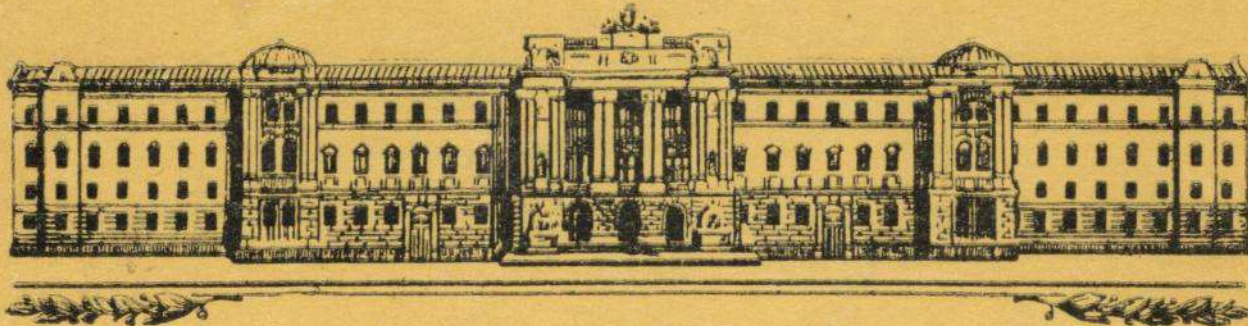




ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 3

1967

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 3

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1967

Друкується за рішенням Редакційно-видавничої ради
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

У збірнику зміщені статті з теорії функцій,
диференціальних рівнянь, геометрії, алгебри, теорії
пружності і аеродинаміки. Розрахований на
наукових працівників.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

ГОЛЬДБЕРГ А. А., ГРИЛИЦЬКИЙ Д. В. (відп. секретар), КОВАНЬ-
КО О. С. (відп. редактор), КОСТЕНКО В. Г., ЛІХАЧОВ В. О., СО-
КОЛОВ І. Г.

С. В. ДЕНИСКО, О. І. ПРИХОДСЬКА

Δ-ПОВЕРХНІ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ КОНГРУЕНЦІЇ

Нехай C — прямолінійна конгруенція, рівняння якої має вигляд

$$\bar{R} = \bar{r}(u^1, u^2) + \lambda \bar{m}(u^1, u^2), \quad (1)$$

де

$$\bar{m} = m^i \bar{r}_i + m_0 \bar{n}$$

$$\left(\bar{n} = \frac{[\bar{r}_1, \bar{r}_2]}{|\bar{r}_1, \bar{r}_2|}, \quad \bar{m} - \text{одиничний вектор} \right).$$

Поверхню $\bar{r}(u^1, u^2)$ позначимо через Φ . Кожний промінь конгруенції C повернемо навколо його початку в площині, що визначається вектором $\bar{m}$ і перпендикулярним до нього одиничним вектором

$$\bar{m}^* = m^{*i} \bar{r}_i + m_0^* \bar{n}$$

на один і той же кут φ .

Лінійчасті поверхні конгруенції C , лінійний елемент яких при цьому повороті зміниться на нескінченно малу вище першого порядку малості відносно φ , називатимемо поверхнями Δ , а їх лінії перетину з поверхнею Φ — лініями δ .

Скориставшись рівнянням (1), встановлюємо необхідні і достатні умови, щоб лінійчаста поверхня конгруенції C була поверхнею Δ . Ці умови запишуться у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} (-m_0^* \pi_{ij} + \nabla_i m^{*\alpha} g_{j\alpha}) du^i du^j &= 0; \\ m^{*\alpha} g_{i\alpha} du^i &= 0; \\ (m_0 m_0^* \gamma_{ij} - m_0^* \pi_{ai} \nabla_j m^a - m_0 \pi_{aj} \nabla_i m^{*a} + \nabla_i m^a \nabla_j m^{*\beta} g_{a\beta} + \\ + \pi_{ai} \pi_{\beta j} m^a m^{*\beta} + \partial_i m_0 \partial_j m_0^* + \pi_{aj} m^{*\alpha} \partial_i m_0 + \pi_{ai} m^a \partial_j m_0^*) du^i du^j &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де d — символ диференціювання вздовж лінії перетину даної лінійчастої поверхні конгруенції C з поверхнею Φ , π_{ij} і γ_{ij} — другий і третій основні тензори поверхні Φ , а коваріантні похідні обчислюються за допомогою коефіцієнтів зв'язності метричного тензора g_{ij} поверхні Φ .

Мають місце такі теореми.

Теорема 1. Конгруенція C може містити в собі не більше двох однопараметричних сімейств поверхонь Δ .

Доведення. Як видно з (2), нам досить показати, що випадок, коли кожна лінійчаста поверхня-конгруенція C є поверхня Δ , неможливий.

Нехай кожна лінійчаста поверхня конгруенції C є поверхня Δ . Тоді з (2) матимемо

$$\left. \begin{aligned} -m_0 \pi_{ij} + \nabla_{(i} m^{*\alpha} g_{j)\alpha} &= 0; \quad m^{*\alpha} g_{i\alpha} = 0; \\ m_0 m_0^* \pi_{ij} - m_0^* \nabla_{(i} m^\alpha \pi_{j)\alpha} - m_0 \nabla_{(j} m^{*\alpha} \pi_{i)\alpha} + \nabla_{(i} m^\alpha \nabla_{j)} m^{*\beta} g_{\alpha\beta} + \\ + \pi_{i\alpha} \pi_{j\beta} m^\alpha m^{*\beta} + \partial_{(i} m_0 \partial_{j)} m_0^* + \partial_{(i} m_0 \pi_{j)\alpha} m^{*\alpha} + \partial_{(i} m_0^* \pi_{j)\alpha} m^\alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Згідно з (3₁) і (3₂) або

$$m_0^* = 0,$$

або

$$\pi_{ij} = 0.$$

Оскільки дискримінант метричного тензора g_{ij} не дорівнює нулеві, то, в силу (3₂),

$$m^{*1} = m^{*2} = 0. \quad (4)$$

Нехай $m_0^* \neq 0$, а $\pi_{ij} = 0$. Тоді, беручи до уваги (4) та перпендикулярність векторів $\bar{m}$ і $\bar{m}^*$, одержимо, що конгруенція C вироджується в площину, а це неможливо. Якщо ж $m_0^* = 0$, то в силу (4) вектор $\bar{m}^*$ — нульовий, що теж неможливо.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Площина, що проходить через дотичну до лінії δ і промінь конгруенції C , який не збігається з цією дотичною, перпендикулярна до площини повороту променя.*

Доведення. Перепишемо (2₂) в такій формі:

$$(m^{*\alpha} \bar{r}_\alpha + m_0^* \bar{n})(\bar{r}_i du^i) = 0,$$

або

$$(\bar{m}^* d\bar{r}) = 0, \quad (5)$$

де $d\bar{r}$ — вектор, направлений по дотичній до лінії δ .

