ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
1967 *Серія механіко-математична* *Випуск 3*

УДК 624. 074

В. З. ЖДАН

ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ НА ПРУЖНОМУ КОНТУРІ

Напружений і деформований стан оболонки обертання визначається основними величинами [1]

$$u, w, \Theta, N, Q, M, v, S, \tag{1}$$

де u — переміщення вздовж меридіана оболонки; w — переміщення в напрямі нормалі; Θ — кут повороту меридіана; N — меридіональна нормальна сила; Q — узагальнена поперечна сила; M — меридіональний згинальний момент; v — переміщення вздовж дотичної до паралелі; S — узагальнена зсувна сила.

Одним із способів їх визначення є побудова і розв'язання системи диференціальних рівнянь на основі рівнянь рівноваги елемента серединної поверхні оболонок, фізичних рівнянь і деформацій цієї поверхні.

Якщо зобразити поверхневе навантаження у вигляді гармонічного ряду в кільцевому напрямі, то властивості оболонки обертання як циклічної системи дають можливість здійснити розділення змінних у вказаній системі і звести розв'язання задачі до інтегрування системи звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь [2]. Одержана таким чином система диференціальних рівнянь вміщує в загальному випадку вісім рівнянь першого порядку (або шість рівнянь при осесиметричному завантаженні оболонки), в яких невідомими є амплітудні значення основних функцій (1), що визначаються.

У відповідності з цим далі фігуруватимуть тільки названі амплітудні значення, що відповідають дії n-го члена гармонічного розкладу поверхневого навантаження (індекс n у випадках, коли це не викличе непорозумінь, не вживається). Для одержання розв'язку, що відповідає дії повного поверхневого навантаження, необхідно взяти суму наслідків розрахунку оболонки від дії окремих членів розкладу поверхневого навантаження. Символічно систему основних диференціальних рівнянь задачі можна записати у вигляді одного звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$W'(\alpha) = F(\alpha)\, W(\alpha) + T(\alpha), \tag{2}$$

де $W(\alpha)$ та $W'(\alpha)$ — матриця-стовпець, складена із основних невідомих функцій (1), та її перша похідна по меридіональній змінній (α); $F(\alpha)$ — квадратна матриця в загальному випадку восьмого порядку, елементи якої, що залежать від геометрії оболонки, є коефіцієнтами системи основних диференціальних рівнянь задачі; $T(\alpha)$ — матрицястовпець, складена із компонент поверхневого навантаження.

Інтеграл рівняння (2) символічно зображається у вигляді

$$W(\alpha)=G(\alpha)W(\alpha_0)+W^*(\alpha), \qquad (3)$$

де $W^*(\alpha)$ — окремі розв'язки функцій (1), що залежать від поверхневого навантаження; $G(\alpha)$ квадратна матриця восьмого порядку із змінними елементами, спосіб побудови якої визначається структурою матриці $F(\alpha)$.

Так, для конічної оболонки лінійно-змінної товщини і циліндричної оболонки постійної товщини, системи основних диференціальних рівнянь яких мають постійні коефіцієнти [2], матриця $G(\alpha)$ зображається рядом

$$G(\alpha)=J+(\alpha-\alpha_0)F+\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2!}F^2+\frac{(\alpha-\alpha_0)^3}{3!}F^3+\cdots=e^{(\alpha-\alpha_0)F}. \qquad (4)$$

Тут $J+$ — одинична матриця.

Загальний розв'язок (3) задачі побудовано з точністю до 8 (або 6 у випадку осесиметричної задачі) сталих інтегрування — матриця-стовпець $W(\alpha_0)$, якими обрано значення невідомих функцій у довільному меридіональному перерізі оболонки. Будемо в наступному цей переріз суміщати з одним із її країв.

