539. 3

О. В. БЛАЖІЄВСЬКА

ВПЛИВ РІДИНИ НА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ

Розглянемо круглу пружну пластинку, закріплену певним чином у безмежному жорсткому екрані, що з одного боку стикається з ідеальною стисливою рідиною. Пластинка здійснює вільні коливання малої порівняно з її лінійними розмірами амплітуди. Тоді рух рідини, викликаний коливаннями пластинки, як відомо [1], визначається потенціалом швидкостей Φ, що задовольняє хвильове рівняння

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0,$$

де Δ — оператор Лапласа; c — швидкість поширення звукових хвиль у рідині.

Оберемо циліндричну систему координат (r, Θ, z) з початком у центрі пластинки і віссю z, перпендикулярною до площини пластинки, та розглядатимемо лише усталені осесиметричні коливання, для яких нормальні зміщення пластинки

$$w^*(r, t) = w(r)\, e^{-i\omega t}$$

і відповідно потенціал швидкостей

$$\Phi(r, z, t) = \varphi(r, z)\, e^{-i\omega t}.$$

У цьому випадку $\varphi(r, z)$ задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k^2\varphi = 0. \tag{1}$$

Тут $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Крім того, повинні виконуватися такі умови:

1) гранична умова

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = \begin{cases} i\omega\, w(r) & r \geqslant a \\ 0 & r < a, \end{cases} \tag{2}$$

де a — радіус пластинки;

2) умови випромінювання Зоммерфельда на безмежності

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= 0\left(\frac{1}{r}\right) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial r} - ik\varphi &= 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{при } r \to \infty. \tag{3}$$

Коливання пластинки описуються рівнянням

$$\frac{\partial^4 w^*}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w^*}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w^*}{\partial r}+\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2}=\frac{p}{D}, \tag{4}$$

де h — товщина пластинки; ρ — густина матеріалу пластинки; D — циліндрична жорсткість; p — гідродинамічний тиск.

Використовуючи інтеграл Коші, одержимо, що

$$p=-\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{z=z_0}=i\rho_0\omega\varphi(r, z)\,|_{z=0_0}\,e^{-i\omega t},$$

де ρ_0 — густина рідини.

Пластинка закріплена таким чином, що на контурі $r=a$ виконуються умови

$$w(r)=0\quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}=0. \tag{5}$$

Як відомо [2], умови (5) означають, що зміщення пластинки та головна кривина поверхні пластинки вздовж лінії закріплення дорівнюють нулеві.

Використовуючи функцію Гріна для рівняння Гельмгольца (1) з крайовими умовами (2), (3), одержимо, що

$$\varphi(r, z)=-\frac{i\omega}{2\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi} w(\rho)\frac{e^{ikR_1}}{R_1}\,d\psi\rho d\rho,$$

де

$$R_1=\sqrt{R^2+z^2}=\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi+z^2}.$$

Використавши інтеграл Зоммерфельда [3]

$$\frac{e^{ik\sqrt{R^2+z^2}}}{\sqrt{R^2+z^2}}=\int_0^\infty\frac{e^{-\sqrt{t^2-k^2}z}}{\sqrt{t^2-k^2}}J_0(tR)\,tdt\quad (z\geqslant 0),$$

де $J_0(tR)$ — функція Бесселя першого роду, і враховуючи теорему додавання для циліндричних функцій нульового порядку, одержимо

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{ik\sqrt{r^2+\rho^2-2\rho r\cos\psi+z^2}}}{\sqrt{r^2+\rho^2-2\rho r\cos\psi+z^2}}d\psi=\int_0^\infty\frac{te^{-\sqrt{t^2-k^2}z}}{\sqrt{t^2-k^2}}J_0(t\rho)J_0(tr)\,dt.$$

Отже, для функції $\varphi(r, z)$ дістанемо такий вираз:

$$\varphi(r, z)=-\frac{iw}{2\pi}\int_0^a\int_0^\infty\frac{tJ_0(tr)J_0(t\rho)}{\sqrt{t^2-k^2}}\rho w(\rho)\,e^{-\sqrt{t^2-k^2}z}\cdot dtd\rho,$$

а для гідродинамічного тиску на пластинку —

$$p=\frac{\rho_0\omega^2}{2\pi}\int_0^a\int_0^\infty\frac{tJ_0(tr)J_0(t\rho)}{\sqrt{t^2-k^2}}\rho\omega(\rho)\,dt\,d\rho. \tag{6}$$

Таким чином, задача про усталені, осесиметричні коливання пластинки в контакті з водою, згідно з (4), (6), зводиться до розв'язання інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}-\omega^2\frac{\rho h}{D}w=$$

$$=\frac{\rho_0\,\omega^2}{D}\int\limits_0^a w(\rho)\left[\int\limits_0^\infty\frac{t\,J_0(tr)\,J_0(t\rho)}{\sqrt{t^2-k^2}}\,dt\right]\rho d\rho \qquad (7)$$

з крайовими умовами (5).