Крім того,

$$(\bar{m} \bar{m}^*) = 0. \quad (6)$$

В силу (5) і (6) площина, що проходить через вектори $\bar{m}$ і $d\bar{r}$, перпендикулярна до площини, яка визначається векторами $\bar{m}$ і $\bar{m}^*$, що і треба було довести.

Теорема 3. *Якщо конгруенція C утворена нормальми опорної поверхні Φ , то взяті на цій поверхні лінії будуть лініями δ тоді і тільки тоді, коли вони геодезичні, а площини повороту променів конгруенції є їхні нормальні площини.*

Доведення. Як відомо [1],

$$\nabla_i m^j = \alpha_i \tilde{m}^j, \quad (7)$$

де α_i — трансверсальний вектор поля вектора m^j , а $\tilde{m}^j$ — вектор, доповняльний до вектора m^j .

Користуючись (7) і беручи до уваги, що в даному випадку

$$m_0^* = 0, \quad m_0 = 1, \quad m^1 = m^2 = 0,$$

умови (2) запишемо у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i \tilde{m}_j^* du^i du^j &= 0; \\ m_i^* du^i &= 0; \\ \alpha_j \pi_{ia} \tilde{m}^{*a} du^i du^j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В силу теореми 2 вектор $\tilde{m}^*$ колінеарний вектору $d\bar{r}$, а тому система рівнянь (8) буде еквівалентна такій системі:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i du^i &= 0; \\ m_i^* du^i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

З (9₁) випливає, що вектор $\bar{m}^*$ переноситься паралельно вздовж лінії δ . Оскільки ж $\tilde{m}^*$, будучи дотичним до лінії δ , утворює постійний кут з вектором $\bar{m}^*$, який переноситься паралельно, то він теж переноситься паралельно вздовж лінії δ , а це означає, що лінія δ — геодезична.

Згідно з теоремою 2, площини повороту променів конгруенції будуть нормальними площинами ліній δ , що видно також з умови (9₂).

Теорему доведено.

Теорема 4. Якщо опорна поверхня конгруенції S є її фокальна поверхня, дотичні площини якої є площинами повороту променів конгруенції, то для того, щоб конгруенція S містила в собі поверхні Δ , необхідно і достатньо, щоб її опорна поверхня була різьбленою поверхнею, меридіани якої є ребра звороту розгортувальних поверхонь конгруенції S .

Доведення. За допомогою (7) і взявши до уваги, що в даному випадку

$$m_0 = m_0^* = 0,$$

умови (2) запишемо так:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i m_j du^i du^j &= 0; \\ \tilde{m}_i du^i &= 0; \\ \pi_{ai} \pi_{bj} m^a \tilde{m}^b du^i du^j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Згідно з теоремою 2, вектор $\bar{m}$ колінеарний векторові $d\bar{r}$, а тому з (10) матимемо, що вздовж лінії δ або

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i du^i &= 0; \\ \tilde{m}_i du^i &= 0; \\ \pi_{ai} m^a du^i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i du^i &= 0; \\ \tilde{m}_i du^i &= 0; \\ \pi_{\beta j} \tilde{m}^{\beta} du^j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

З (11) випливає, що лінія δ — пряма, тому що вона є одночасно і геодезичною лінією, як видно з (11₁) і (11₂), і асимптотичною лінією, як видно з (11₃). Даний випадок виключаємо з розгляду, оскільки конгруенція C вироджується в лінійчасту поверхню.

Рівняння (12₁) і (12₂), як і вище, показують, що лінія δ — геодезична, а з (12₃) випливає, що напрям цієї лінії спряжений перпендикулярному напрямку, тому лінія δ є також лінією кривини поверхні Φ .

Таким чином, лінія δ , будучи одночасно і геодезичною, і лінією кривини, є плоска геодезична. Поверхня, що допускає існування плоских геодезичних, є різьблена поверхня, меридіани якої збігаються з цими лініями.

Оскільки вектор $\bar{m}$ колінеарний векторові $\bar{dr}$, то меридіани різьбленої поверхні будуть ребрами звороту розгортних поверхонь конгруенції C .

Теорему доведено повністю.

Теорема 5. Якщо опорна поверхня конгруенції C є її фокальна поверхня, нормальні площини якої є площинами повороту променів цієї конгруенції, то поверхнями Δ конгруенції C є тільки такі поверхні, лінії дотику яких до опорної поверхні є її асимптотичними лініями і разом з тим, якщо опорна поверхня ненульової повної кривини, стрикційними лініями цих поверхонь або ортогональними траєкторіями їх прямолінійних твірних.

Доведення. За допомогою (7) і враховуючи, що в даному випадку

$$m_0 = 0, \quad m_0^* = 1, \quad m^{*1} = m^{*2} = 0,$$

умови (2) запишемо у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij} du^i du^j &= 0; \\ \alpha_j \pi_{\alpha i} \tilde{m}^{\alpha} du^i du^j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Нехай поверхня Φ ненульової повної кривини. В силу (13) маємо, що вздовж лінії δ або

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij} du^i du^j &= 0; \\ \alpha_j du^j &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij} du^i du^j &= 0; \\ \pi_{\alpha i} \tilde{m}^{\alpha} du^i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

З (14) випливає, що лінії δ — асимптотичні лінії поверхні Φ та стрикційні лінії поверхонь Δ конгруенції C . Умови (15) показують, що лінії δ , будучи асимптотичними лініями поверхні Φ , є разом з тим ортогональними траєкторіями прямолінійних твірних поверхонь Δ .