Вказаний розв'язок набуває означеності тільки після підпорядкування його конкретним умовам, що задані на краях оболонки. Ці умови характеризуються видом опирання країв. Так, якщо край оболонки вільний і завантажений силами і моментами

$$N=\overline{N},\ \ Q=\overline{Q},\ \ S=\overline{S},\ \ M=\overline{M}, \qquad (5)$$

то невідомими є лінійні і кутові переміщення u, w, v, Θ.

Якщо ж задані переміщення краю

$$u=\overline{u},\ w=\overline{w},\ v=\overline{v},\ \Theta=\overline{\Theta}, \qquad (6)$$

то зусилля N, Q, M, S — невідомі. Наприклад, при жорсткому защемленні усі величини (6) дорівнюють нулеві.

Покажемо хід визначення невідомих крайових функцій у цих простих випадках. Нехай на вузькому краї оболонки задано умови (5), а на широкому — умови (6). Оберемо широкий край як початковий переріз і запишемо загальний розв'язок (3) для кінцевого перерізу *, тобто вузького краю

$$W_l=G_l W_0+W_l^*, \qquad (7)$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{Vmatrix} u_l \\ w_l \\ \Theta_l \\ \tilde{N}_l \\ \tilde{Q}_l \\ \tilde{M}_l \\ v_l \\ \tilde{S}_l \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & g_{17} & g_{18} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} & g_{27} & g_{28} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} & g_{37} & g_{38} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & g_{46} & g_{47} & g_{48} \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & g_{56} & g_{57} & g_{58} \\ g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} & g_{65} & g_{66} & g_{67} & g_{68} \\ g_{71} & g_{72} & g_{73} & g_{74} & g_{75} & g_{76} & g_{77} & g_{78} \\ g_{81} & g_{82} & g_{83} & g_{84} & g_{85} & g_{86} & g_{87} & g_{88} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{w}_0 \\ \tilde{\Theta}_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ \tilde{v}_0 \\ S_0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} u_l^* \\ w_l^* \\ \Theta_l^* \\ N_l^* \\ Q_l^* \\ M_l^* \\ v_l^* \\ S_l^* \end{Vmatrix}, \qquad (8)$$

* Величини, що відносяться до початкового краю, тут і далі відмічаються індексом «0», а що відносяться до кінцевого краю — індексом «l».

Видозмінимо матриці-стовпці W_0 і W_l таким чином:

$$W_0 = \begin{vmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{w}_0 \\ \tilde{\Theta}_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ \tilde{v}_0 \\ S_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{w}_0 \\ \tilde{\Theta}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{v}_0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ 0 \\ S_0 \end{vmatrix} = \tilde{W}_0 + X_0; \qquad W_l = \begin{vmatrix} u_l \\ w_l \\ \Theta_l \\ \tilde{N}_l \\ \tilde{Q}_l \\ \tilde{M}_l \\ v_l \\ \tilde{S}_l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{N}_l \\ \tilde{Q}_l \\ \tilde{M}_l \\ 0 \\ \tilde{S}_l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_l \\ w_l \\ \Theta_l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_l \\ 0 \end{vmatrix} = \tilde{W}_l + X_l. \qquad \text{(8-a)}$$

Тепер символами X_0 і X_l позначено невідомі, що підлягають визначенню. Перетворимо систему (8) до такого вигляду:

$$\begin{Vmatrix} g_{14} & g_{15} & g_{16} & g_{18} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{24} & g_{25} & g_{26} & g_{28} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_{34} & g_{35} & g_{36} & g_{38} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g_{44} & g_{45} & g_{46} & g_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{54} & g_{55} & g_{56} & g_{58} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{64} & g_{65} & g_{66} & g_{68} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{74} & g_{75} & g_{76} & g_{78} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ g_{84} & g_{85} & g_{86} & g_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ S_0 \\ -u_l \\ -w_l \\ -\Theta_l \\ -v_l \end{vmatrix} = -W_l^* - G_l\tilde{W}_0 + \tilde{W}_l. \qquad (9)$$

Введемо матриці B_0 і B_l. Матриця B_0 — її елементи b_{1i}, b_{2j}, b_{3k} і b_{4m} — дорівнюють одиниці (i, j, k, m — фіксовані числа, що збігаються із номерами відповідно першого, другого, третього і четвертого ненульового елементу матриці X_0), інші її елементи дорівнюють нулю. Матриця B_l — її елементи b_{5i}, b_{6j}, b_{7k} і b_{8m} — дорівнюють одиниці (тепер i, j, k, m — фіксовані числа, що збігаються із номерами відповідно першого, другого, третього і четвертого ненульового елемента матриці X_l), інші її елементи дорівнюють нулю.