Застосуємо до рівняння (7) інтегральне перетворення Ханкеля з скінченими границями [2]

$$\overline{w}(\alpha_i a)=\int\limits_0^a w(r)\,J_0(\alpha_i r)\,rdr, \qquad (8)$$

де $\alpha_i a$ — корінь рівняння $J_0(\alpha_i a)=0$.

З (8) маємо

$$w(r)=\frac{2}{a^2}\sum_{j=1}^{\infty}\overline{w}(\alpha_j a)\,\frac{J_0(\alpha_j r)}{[J_1(\alpha_j a)]^2}.$$

Для визначення трансформант $\overline{w}(\alpha_i a)$ одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$[(\alpha_i a)^4-(\beta a)^4]\,\overline{w}(\alpha_i)=\sum_{j=1}^{\infty}C_{ij}\,\overline{w}(\alpha_j a), \qquad (9)$$

в яких прийняті такі позначення:

$$(\beta a)^4=\frac{\omega^2\rho h a^4}{D}\text{ — хвильове число;} \qquad (10)$$

$$C_{ij}=2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{a}{h}\right)(\beta a)^4\,\frac{(\alpha_i a)(\alpha_j a)\,J_1(\alpha_i a)}{J_1(\alpha_j a)}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^\infty\frac{J_0(\sqrt{t^2+k^2a^2})\,dt}{[\alpha_i^2a^2-(ka)^2-t^2]\,[\alpha_j^2a^2-(ka)^2-t^2]}-\right.$$

$$\left.-\,i(ka)\int\limits_0^1\frac{J_0^2(ka\sqrt{1-t^2})\,dt}{[\alpha_i^2a^2+k^2a^2(t^2-1)]\,[\alpha_j^2a^2+k^2a^2(t^2-1)]}\right\}=$$

$$=2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{a}{h}\right)(\beta a)^4\,\frac{(\alpha_i a)(\alpha_j a)\,J_1(\alpha_i a)}{J_1(\alpha_j a)}\,[\mathrm{Re}\,C_{ij}^0+i\,\mathrm{Im}\,C_{ij}^0]. \qquad (11)$$

Умова існування нетривіальних розв'язків системи (9) дає частотне рівняння.

Обчислити коефіцієнти C_{ij} в замкнутому вигляді для випадку довільного параметра (ka) не вдається. У зв'язку з цим розглянемо декілька випадків. Спочатку приймемо, що $ka=0$, тобто будемо вважати, що рідина нестислива. У цьому випадку коефіцієнти C_{ij} є дійсними і обчислюються в замкнутому вигляді, а саме:

$$C_{ij}=2\left(\frac{\rho_0 a}{\rho h}\right)(\beta a)^4(\alpha_i a)(\alpha_j, a)\frac{J_j(\alpha_i a)}{J_i(\alpha_j a)}\cdot\frac{4}{\pi}\times$$

$$\times\frac{{}_2F_3\left(1,1,\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ -a^2\alpha_i^2\right)-{}_2F_3\left(1,1,\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ -a^2\alpha_j^2\right)}{(\alpha_j a)^2-(\alpha_i a)^2}$$

при $i\neq j$;

$$C_{ii}=2\left(\frac{\rho_0\cdot a}{\rho\cdot h}\right)(\beta a)^4(\alpha_i a)^2\frac{32}{27\pi}\,{}_2F_3\left(2,2,\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2};\ -a^2\alpha_i^2\right),$$

де

$${}_2F_3(\alpha_1,\alpha_2;\ \beta_1,\beta_2,\beta_3;\ z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k}{(\beta_1)_k(\beta_2)_k(\beta_3)_k}\ \frac{z^k}{k!}\ -$$

узагальнена гіпергеометрична функція.