Якщо ж опорна поверхня нульової повної кривини, то (13₂) перетворюється в тотожність, оскільки на такій поверхні будь-який напрям спряжений асимптотичному напрямкові.

Беручи все це до уваги, переконуємось у справедливості теореми.

Теорема 6. *Нехай поверхня Φ неперервно згинається з збереженням одного сімейства асимптотичних ліній. Нехай цим згинанням згинається конгруенція C . Тоді, якщо на поверхні Φ інваріантне сімейство асимптотичних ліній є сімейство ліній δ , то воно буде сімейством ліній δ і під час згинання поверхні Φ при умові, що площа повороту променя конгруенції C твердо зв'язана з дотичною площиною поверхні Φ під час її згинання.*

Доведення. Нехай координати u^1, u^2 вибрані так, що сімейство $u^2 = \text{const}$ є інваріантне сімейство асимптотичних ліній поверхні Φ . Нехай це сімейство є сімейство ліній δ . Тоді з (2) матимемо:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_1 m^{*\alpha} g_{1\alpha} &= 0; \\ m^{*\alpha} g_{1\alpha} &= 0; \\ m_0 m_0^* \nu_{11} - m_0^* \pi_{21} \nabla_1 m^2 - m_0 \pi_{21} \nabla_1 m^{*2} + \nabla_4 m^\alpha \nabla_1 m^{*\beta} g_{\alpha\beta} + \\ &+ \pi_{12}^2 m^2 m^{*2} + \partial_1 m_0 \partial_1 m_0^* + \pi_{21} m^{*2} \partial_1 m_0 + \pi_{21} m^2 \partial_1 m_0^* = 0. \end{aligned} \right\} (16)$$

Крім того, в силу спеціального вибору координат u^1, u^2 ,

$$\nu_{11} = -Kg_{11}. \quad (17)$$

Оскільки, як відомо [2], згинання поверхні Φ не змінюватиме π_{12} , то, беручи до уваги (16) і (17), переконуємось у справедливості теореми.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. П. Норден. Теория поверхностей. Гостехиздат, 1956.
2. В. Ф. Коган. Основы теории поверхностей, т. II. Гостехиздат, 1948.

С. В. ДЕНИСКО, Е. И. ПРИХОДСКАЯ

Δ -ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ

(резюме)

Пусть $C \rightarrow$ прямолинейная конгруэнция. Повернем каждый луч конгруэнции C вокруг его начала в некоторой плоскости на один и тот же угол φ . Если при этом линейный элемент некоторой линейчатой поверхности конгруэнции C изменится на бесконечно малую выше первого порядка малости относительно φ , то такую поверхность будем называть поверхностью Δ , а ее линию пересечения с опорной поверхностью — линией δ .

Доказываются следующие предложения.

Конгруэнция C не может содержать в себе более двух однопараметрических семейств поверхностей Δ .

Плоскость, проходящая через луч конгруэнции C и касательную к линии δ , перпендикулярна к плоскости вращения луча.

Рассматриваются также специальные поверхности Δ .

Д. В. ГРИЛИЦЬКИЙ, Я. М. КІЗИМА

СУМІСНЕ КРУЧЕННЯ КРУГЛОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО СТЕРЖНЯ І ПІВПРОСТОРУ ДЛЯ ЧАСТИННОГО ВИПАДКУ АНІЗОТРОПІЇ

1. Розглянемо задачу про сумісне кручення круглого циліндричного стержня і півпростору у випадку циліндричної ортотропії. Будемо вважати, що вісь анізотропії стержня збігається з його геометричною віссю і з віссю анізотропії півпростору, а всі радіальні площини і площини, перпендикулярні до осі анізотропії, є площинами пружної симетрії. Матеріали стержня і півпростору вважаємо різними.

Стержень і півпростір зчеплені між собою і перебувають під дією крутильного моменту M , прикладеного до його вільного кінця. На бічній поверхні стержня, а також на поверхні півпростору ззовні стержня навантаження відсутні.

Всі величини, які відносяться до стержня, позначатимемо індексом «1», а ті ж величини для півпростору — індексом «2». Введемо циліндричну систему координат r, θ, z так, щоб площина $z=0$ збіглася з поверхнею півпростору, а вісь z направимо по осі анізотропії всередину стержня.

При такій постановці задачі, згідно з [3], впливає, що, як і в ізотропному випадку [1], відмінними від нуля будуть тільки компоненти тензора напружень $\tau_{\theta z}^{(i)}$ і $\tau_{\theta r}^{(i)}$ ($i=1,2$) і компоненти вектора зміщень $u_{\theta}^{(i)}$ ($i=1,2$), які зв'язані між собою співвідношеннями

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = A_{44}^{(i)} \frac{\partial u_{\theta}^{(i)}}{\partial z}; \quad \tau_{\theta r}^{(i)} = A_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial u_{\theta}^{(i)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(i)}}{r} \right) \quad (i=1, 2), \quad (1.1)$$

де $A_{44}^{(i)}, A_{66}^{(i)}$ — модулі пружності.

Зміщення $u_{\theta}^{(i)}$ в даному випадку, кожне в своїй області, задовольняє рівняння

$$\frac{A_{44}^{(i)}}{A_{66}^{(i)}} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(i)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(i)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(i)}}{r^2} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (1.2)$$

Покладаючи

$$z = \sqrt{\frac{A_{44}^{(i)}}{A_{66}^{(i)}}} z_i, \quad (1.3)$$

згідно з (1.2) одержуємо

$$\frac{\partial^2 u_{\theta}^{(i)}}{\partial z_i^2} + \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(i)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(i)}}{r^2} = 0 \quad (i=1, 2). \quad (1.4)$$

Припустимо, що в перерізі, навантаженому моментом M , зміщення $u_\theta^{(2)}$ міняється вздовж радіуса за лінійним законом, $u_\theta^{(1)} = \varepsilon r$, де ε — кут повороту даного перерізу. Тоді поставлена задача зводиться до розв'язання диференціальних рівнянь (1.4) з такими граничними умовами:

$$u_\theta^{(1)} = \varepsilon r \quad (r \leq a) \quad \text{при} \quad z_1 = \sqrt{\frac{A_{66}^{(1)}}{A_{44}^{(1)}}} L; \quad (1.5)$$

$$u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)}, \quad \tau_{\theta z}^{(1)} = \tau_{\theta z}^{(2)} \quad (r \leq a); \quad (1.6)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = 0 \quad (r > a) \quad \text{при} \quad z_1 = z_2 = 0; \quad (1.7)$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)} = 0 \quad (r_1 = a) \quad \text{при} \quad 0 \leq z_1 \leq L \sqrt{\frac{A_{66}^{(1)}}{A_{44}^{(1)}}}. \quad (1.8)$$

Тут L — довжина стержня, a — його радіус.