Таким чином,

$$B_0 = \begin{Vmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}, \quad B_l = \begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{Vmatrix}. \qquad (10)$$

Перетворення (7) в (9) здійснене за допомогою таких дій: множенням матриць B_0 і B_l відповідно на матриці-стовпці W_0 і W_l; множенням матриці G_l справа на матрицю B_0^T, транспоновану щодо матриці B_0, і додаванням її до матриці B_l^T, транспонованої щодо матриці B_l.

Перелічені перетворення зображаються формулою

$$(G_l B_0^T + B_l^T)(B_0 X_0 - B_l X_l) = \sim -(W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l), \tag{11}$$

або

$$\overline{G}R = -(W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l). \tag{12}$$

Система (9) являє собою систему алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої з урахуванням запису (12) дорівнює

$$R = -\overline{G}^{-1}(W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l). \tag{13}$$

Тепер визначаємо матриці X_0 і X_l:

$$X_0 = B_0^T R = -B_0^T \overline{G}^{-1}(W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l); \tag{14}$$

$$X_l = -B_l^T R = B_l^T \overline{G}^{-1}(W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l), \tag{15}$$

а після цього — за формулами (8-а) — матриці W_0 і W_l.

Проте здебільшого задано такі граничні умови задачі розрахунку оболонок, що жодна з восьми величин (1) в крайових перерізах попереду невідома (підкріплення країв пружними кільцями, спирання оболонок на пружні основи і т. д.). В таких випадках з'являється необхідність встановлювати деякі співвідношення між вказаними крайовими величинами, що задовольняли б конкретні граничні умови.

Зупинимося на випадках, коли краї оболонки підкріплюються пружними кільцями. Для виведення розрахункових формул використаємо такий прийом: кільце відділяється від оболонки, і її вплив компенсується прикладанням до кільця сил і моментів. Ця група зусиль включається до системи зовнішніх силових факторів, що діють на кільце. Потім визначаються переміщення і деформації кільця, до виразів яких входять вже і крайові зусилля оболонки. І, нарешті, з умов сумісності деформацій кільця і краю оболонки, що прилягає до нього, встановлюються співвідношення між крайовими зусиллями і переміщеннями, що характеризують задані граничні умови.

Попереду розглянемо опір кругового циліндричного кільця радіуса r_k при навантаженнях, розподілених вздовж його кола. Довільний закон зміни навантажень вздовж осі кільця замінюється гармонічним рядом по кутовій змінній β. Далі фігурують лише амплітудні значення навантажень. У загальному випадку на кільце діють: p_k — вертикальне навантаження (позитивне при напрямі зверху вниз); t_k -тангенціальне навантаження (позитивне при напрямі в бік зростання кута β, тобто проти годинникової стрілки відносно центра кільця); q_k — радіальне навантаження (позитивне при напрямі до центра); m_k — моментне навантаження в діаметральних площинах (позитивне при напрямі по годинниковій стрілці, якщо дивитись вздовж кола в бік зростання кута β); g_k — моментне навантаження в площині кільця (позитивне при напрямі по годинниковій стрілці, якщо дивитися на кільце зверху).

Переміщення точок осі кільця характеризуються: w_k-радіальними переміщеннями (позитивними при напрямі до центра); u_k — вертикальними переміщеннями (позитивними при напрямі зверху вниз); v_k — тангенціальними переміщеннями (позитивними при напрямі в бік зростання кутової координати β).