Для одержання числових значень цих функцій корисно використати їх зображення через циліндричні функції півцілого порядку:

$${}_2F_3\left(1,1;\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ -a^2\alpha_i^2\right)=\frac{\pi}{2\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[J_{k+\frac{1}{2}}(\alpha_i a)\right]^2}{2k+1},$$

$${}_2F_3\left(2,2;\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2};\ -a^2\alpha_i^2\right)=\frac{27\pi}{32(\alpha_i a)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[J_{k+\frac{1}{2}}(\alpha_i a)\right]^2}{2k+1}-$$

$$-\frac{27\pi}{32}J_{\frac{1}{2}}(\alpha_i a)J_{-\frac{1}{2}}(\alpha_i a)+\frac{27}{16(\alpha_i a)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_{k+\frac{1}{2}}(\alpha_i a)J_{k+\frac{3}{2}}(\alpha_i a)}{(2k+1)(2k+3)}$$

Останні співвідношення одержуються з (10), якщо використати інтегральні зображення для функцій Бесселя першого роду нульового порядку і відомий розклад

$$\sin(2\alpha t\cos\psi)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k J_{2k+1}(2\alpha t)\cos(2k+1)\psi.$$

Систему рівнянь (9) можна розв'язувати методом послідовних наближень. В першому наближенні одержимо значення хвильового числа $(\beta a)^4$, якщо приймемо, що всі недіагональні елементи частотного визначника дорівнюють нулеві. У цьому випадку

$$w(r)=AJ_0(\alpha_i r);\quad (A=\mathrm{const});\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

тобто форми коливань пластинки в рідині збігаються з формами коливань у вакуумі, а відповідні хвильові числа виражаються так:

$$(\beta_i a)^4 = \frac{(\alpha_i a)^4}{1 + 2\left(\frac{\rho_0 a}{\rho h}\right)(\alpha_i a)^2 \frac{32}{27\pi} {}_2F_3\left(2,\, 2;\, \frac{5}{2},\, \frac{5}{2},\, \frac{5}{2};\, -a_i^2 \alpha_i^2\right)}.$$

Якщо ввести позначення

$$\varkappa_i = \frac{64\,(\alpha_i a)^2}{27\pi}\, {}_2F_3\left(2,\, 2,\, \frac{5}{2},\, \frac{5}{2},\, \frac{5}{2},\, -a_i^2 \alpha_i^2\right),$$

то частота власних коливань пластинки в контакті з рідиною буде

$$\omega_i = \frac{\omega_{0i}}{\sqrt{1 + \varkappa_i \frac{\rho_0 a}{\rho h}}}, \tag{12}$$

де ω_{0i} — частота коливань пластинки у вакуумі.

Формула (12) аналогічна відомій формулі, одержаній Лембом [4] для основного тону жорстко закріпленої круглої пластинки. Якщо методом Лемба обчислити найнижчу частоту коливань для пластинки з умовами закріплення (5), обравши форму коливань пластинки у вигляді $w(r) = A\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^3$, то одержимо

$$\omega_1 = \frac{\omega_{01}}{\sqrt{1 + 0{,}59278\left(\frac{\rho_0 a}{\rho h}\right)}}. \tag{13}$$

Як відомо, наближена формула (13) дає значення основної частоти, яке дещо вище від точного значення.

Обчислимо значення хвильового числа для стальної пластинки при $\frac{a}{h} = 28$. З формули (13) одержуємо для основної частоти $(\beta_1 a)^2 = 3{,}2700$. Згідно з формулою (12), маємо $(\beta_1 a)^2 = 3{,}0149$.

Якщо обмежитися визначником n-го порядку $(n \geqslant 2)$, то у відповідному n-ому наближенні одержуємо такі значення величини $(\beta a)^2$, яка пропорціональна відповідній частоті:

№ тону	I наближ.	II наближ.	III наближ.	IV наближ.	V наближ.	VI наближ.
1	3,0149	3,0136	3,0135	3,0135	3,0135	3,0135
2	21,815	22,409	22,397	22,396	22,395	22,395
3	60,223		61,211	61,188	61,186	61,184
4	118,34			119,69	119,65	119,64
5	196,26				197,81	197,78
6	293,98					295,76

Відносні помилки δ_i між першим і шостим наближеннями відповідно для i-го тону $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ такі: $\delta_1 = 0{,}0475\%$; $\delta_2 = 2{,}59\%$; $\delta_3 = 1{,}57\%$; $\delta_4 = 1{,}08\%$; $\delta_5 = 0{,}767\%$; $\delta_6 = 0{,}602\%$.