2. У випадку стержня для розв'язання диференціального рівняння (1.4) використаємо метод розділення змінних [2]. Взявши частинний розв'язок у вигляді

$$u_\theta^{(1)} = A_0 r z_1 + B_0 r + Z(z_1) R(r) \quad (2.1)$$

і підставивши його в (1.4), для визначення функцій $Z(z_1)$ та $R(r)$ одержуємо звичайні диференціальні рівняння другого порядку, розв'язки яких з врахуванням обмеженості напружень і зміщень при $r=0$ дають для $u_\theta^{(1)}$ такий вираз:

$$u_\theta^{(1)} = A_0 r z_1 + B_0 r + J_1(\lambda r) [A \operatorname{sh}(\lambda z_1) + B \operatorname{ch}(\lambda z_1)]. \quad (2.2)$$

Підставляючи (2.2) в (1.1), для $\tau_{\theta z}^{(1)}$ і $\tau_{\theta r}^{(1)}$ маємо

$$\tau_{\theta z}^{(1)} = A_{44}^{(1)} A_0 r \cdot z_1 + A_{44}^{(1)} \lambda J_1(\lambda r) [A \operatorname{ch}(\lambda z_1) + B \operatorname{sh}(\lambda z_1)], \quad (2.3)$$

$$\tau_{\theta r}^{(1)} = -A_{66}^{(1)} \lambda J_2(\lambda r) [A \operatorname{sh}(\lambda z_1) + B \operatorname{ch}(\lambda z_1)]. \quad (2.4)$$

Тут A_0, A і B_0, B — довільні сталі;

$J_1(\lambda r), J_2(\lambda r)$ — функції Бесселя першого роду;

λ — параметр розділення.

Для знаходження власних значень задачі λ_k використаємо граничну умову (1.8), з якої одержуємо $J_2(\lambda a) = 0$. Значить,

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{a} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.5)$$

де μ_k — корені рівняння $J_2(\mu) = 0$.

Тоді загальний розв'язок для $u_\theta^{(1)}, \tau_{\theta z}^{(1)}$ і $\tau_{\theta r}^{(1)}$ запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} u_\theta^{(1)} &= a^2 A_0 \rho \zeta_1 + a B_0 \rho + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\mu_k \rho) [A_k \operatorname{sh}(\mu_k \zeta_1) + B_k \operatorname{ch}(\mu_k \zeta_1)]; \\ \tau_{\theta z}^{(1)} &= a A_0 A_{44}^{(1)} \rho + \frac{A_{44}^{(1)}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_1(\mu_k \rho) [A_k \operatorname{ch}(\mu_k \zeta_1) + B_k \operatorname{sh}(\mu_k \zeta_1)]; \\ \tau_{\theta r}^{(1)} &= -\frac{A_{66}^{(1)}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_2(\mu_k \rho) [A_k \operatorname{sh}(\mu_k \zeta_1) + B_k \operatorname{ch}(\mu_k \zeta_1)]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тут $\rho = r/a, \zeta_1 = z_1/a$.

Розв'язок рівняння (1.1) у випадку півпростору шукаємо за допомогою трансформанти Ханкеля

$$\bar{u}_{\Theta}^{(2)}(z_2, \xi) = \int_0^{\infty} r \bar{u}_{\Theta}^{(2)}(z_2, r) J_1(\xi r) dr, \quad (2.7)$$

для знаходження якої дістаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$\left(\frac{d^2}{dz_2^2} - \xi^2 \right) u_{\Theta}^{(2)} = 0. \quad (2.8)$$

Тоді

$$\bar{u}_{\Theta}^{(2)} = C \cdot e^{-\xi z_2} + D e^{\xi z_2}. \quad (2.9)$$

Тому що $u_{\Theta}^{(2)}$, а значить і $\bar{u}_{\Theta}^{(2)}$ повинні зникати при $z_2 \rightarrow -\infty$, то $C=0$.
Тоді

$$u_{\Theta}^{(2)} = a \int_0^{\infty} \eta^{-1} \varphi(\eta) e^{\eta z_2} J_1(\eta \rho) d\eta;$$

$$\tau_{\Theta z}^{(2)} = A_{44}^{(2)} \int_0^{\infty} \varphi(\eta) e^{\eta z_2} J_1(\eta \rho) d\eta \quad (-\infty < z_2 < 0); \quad (2.10)$$

$$\tau_{\Theta r}^{(2)} = -A_{66}^{(2)} \int_0^{\infty} \varphi(\eta) e^{\eta z_2} J_2(\eta \rho) d\eta,$$

де $z_2 = \frac{z_2}{a}$, $\varphi(\eta)$ — деяка невідома функція.

3. Для знаходження сталих A_k , B_k і функції $\varphi(\eta)$ маємо граничні умови (1.5)–(1.7) та умови ортогональності функцій Бесселя [2].