Закручування кільця визначається поворотом (кутом кручення) в діаметральних площинах Θ_k, позитивним при напрямі по годинниковій стрілці, якщо дивитися вздовж кола в бік зростання β. Вказані переміщення і деформації кільця, на яке не накладено зовнішні зв'язки, залежать від навантажень, що діють на нього [3, 4]:

А. Осесиметричне навантаження ($n=0$)

$$w_k = \frac{r_k^2}{EF_k} q_k;$$

$$\Theta_k = \frac{r_k^2}{EI_k} m_k. \tag{16}$$

Б. Антисиметричне навантаження ($n=1$).

$$u_k - r_k \Theta_k = \frac{r_k^2}{E}\left[\frac{f r_k^2}{(1+f) I_k} + \frac{2{,}4(1+\nu)}{F_k}\right] p_k;$$

$$w_k - v_k = \frac{r_k}{EF_k}(g_k + r_k q_k). \tag{17}$$

При цьому із умов рівноваги кільця виходять такі співвідношення між амплітудними значеннями зовнішніх навантажень:

$$r_k p_k = -m_k, \; q_k = -t_k. \tag{18}$$

В. Завантаження загального вигляду ($n \geqslant 2$)

$$\left\| \begin{matrix} u_k \\ \Theta_k \\ v_k \\ w_k \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} z_{11} & z_{12} & 0 & 0 & 0 \\ z_{12} & z_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{33} & z_{34} & z_{35} \\ 0 & 0 & nz_{33} & z_{33} & z_{45} \end{matrix} \right\| \cdot \left| \begin{matrix} p_k \\ m_k \\ q_k \\ t_k \\ g_k \end{matrix} \right|, \tag{19}$$

або символічно *

$$V_k = Z_k Y_k. \tag{20}$$

Розглянемо тепер сумісну роботу оболонки і кільця, що підкріплює її край. Цей край приймемо за початковий переріз і відповідно до цього всі величини будемо відзначати індексом «0». У крайовому перерізі оболонки діють її внутрішні зусилля N_0, Q_0, M_0, S_0; до кільця ж прикладено зовнішні навантаження $p_{k,0}^*$, $t_{k,0}^*$, $q_{k,0}^*$, $m_{k,0}^*$, $g_{k,0}^*$.

Відокремимо оболонку від кільця і врахуємо її вплив, приклавши до кільця зусилля N_0, Q_0, M_0, S_0 із відповідними знаками.

Враховуючи в загальному випадку ексцентричність кріплення оболонки до кільця, одержуємо значення повного поверхневого навантаження, що прикладено до нього:

---

* Значення величин z_{ij} наведено в роботах [3] і [4].

$$\begin{Vmatrix} p_{k,0} \\ m_{k,0} \\ q_{k,0} \\ t_{k,0} \\ g_{k,0} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\delta & -\sin\delta & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 1 & 0 \\ -\sin\delta & -\cos\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{0,1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ S_0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} p^*_{k,0} \\ m^*_{k,0} \\ q^*_{k,0} \\ t^*_{k,0} \\ g^*_{k,0} \end{Vmatrix}, \tag{21}$$

або

$$Y_{k,0} = K_0 \bar{X}_0 + Y^*_{k,0}. \tag{22}$$

Тут позначено: $e_{0,1}$ — відстань від волокна кільця, де кріпиться оболонка, до вертикальної осі, що проходить через центр ваги його поперечного перерізу; $e_{0,2}$ — відстань від цього волокна до горизонтальної осі, що проходить через ту саму точку; δ — кут між віссю обертання оболонки і дотичною до її меридіана в крайовому перерізі.