Як видно, частоти коливань, обчислені за формулою (13), не відрізняються від точних більше ніж на δ_i; а дві перші частоти можуть бути одержані з практично достатньою точністю з визначника другого порядку.

Розглянемо тепер випадок, коли параметр $ka \neq 0$ малий $(ka < 1)$, тобто низькочастотні коливання пластинки в стисливій рідині. Коли зовнішнім середовищем є вода, а пластинка стальна, то

$$(ka)^2 = 1{,}07717\left(\frac{h}{a}\right)^2 (\beta a)^4. \tag{14}$$

У цьому випадку розкладемо коефіцієнти C_{ij}^0 (11) по степенях малого параметра (ka):

$$\operatorname{Re} C_{ij}^0 = \frac{1}{(\alpha_j a)^2 - (\alpha_i a)^2}\Big\{[B_{0j} - B_{0i}] - (ka)^2 [B_{1j} - B_{1i}] + $$
$$+ (ka)^4 [B_{2j} - B_{2i}] - \cdots\Big\};$$

$$\operatorname{Im} C_{ij}^0 = \frac{ka}{(\alpha_j a)^2 - (\alpha_i a)^2}\Big\{-\left[\frac{1}{(\alpha_i a)^2} - \frac{1}{(\alpha_j a)^2}\right] + (ka)^2\left[\frac{1}{3\alpha_i^2 a^2} - \frac{1}{3\alpha_j^2 a^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3(\alpha_i a)^4} + \frac{2}{3(\alpha_j a)^4}\right] - (ka)^4 \cdot \frac{8}{15}\left[\frac{1}{(\alpha_i a)^6} - \frac{1}{(\alpha_j a)^6} - \frac{1}{2(\alpha_i a)^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2(\alpha_j a)^4} + \frac{3}{32(\alpha_i a)^2} - \frac{3}{32(\alpha_j a)^2}\right] + \cdots\Big\};$$

$$\operatorname{Im} C_{ii}^0 = ka\Big\{-\frac{1}{(\alpha_i a)^4} + (ka)^2\left[\frac{1}{3(\alpha_i a)^4} - \frac{4}{3(\alpha_i a)^6}\right] - $$
$$- (ka)^4\left[\frac{3}{(\alpha_i a)^8} - \frac{8}{(\alpha_i a)^6} + \frac{3}{32(\alpha_i a)^4)}\right]\frac{8}{15} + \cdots\Big\},$$

де

$$B_{0n} = \int_0^\infty \frac{J_0^2(t)\,dt}{t^2 - (\alpha_n a)^2};$$

$$B_{1n} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}}\int_0^\infty \frac{J_1(2ut)}{t(t^2 - \alpha_n^2 a^2)}\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_0^\infty \frac{J_0(2ut)}{(t^2 - \alpha_n^2 a^2)^2}\,dt,$$

$$B_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}}\int_0^\infty \frac{J_2(2ut)}{t^2(t^2 - \alpha_n^2 a^2)}\,dt + \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_0^\infty \frac{J_1(2ut)\,dt}{t(t^2 - \alpha_n^2 a^2)^2} + $$
$$+ \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\int_0^\infty \frac{J_0(2ut)\,dt}{(t^2 - \alpha_n^2 a^2)^3} \qquad (n = i, j)$$

і т. д.

Всі інтеграли, що входять в C_{ij}^0, виражаються через узагальнені гіпергеометричні функції. Значення коефіцієнтів C_{11}^0, C_{12}^0, C_{21}^0, C_{22}^0 такі:

$$C_{11}^0 = 0{,}064535 - (ka)^2 0{,}010564 + (ka)^4 0{,}0015327 - \ldots + i(ka)[-0{,}029900 +$$
$$+ (ka)^2 0{,}0030731 - (ka)^4 0{,}00016798 + \ldots];$$

$$C_{12}^0 = C_{21}^0 = 0{,}0060703 - (ka)^2 0{,}0029655 + (ka)^4 0{,}00066490 - \ldots +$$
$$+ i(ka)[-0{,}0056747 + (ka)^2 0{,}0011132 - (ka)^4 0{,}000083334 + \ldots];$$

$$C_{22}^0 = 0{,}0042933 - (ka)^2 0{,}0005905 + (ka)^4 0{,}00024305 - \ldots +$$
$$+ i(ka)[-0{,}0010770 + (ka)^2 0{,}00031188 - (ka)^4 0{,}000036856 + \ldots$$