Згідно з граничними умовами (1.5)–(1.7), одержуємо

$$\int_0^{\infty} \eta^{-1} \varphi(\eta) J_1(\eta \rho) d\eta = B_0 \rho + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_1(\mu_k \rho) \quad (\rho \leq 1);$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_1(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1); \quad (3.1)$$

$$A_{44}^{(2)} \int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_1(\eta \rho) d\eta = a A_0 A_{44}^{(1)} \rho + \frac{A_{44}^{(1)}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_1(\mu_k \rho) A_k; \quad (3.2)$$

$$a \varepsilon \rho = a^2 A_0 l_1 \rho + a B_0 \rho + \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\mu_k \rho) [A_k \operatorname{sh}(\mu_k l_1) + B_k \operatorname{ch}(\mu_k l_1)]; (\rho \leq 1), \quad (3.3)$$

$$\text{де } l_1 = \frac{L}{a} \sqrt{\frac{A_{66}^{(1)}}{A_{44}^{(1)}}}.$$

Помноживши обидві частини співвідношень (3.2—3.3) послідовно на ρ^2 і на $\rho J_1(\mu_n \rho)$ та проінтегрувавши їх по ρ в межах від 0 до 1, знаходимо сталі A_n і B_n , які визначаються через функцію $\varphi(\eta)$. Після врахування значень B_0 і B_k парні інтегральні рівняння (3.1) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta^{-1} \varphi(\eta) J_1(\eta \rho) d\eta &= \varepsilon \rho - \frac{4l_1 A_{44}^{(2)}}{A_{44}^{(1)}} \rho \int_0^\infty t^{-1} \varphi(t) J_2(t) dt - \\ &- 2 \frac{A_{44}^{(2)}}{A_{44}^{(1)}} \sum_{k=1}^\infty \frac{J_1(\mu_k \rho)}{\mu_k J_1^2(\mu_k)} \operatorname{th}(\mu_k l_1) \int_0^1 x J_1(\mu_k x) dx \int_0^\infty \varphi(t) J_1(tx) dt \quad (\rho \leq 1); \\ \int_0^\infty \varphi(\eta) J_1(\eta \rho) d\eta &= 0 \quad (\rho > 1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Застосувавши формулу обернення [6] до парних інтегральних рівнянь (3.4), для визначення функції $\varphi(\eta)$ дістаємо інтегральне рівняння типу Фредгольма другого роду з виродженим ядром

$$\varphi(\eta) = \frac{4}{\pi} \varepsilon \left[(1 - D_0) \psi_0(\eta) - \sum_{k=1}^\infty \psi_k(\eta) D_k \right]. \quad (3.5)$$

У формулі (3.5) введені позначення:

$$\psi_0(\eta) = \frac{\sin \eta}{\eta} - \cos \eta, \quad \psi_k(\eta) = \int_0^1 \eta \sin \eta y \sin \mu_k y dy; \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{4l_1 A_{44}^{(2)}}{\varepsilon A_{44}^{(1)}} \int_0^\infty t^{-1} \varphi(t) J_2(t) dt; \\ D_k &= \frac{A_{44}^{(2)}}{\varepsilon A_{44}^{(1)}} \frac{\operatorname{th}(\mu_k l_1)}{\mu_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^1 x J_1(\mu_k x) dx \int_0^\infty \varphi(t) J_1(tx) dt \quad (k=1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Величини D_0 і D_k є сталими. Знаючи їх, можна знайти функцію $\varphi(\eta)$, а також сталі A_n і B_n , які визначаються через $\varphi(\eta)$.

Згідно з відомим способом розв'язання інтегрального рівняння з виродженим ядром [4], шляхом підстановки значення $\varphi(\eta)$ з (3.5) в (3.7) для визначення D_0 і D_k одержуємо безмежну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$b_k D_k + \sum_{n=0}^\infty \beta_{kn} D_n = f_k \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (3.8)$$

Тут

$$b_0 = \frac{\pi}{16 l_1} \frac{A_{44}^{(1)}}{A_{44}^{(2)}}, \quad b_k = \frac{\pi}{4} \frac{A_{44}^{(1)}}{A_{44}^{(2)}} \frac{\mu_k J_1^2(\mu_k)}{\operatorname{th}(\mu_k l_1)}; \quad (3.9)$$

$$\beta_{00} = f_0 = \frac{2}{3}, \quad \beta_{k0} = f_k = \frac{1}{\mu_k} \left(\frac{\sin \mu_k}{\mu_k} - \cos \mu_k \right); \quad (3.10)$$

$$\beta_{0n} = 2\beta_{k0}, \quad \beta_{kn} = \frac{\mu_n \sin \mu_k \cos \mu_n - \mu_k \sin \mu_n \cos \mu_k}{\mu_k^2 - \mu_n^2} \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots).$$

За відомими сталими D_n ($n=0, 1, 2, \dots$) зміщення і напруження в стержні визначаються формулами

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(1)} &= a\varepsilon\rho - \frac{a\varepsilon\rho}{l_1} (l_1 - \zeta_1) D_0 - 2\varepsilon a \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\mu_k \rho) \frac{\text{sh } \mu_k (l_1 - \zeta_1)}{\text{sh } \mu_k l_1} D_k; \\ \tau_{\theta z}^{(1)} &= \frac{\varepsilon A_{44}^{(1)}}{l_1} \rho D_0 + 2\varepsilon A_{44}^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_1(\mu_k \rho) \frac{\text{ch } \mu_k (l_1 - \zeta_1)}{\text{sh } \mu_k l_1} D_k; \\ \tau_{\theta r}^{(1)} &= 2\varepsilon A_{66}^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_2(\mu_k \rho) \frac{\text{sh } \mu_k (l_1 - \zeta_1)}{\text{sh } \mu_k l_1} D_k. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Підставляючи значення $\varphi(\eta)$ з (3.5) в (2.10), можна обчислити напруження $\tau_{\theta z}^{(2)}$ і $\tau_{\theta r}^{(2)}$ та зміщення $u_{\theta}^{(2)}$ в будь-якій точці пружного півпростору. Не зупиняючись на обчисленнях, наведемо формули для $u_{\theta}^{(2)}$, $\tau_{\theta z}^{(2)}$ і $\tau_{\theta r}^{(2)}$ в області контакту ($\zeta_2=0$, $\rho \leq 1$), а також для $u_{\theta}^{(2)}$ зовні контакту на поверхні півпростору ($\zeta_2=0$, $\rho > 1$):