Елементи матриці K_0 дорівнюють:

$$k_{21} = \cos\delta e_{0,1} + \sin\delta e_{0,2};$$

$$k_{22} = -\sin\delta e_{0,1} + \cos\delta e_{0,2}. \tag{23}$$

Умови сумісності деформацій кільця і краю оболонки висловлюються такими співвідношеннями:

$$w_{k,0} - e_{0,2}\Theta_{k,0} = -u_0 \sin\delta - w_0 \cos\delta, \tag{24}$$

$$u_{k,0} + e_{0,1}\Theta_{k,0} = u_0 \cos\delta - w_0 \sin\delta, \tag{25}$$

$$\Theta_{k,0} = \Theta_0, \tag{26}$$

$$v_{k,0} = v_0. \tag{27}$$

Тепер легко сформулювати граничні умови задачі при підкріпленні краю оболонки кільцем, на яке не накладені зовнішні зв'язки.

А. Осесиметричне завантаження ($n=0$). У цьому випадку, крім умов сумісності деформацій (24) і (26), повинна виконуватися умова рівноваги кільця у вертикальній площині

$$p_{k,0} = 0. \tag{28}$$

Розкриваючи умови (24), (26) і (28) за допомогою формул (16) і (21), приходимо до таких співвідношень:

$$\begin{Vmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \Theta_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -\operatorname{ctg}\delta & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{ctg}\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{63} & -c_{13} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ w_0 \\ \Theta_0 \\ N_0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \tilde{u}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{Q}_0 \\ \tilde{M}_0 \end{Vmatrix}, \tag{29}$$

або, символічно,

$$W_0 = C_0 X_0 + \bar{W}_0. \tag{30}$$

Елементи матриць C_0 і $\bar{W}_0$ дорівнюють

$$c_{13} = \csc\delta\, e_{0,2}, \quad c_{14} = \frac{\csc^2\delta\, r_{k,0}^2}{EF_{k,0}},$$

$$c_{63} = -\frac{EI_{k,0}}{r_{k,0}^2}, \tag{31}$$

$$\tilde{u}_0 = \frac{\csc\delta\, r_{k,0}^2}{EF_{k,0}} (\operatorname{ctg}\delta p_{k,0}^* - q_{k,0}^*), \quad \tilde{Q}_0 = \csc\delta\, p_{k,0}^*,$$

$$\tilde{M}_0 = (-\operatorname{ctg}\delta\, e_{0,2} + e_{0,1}) p_{k,0}^* - m_{k0}^*. \tag{32}$$

Б. Антисиметричне завантаження ($n=1$). У цьому випадку повинні виконуватися умови сумісності деформацій (24)—(27) і умови рівноваги кільця (18). Розкриваючи ці умови за допомогою співвідношень (17) і (21), одержуємо розрахункові залежності для випадку, що розглядається:

$$\left|\begin{matrix} u_0 \\ w_0 \\ \Theta_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ v_0 \\ S_0 \end{matrix}\right| = \left\|\begin{matrix} 0 & \operatorname{tg}\delta & c_{13} & c_{14} & -\operatorname{tg}\delta\, c_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{54} & c_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{sc}\,\delta & -c_{73} & -c_{74} & c_{74} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\delta & \cos\delta & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| \cdot \left|\begin{matrix} 0 \\ w_0 \\ \Theta_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} \bar{u}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{v}_0 \\ \bar{S}_0 \end{matrix}\right|, \tag{33}$$

або

$$W_0 = C_0 X_0 + \bar{W}_0. \tag{34}$$

Елементи матриць C_0 і W_0 визначаються за формулами

$$c_{13} = \mathrm{sc}\,\delta\, r_{k,0}, \quad c_{14} = \frac{r_{k,0}^2}{E}\left[\frac{f r_{k,0}^2}{(1+f) I_{k,0}} + \frac{2{,}4(1+\nu)}{F_{k,0}}\right], \quad c_{54} = \cos\delta\, r_{k,0},$$

$$c_{55} = \sin\delta\, r_{k,0}, \quad c_{73} = \operatorname{tg}\delta\, r_{k,0}, \quad c_{74} = \sin\delta\left(c_{14} - \frac{r_{k,0}^2}{EF_{k,0}}\right),$$