Оскільки C_{ij} — поліноми відносно (ka) з комплексними коефіцієнтами, то корені частотного рівняння будуть комплексними. Отже,

$$\omega_i = \omega_i^{(1)} + i\omega_i^{(2)}. \tag{15}$$

Амплітуда коливань згасає, згідно з (15), як $e^{-\omega_i^{(2)} t}$, а відповідна частота буде $\omega_i^{(1)}$. Як і у випадку нестисливої рідини, ω_i $(i=1, 2)$ з практично достатньою точністю можна обчислити з визначника другого порядку. Якщо при цьому обмежитися лінійними членами розкладу коефіцієнтів по (ka), то одержимо $w_1^{(1)} = 3{,}0110$, $\omega_2^{(1)} = 22{,}264$.

Якщо обмежитись квадратами розкладу по (ka), то матимемо $\omega_1^{(1)} = 3{,}0131$, $\omega_2^{(1)} = 22{,}465$.

Порівняння з одержаними раніше частотами показує, що неврахування стисливості рідини при обчисленні перших двох частот осесиметричних коливань дає помилки, не більші ніж відповідно $\delta_1 = 0{,}312\%$, $\delta_2 = 0{,}583\%$.

Розглянемо, нарешті, випадок, коли $ka > 1$. Відомо, що в цьому випадку гідродинамічний тиск на пластинку можна взяти рівним

$$p = -\rho_0 c \frac{\partial w^*(r, t)}{\partial t} = i\omega\rho_0 c w(r),$$

і рівняння коливань набуде вигляду

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\omega^2 \rho h + i\omega\rho_0 c}{D} w = 0.$$

Розв'язком цього рівняння, що задовольняє умову (5), буде функція

$$w(r) = AJ_0(\alpha_i r).$$

Частота визначається із співвідношення

$$\frac{\omega_i^2 \rho h a^4 + i\omega_i \rho_0 c a^4}{D} = (\alpha_i a)^4,$$

або

$$\omega_i = -i\frac{c}{2a}\left(\frac{\rho_0 a}{\rho h}\right) \pm \sqrt{\omega_{0i}^2 - \frac{c^2}{4a^2}\left(\frac{\rho_0 a}{\rho h}\right)^2}. \tag{16}$$

Отже, у випадку високочастотних коливань амплітуда згасає за законом $e^{-\frac{c}{2a}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\frac{a}{h}\right)t}$, а частота коливань буде

$$\omega_i^{(1)} = \sqrt{\omega_{0i}^2 - \frac{c^2}{4a^2}\left(\frac{\rho_0 a}{\rho h}\right)^2}.$$

Для пластинки, яка розглядалась вище, матимемо

Значення $\frac{\omega_i^{(1)}}{\omega_{oi}}$

№ тону	З врахуванням стисливості	Без врахування стисливості
4	0,93740	0,86046
5	0,97612	0,88719
6	0,98894	0,90567

Тут частота ω_i без врахування стисливості рідини відповідає VI наближенню $(\beta_i a)^2$, наведеному раніше для нестисливої рідини, ω_{oi} — відповідна частота коливань у вакуумі.

Неврахування стисливості рідини при обчисленні частоти коливань i-го тону ($i=4, 5, 6$) дає такі помилки:

$$\delta_4=8{,}19\%,\ \delta_5=9{,}11\%,\ \delta_6=8{,}41\%.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Х. Ламб. Гидродинамика. М., 1948.
2. И. Снеддон. Преобразование Фурье. М., 1955.
3. А. Скучик. Основы акустики. М., 1953.
4. H. Lamb. Proceedings of the Royal Soc. of London, v. **98**, 1920.

О. В. БЛАЖИЕВСКАЯ

ВЛИЯНИЕ ЖИДКОСТИ НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

(резюме)

В статье рассматриваются свободные колебания круглой определенным образом закрепленной в жестком экране пластинки в контакте с идеальной жидкой средой. Определен спектр частот в случае идеальной несжимаемой жидкости.

Исследуется влияние сжимаемости жидкости в случае низкочастотных и высокочастотных колебаний.