$$u_{\theta}^{(2)} = a\varepsilon(1 - D_0)\rho - 2a\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_k J_1(\mu_k \rho) \quad (\rho \leq 1); \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(2)} &= \frac{2a\varepsilon}{\pi} (1 - D_0) \left[\rho \arcsin \frac{1}{\rho} - \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \right] - \frac{4a\varepsilon}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_k \times \\ &\times J_{2n+1}(\rho \mu_k) \left\{ \frac{1}{2n} \sin \left(2n \arcsin \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{2n+2} \sin \left[(2n+2) \arcsin \frac{1}{\rho} \right] \right\} \\ &(\rho > 1); \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(2)} &= \frac{4\varepsilon}{\pi} A_{44}^{(2)} (1 - D_0) \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} - \frac{4\varepsilon}{\pi} A_{44}^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left\{ \frac{1}{\rho \sqrt{1-\rho^2}} [\sin \mu_k - \right. \\ &\left. - (1 - \rho^2) \mu_k \cos \mu_k] - \frac{\mu_k^2}{\rho} \int_{\rho}^1 \sqrt{y^2 - \rho^2} \sin \mu_k y dy \right\} \quad (\rho < 1); \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\tau_{\theta r}^{(2)} = 2\varepsilon A_{66}^{(2)} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \mu_k J_2(\mu_k \rho) \quad (\rho \leq 1). \quad (3.15)$$

Якщо $A_{44}^{(2)} = A_{66}^{(2)} = \infty$, тобто півпростір являє собою абсолютно тверде тіло, то $D_0=1$, $D_k=0$, і тоді, згідно з (3.11), знаходимо

$$u_{\theta}^{(1)} = a\varepsilon \frac{\zeta}{l}, \quad \tau_{\theta z}^{(1)} = A_{44}^{(1)} \frac{\varepsilon}{l_1} \rho, \quad \tau_{\theta r}^{(1)} = 0; \quad \left(\zeta = \frac{z}{a}, \quad l = \frac{L}{a} \right). \quad (3.16)$$

Якщо $A_{44}^{(1)} = A_{66}^{(1)} = \infty$ ($D_0 = D_k = 0$), то, згідно з (3.12) — (3.15), маємо

$$u_{\theta}^{(2)} = a\varepsilon\rho \quad (\rho \leq 1); \quad u_{\theta}^{(2)} = \frac{2a\varepsilon}{\pi} \left[\rho \arcsin \frac{1}{\rho} - \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho} \right] \quad (\rho > 1);$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = \frac{4\varepsilon}{\pi} A_{44}^{(2)} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} \quad (\rho \leq 1); \quad \tau_{\theta r}^{(2)} = 0 \quad (\rho \leq 1). \quad (3.17)$$

Одержані формули при $A_{44}^{(1)} = A_{66}^{(1)} = G_1$, $A_{44}^{(2)} = A_{66}^{(2)} = G_2$, де G_1 , G_2 — модулі зсуву, дають розв'язок задачі про сумісне кручення ізотропних стержня і півпростору. Зокрема, в цьому випадку формули (3.16) є рішенням Кулона задачі про кручення ізотропного стержня [7], а співвідношення (3.17) — рішенням задачі про кручення ізотропного півпростору круглим циліндричним штампом [5].

Щоб визначити кут повороту ε в залежності від прикладеного моменту M , скористаємось формулою

$$M = 2\pi a^3 \int_0^1 \tau_{\theta z}^{(1)} \rho^2 d\rho, \quad (3.18)$$

з якої після підрахунків дістаємо

$$M = \frac{\pi a^3 A_{44}^{(1)} D_0}{2l_1} \varepsilon. \quad (3.19)$$

Очевидно, при визначенні даної залежності замість $\tau_{\theta z}^{(1)}$ можна скористатися значенням $\tau_{\theta z}^{(2)}$ із (3.14). Тоді

$$M = \varepsilon 8 a^3 A_{44}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (1 - D_0) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{\mu_k} \left(\frac{\sin \mu_k}{\mu_k} - \cos \mu_k \right) \right]. \quad (3.20)$$

Співвідношення (3.19) і (3.20) різні за формою, але збігаються за величиною. Слід зазначити, що істотних змін при рішенні задачі не буде, якщо умову (1.5) лінійного розподілу змішень у навантаженому моментом M перерізі замінити умовою лінійного розподілу напружень $\tau_{\theta z}^{(1)}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Х. Арутюнян, Б. А. Абрамян. Кручение упругих тел. Физматгиз, 1963.
2. Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Физматгиз, 1962.
3. С. Г. Лехницкий. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1959.
4. У. В. Ловитт. Линейные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1957.
5. E. Reissner, H. Sagoci. Forced torsional oscillation of an elastic half-space. Journ. of Appl. Phys., v. 15, № 9, 1944.
6. И. Снеддон. Преобразования Фурье. Изд-во иностр. л-ры, 1965.
7. В. И. Феодосьев. Сопротивление материалов. Физматгиз, 1960.

Д. В. ГРИЛИЦКИЙ, Я. М. КИЗЫМА

**СОВМЕСТНОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ
И ПОЛУПРОСТРАНСТВА ДЛЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ АНИЗОТРОПИИ**

(ре з ю м е)

Рассматривается задача о совместном кручении круглого цилиндрического стержня и полупространства при наличии сцепления для случая разных цилиндрически ортотропных материалов. При этом предполагается, что ось анизотропии стержня совпадает с его геометрической осью и с осью анизотропии материала полупространства.

Г. Л. БУЙМОЛА

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ГЕОМЕТРІЇ ГРАФІЧНОЇ ПЛОЩИНИ

Розглянемо «кусок» евклідової площини з основними геометричними елементами в ньому. Будемо називати його площиною α_1 .

Нехай E_1' — множина всіх евклідових точок площини α_1 . Кожній точці A_i' множини E_1' поставимо у взаємно однозначну відповідність впорядковану пару чисел (x_i, y_i) — координати цієї точки. Множину E_2' вказаних пар чисел назовемо арифметичною площиною α_2 .

Якщо кожній точці A_i' множини E_1' в площині α_1 поставимо у взаємно однозначну відповідність «кружечок» A_i сталого, достатньо малого радіуса ω_0 з центром в цій точці, то дістанемо *графічну площину* α як множину E таких «кружечків». Кожний такий «кружечок» ми будемо називати *графічною точкою* і записувати A_i (A_i'), або просто A_i — графічна точка.