$$c_{75} = \cos\delta\left(\operatorname{tg}^2\delta\, c_{14} + \frac{r_{k,0}^2}{EF_{k,0}}\right); \tag{35}$$

$$\bar{u}_0 = \mathrm{sc}\,\delta\, c_{14} p_{k,0}^*, \quad \bar{M}_0 = -m_{k,0}^* - r_{k,0} p_{k0}^*, \quad \bar{S}_0 = -t_{k,0}^* - q_{k,0}^*,$$

$$\bar{v}_0 = -\operatorname{tg}\delta\, c_{14} p_{k,0}^* - \frac{r_{k,0}}{EF_{k,0}} (g_{k,0}^* + e_{0,1} t_{k,0}^* + r_{k,0} q_{k,0}^*). \tag{36}$$

В. Завантаження загального вигляду ($n \geqslant 2$). У цьому випадку кільце перебуває під дією системи самоврівноважених завантажень, тому необхідно задовольнити тільки умови сумісності деформацій кільця і оболонки.

Виключивши із співвідношень (19) величини Y_k за допомогою виразів (21) і використавши після цього умови сумісності деформацій (24)—(27), одержуємо основні формули для даного випадку.

$$\left\| \begin{matrix} u_0 \\ w_0 \\ \Theta_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ v_0 \\ S_0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} & 0 & c_{18} \\ 0 & 0 & 0 & c_{24} & c_{25} & c_{26} & 0 & c_{28} \\ 0 & 0 & 0 & c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{18} & c_{28} & 0 & 0 & c_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|_0 \cdot \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ 0 \\ S_0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \overline{u}_0 \\ \overline{w}_0 \\ \overline{\Theta}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{v}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \tag{37}$$

або

$$W_0 = C_0 X_0 + \overline{W}_0. \tag{38}$$

Елементи матриць C_c і $\overline{W}_0$ дорівнюють

$$c_{14} = \cos^2\delta\, z_{11} + n \sin^2\delta\, z_{33},\ c_{15} = -\sin\delta\cos\delta\,(z_{11} - \operatorname{tg}\delta\, z_{33}),$$
$$c_{16} = \cos\delta\, z_{12},\ c_{18} = -\sin\delta\, z_{33},\ c_{24} - \sin\delta\cos\delta\,(z_{11} - n z_{33}),$$
$$c_{25} = \sin^2\delta\,(z_{11} + \operatorname{ctg}\delta\, z_{33}),\ c_{26} = -\sin\delta\, z_{12},$$
$$c_{28} = -\cos\delta\, z_{33},\ c_{36} = z_{22},\ c_{78} = z_{34}; \tag{39}$$

$$\overline{u}_0 = \cos\delta\,(z_{11} p^*_{k,0} + z_{12} m^*_{k,0}) - \sin\delta\,(n z_{33} q^*_{k,0} + z_{33} t^*_{k,0} + z_{45} g^*_{k,0}),$$
$$\overline{w}_0 = -\sin\delta\,(z_{11} p^*_{k,0} + z_{12} m^*_{k,0}) - \cos\delta\,(n z_{33} q^*_{k,0} + z_{33} t^*_{k,0} + z_{45} g^*_{k,0}),$$
$$\overline{\Theta}_0 = z_{12} p^*_{k,0} + z_{22} m^*_{k,0},$$
$$\overline{v} = z_{33} q^*_{k,0} + z_{34} t^*_{k,0} + z_{35} g^*_{k,0}. \tag{40}$$

Вище були розглянуті випадки підкріплення краю оболонки пружним коловим циліндричним кільцем, вільним від зовнішніх зв'язків.

Якщо ж на кільце накладаються зв'язки, що перешкоджають деяким його переміщенням, наприклад вертикальним, у власній площині, або кутовим, то ці окремі обставини необхідно враховувати при визначенні переміщень кільця і складанні умов сумісності деформацій кільця і краю оболонки.