Отже, тут можна говорити про взаємно однозначне відображення множини E_1' точок площини α_1 на множину E_2' впорядкованих пар чисел площини α_2 і на множину E графічних точок графічної площини α . Площини α_1 , α_2 , α ми будемо розглядати ніби накладеними одна на одну.

Графічну точку $A(A')$ можна розглядати у деяких випадках також як множину Σ евклідових точок $M_1', M_2', \dots, M_n'$ (поданих у площині α_2 впорядкованими парами чисел $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$), послідовність $\{M_n'\}$ яких буде збіжною до точки $A' \in \Sigma$ (позначимо це $\lim_{n \rightarrow \infty} \{M_n'\} = A'$), якщо віддаль між членами послідовності і точкою A' (границею) починаючи з деякого номера стає меншою від будь-якого наперед заданого додатного числа ω_0 .

Точку A' називають граничною точкою послідовності $\{M_n'\}$. Вона буде центром A' того «кружечка» радіуса ω_0 , який ми назвали графічною точкою A в графічній площині α . Графічній точці A можна також поставити у відповідність впорядковану пару чисел ξ, η , з множини Σ , якщо тільки

$$(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 \leq \omega_0^2.$$

Числа ξ і η назовемо графічними координатами точки A в графічній площині α (вони є координатами точки A' і координати кожної точки $M_i' \simeq (\xi, \eta)$). Крім графічних точок, у графічній площині ми будемо розглядати графічні лінії як «смужки» — геометричні місця графічних точок. Зокрема, кожній евклідовій прямій a' площини α_1 ставиться у взаємно однозначну відповідність деяка «смужка» a , обмежена двома евклідовими паралельними прямими, що знаходяться на сталій, достатньо малій віддалі $2\omega_0$ одна від одної, середньою лінією

якої є дана евклідова пряма a' . Записувати це будемо так: $a(a')$ або a . Цю «смужку» $a(a')$ будемо називати *графічною прямою* в площині α . Аналітично графічну пряму $a(a')$ в евклідовій площині α_1 можна задати як обгортку сім'ї кіл $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \omega_0^2 = 0$, центри яких лежать на даній евклідовій прямій a' (рис. 1, а).

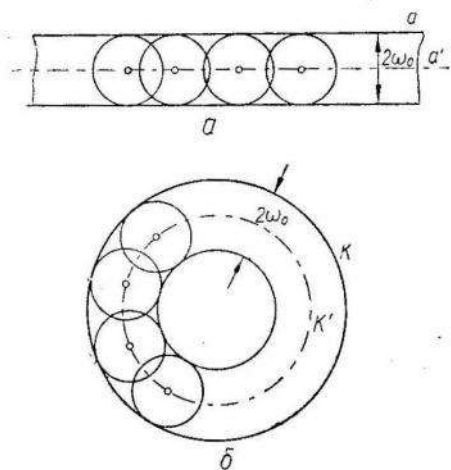


Рис. 1.

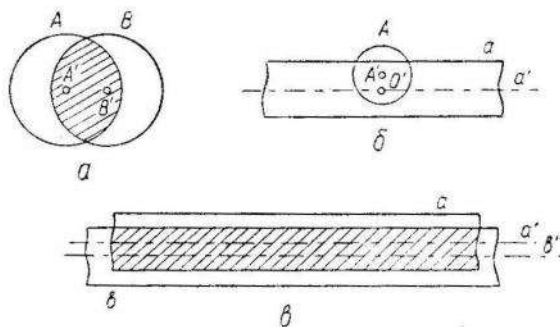


Рис. 2.

Рівняння цієї обгортки можна подати у вигляді

$$Ax + By \mp \sqrt{A^2 + B^2} \omega_0 + C = 0.$$

Графічне коло $k(k')$ можна розглядати в евклідовій площині також як деяку замкнену «смужку», обмежену двома концентричними колами, шириною $2\omega_0$, середньою лінією якої є коло k' (рис. 1, б). Аналітично цю «смужку» можна задати в евклідовій площині як обгортку сім'ї кіл

$$(x-\alpha_1)^2 + (y-\beta_1)^2 - \omega_0^2 = 0,$$

центри яких знаходяться на відповідному евклідовому колі k' : $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$. Рівняння цієї обгортки можна записати у вигляді $(x-a)^2 + (y-b)^2 - (R^2 \pm \omega_0^2) = 0$.

Дві графічні точки A і B будемо називати умовно або графічно інцидентними, якщо віддаль між їх відповідними точками A' і B' в евклідовій площині α_1 менше від ω_0 (рис. 2, а). Інакше, якщо точки A' і B' в евклідовій площині α_1 належать перетинів двох кружечків A і B , що являють собою задані графічні точки. Зокрема, якщо точки A' і B' збігаються, то графічні точки A і B назвемо абсолютно інцидентними. Графічну точку $A(A')$ і графічну пряму $a(a')$ назвемо умовно або графічно інцидентними, якщо віддаль центра «кружечка», що являє собою графічну точку, від середньої лінії «смужки», що являє собою графічну пряму, менша ω_0 , тобто якщо $A'O' < \omega_0$ (рис. 2, б). Інакше, якщо евклідова точка A' і пряма a' належать перетинів двох фігур: T_a — графічної точки і P_a — графічної прямої. Якщо точки A' і O' збігаються, то графічна точка A і пряма a — абсолютно інцидентні.

Дві графічні прямі будуть умовно або графічно інцидентні одна одній, якщо їх відповідні евклідові прямі a' і b' будуть належати одному і тому самому перетинів фігур P_a і P_b (тобто графічних прямих a і b). Якщо $a' \equiv b'$, то графічні прямі a і b будуть абсолютно інцидентними (рис. 2, в).

Три не інцидентні між собою точки лежать на одній графічній прямій, якщо графічні координати їх лінійно залежні між собою. Нехай, наприклад, графічні точки A_i і B_k задані відповідно координатами (x_i, y_i) і (x_k, y_k) . Тоді графічна точка C_j з координатами $[\mu x_i + (1 - \mu)x_k; \mu y_i + (1 - \mu)y_k]$ буде лежати на одній графічній прямій з точками A_i і B_k , бо визначник

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ \mu x_i + (1 - \mu)x_k & \mu y_i + (1 - \mu)y_k & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси випливає, що при зміні μ ($0 \leq \mu \leq 1$) графічна точка C_j описує графічний відрізок $A_i B_k$ (рис. 3). Точці A_i' відповідає значення $\mu=1$, а точці B_k' — $\mu=0$.