При формулюванні граничних умов оболонок на пружній основі описаний прийом також повністю придатний: оболонка відокремлюється від основи, і її вплив компенсується прикладанням до неї крайових зусиль. Від їх дії визначаються з урахуванням пружних властивостей основи її деформації, які будуть і деформаціями краю оболонки. Ця обставина приводить до встановлення необхідних співвідношень між крайовими зусиллями і переміщеннями оболонки, що характеризують конкретні граничні умови.

У всіх перелічених випадках розрахункові залежності мають такий же вигляд, як і при вільному кільці, тобто (30), (34), (38). Специфіка кожного виду крайових умов враховується при цьому матрицями C і $\overline{W}$.

Вкажемо тепер шлях визначення невідомих ще крайових величин. Нехай на кожному краї оболонки задано такі умови, що жодна з цих величин невідома.

Запишемо загальний розв'язок (3) щодо кінцевого краю

$$W_l = G_l W_0 + W_l^* \tag{41}$$

і застосуємо відповідні залежності типу (30), (34), (38):

$$C_l X_l + \overline{W}_l = G_l (C_0 X_0 + \overline{W}_0) + W_l^*. \tag{42}$$

Тепер у запис (42) входить в загальному випадку лише вісім невідомих величин (матриці-стовпці X_0 і X_l). Для їх визначення легко скласти систему алгебраїчних рівнянь

$$(G_l C_0 B_0^T + C_l B_l^T)(B_0 X_0 - B_l X_l) = -(W_l^* + G_l \overline{W}_0 - \overline{W}_l), \tag{43}$$

або

$$\overline{G}R = -(W_l + G_l \overline{W}_0 - \overline{W}_l). \tag{44}$$

Матриці B_0 і B_l будуються аналогічно матрицям (10). Із (44) знаходимо

$$R = -\overline{G}^{-1}(W_l^* + G_l \overline{W}_0 - \overline{W}_l), \tag{45}$$

а після цього — матриці X_0 та X_l:

$$X_0 = B_0^T R = -B_0^T \overline{G}^{-1}(W_l^* + G_l \overline{W}_0 - \overline{W}_l); \tag{46}$$

$$X_l = -B_l^T R = B_l^T \overline{G}^{-1}(W_l^* + G_l \overline{W}_0 - \overline{W}_l) \tag{47}$$

і по одній з формул (30), (34), (38) — матриці W_0 і W_l.

Порівнюючи структуру формули (11) із структурою формули (43), помічаємо, що перша є окремим випадком другої, оскільки в ній матриці C_0 і C_l вироджуються в одиничні матриці.

Підводячи підсумки, відзначимо, що виразом (43) характеризуються в загальному випадку різноманітні граничні умови задачі розрахунку оболонок обертання. При цьому матриці C_0 і C_l описують пружні властивості країв (пружні кільця, пружна основа, вільний або жорстко защемлений край і т. ін.), а матриці $\overline{W}_0$ і $\overline{W}_l$ — дію на краї зовнішніх завантажень (моментів у різних площинах та сил у різних напрямах). Вирази граничних умов задач в конкретних випадках зображаються відповідними окремими записами загальних співвідношень (43).

ЛІТЕРАТУРА

1. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1962.
2. В. З. Ждан. Матричная форма расчета конструктивно-ортотропных оболочек вращения. Труды Киев. политехн. ин-та, т. 43. К., 1963.
3. А. И. Сегаль. Практические методы расчета тонкостенных конических оболочек. Расчет пространственных конструкций, вып. II. М.—Л., 1951.
4. А. И. Сегаль. Некоторые итоги решения циклических задач. Расчет пространственных конструкций, вып. III, М., 1955.

В. З. ЖДАН

ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ НА УПРУГОМ КОНТУРЕ

(резюме)

Рассмотрены граничные условия задачи расчета упругих оболочек вращения. На основе общего принципа совместности деформаций построены общие расчетные формулы для формулировки граничных условий при подкреплении краев оболочек упругими кольцами — для свободных и защемленных краев, при опирании оболочек на упругие основания и т. д.