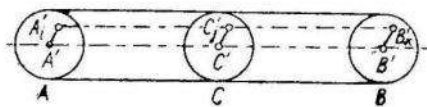


Рис. 3.

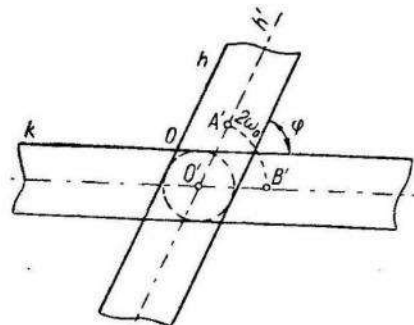


Рис. 4.

Розглядаючи рис. 3, можна зробити такий висновок:

1. Дві задані графічно не інцидентні графічні точки $A(A')$ і $B(B')$ завжди визначають одну і лише одну графічну прямую, абсолютно інцидентну двом даним графічним точкам і множину графічних прямих, графічно інцидентних їм. (Справді, будь-яка евклідова точка A_i' , взята з околу * графічної точки A , і будь-яка евклідова точка B_k' , взята з околу графічної точки B , визначає в евклідовій площині α евклідову прямую $A_i' B_k'$ і, отже, графічну прямую $A_i B_k (A_i' B_k')$, графічно інцидентну точкам A і B).

2. Дві задані неінцидентні графічні точки завжди визначають тільки один графічний відрізок у графічній площині. Він належить будь-якій прямій, що проходить через обидві графічні точки.

Нехай в графічній площині α задані графічні точки $A(\xi, \eta)$ і $B(\gamma, \zeta)$, кожна множиною числових пар (x_i, y_i) і (x_k, y_k) , які знаходяться в околі відповідної точки, тобто задовольняють умову

$$(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2 \leq \omega_0^2 \text{ і } (\gamma - x_k)^2 + (\zeta - y_k)^2 \leq \omega_0^2.$$

Тоді під віддаллю між двома графічними точками $A(\xi, \eta)$ і $B(\gamma, \zeta)$ в графічній площині розуміється величина

$$d(AB) = \sqrt{(\xi - \gamma)^2 + (\eta - \zeta)^2},$$

яка може бути виражена наближено віддаллю між будь-якою евклі-

* Якщо прийняти точку A' за початок деякої декартової системи координат, то тоді множину точок, координати яких задовольняють нерівність $x_i^2 + y_i^2 \leq \omega_0^2$, ми називаємо околом графічної точки $A(A')$.

довою точкою, взятою з околу графічної точки A , і будь-якою евклідовою точкою, взятою з околу графічної точки B , заданих числовими парами (x_i, y_i) і (x_k, y_k) , тобто

$$d(AB) \approx \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}.$$

При цьому ми покладаємо, що всі ці віддалі в певному розумінні тотожні між собою і що $d(AB) = d(BA)$. Якщо графічна точка A графічно інцидентна графічній точці B , то $d(AB) = 0$.

Множина E всіх графічних точок площини α утворює метричний простір Γ , тому що кожній впорядкованій парі її елементів (точок) A і B відповідає число $d(AB)$, що задовольняє умови

1) $d(AA) = 0$, якщо A інцидентна B і $d(AB) > 0$, коли A не інцидентна B ;

2) $d(AB) = d(BA)$;

3) $d(AC) \leq d(AB) + d(BC)$.

Дві графічні півпрямі площини α , абсолютно інцидентні одній і тій самій графічній точці O і графічно не інцидентні одній і тій самій графічній прямій, утворюють графічний кут. Точка O — вершина кута, а півпрямі h і k — його сторони. При цьому повинні виконуватися такі умови:

1) $\angle hk = \angle kh$;

2) $\angle kh \geq \frac{2\omega_0}{r}$, де $2\omega_0$ величина дуги кола радіуса r , центр якого

перебуває в вершині кута O , а $r > \frac{\omega_0}{\sin \frac{\varphi}{2}}$, якщо через φ позначити

кут $\angle hk$ (рис. 4).

Два графічні промені, перетинаючись, утворюють дві пари графічних суміжних кутів. Перетин двох графічних прямих завжди містить хоч би одну графічну точку. Розглянемо такі випадки:

1. Дві графічні прямі графічно інцидентні. В цьому випадку вони визначають смугу інцидентності, що містить нескінченну множину спільних обом прямим графічних точок ($r = \infty$, $\varphi = 0$).

2. Дві графічні прямі перетинаються під кутом $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. В цьому випадку вони визначають «відрізок перетину» двох графічних прямих, що містять скінченне число графічно не інцидентних точок і нескінченну множину графічно інцидентних графічних точок. Очевидно, що «відрізок перетину» змінюється зі зміною кута φ . Зокрема, дві графічні прямі, перетинаючись під прямим кутом $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, визначають

лише одну графічну точку, що міститься всередині квадрата із стороною, рівною $2\omega_0$. Всякий «геометричний образ» у графічній площині ми будемо розглядати як деяку сукупність (множину) графічних точок або графічних точок і ліній. Всі теореми геометрії графічної площини являють собою належним чином витлумачені теореми евклідової геометрії, оскільки графічні точки, графічні лінії графічної площини є евклідові об'єкти.

Будуючи цю геометрію, ми виходимо з таких припущень.

1. Існує графічна площина, в межах якої вкладаються всі виконувані нами графічні побудови (наприклад, лист креслярського паперу, де ми виконуємо різні креслення).

2. Через дві графічно не інцидентні графічні точки A і B можна провести тільки одну графічну пряму, абсолютно інцидентну цим точкам. (Як теорему можна довести, що через ці дві графічні точки A і B проходить безліч графічних прямих, умовно інцидентних їм, і тільки один графічний відрізок, що ними визначається).

3. Дві графічно не інцидентні графічні прямі, перетинаючись, можуть мати лише одну спільну абсолютно інцидентну їм графічну точку (в якій вони перетинаються одна з одною). В особливих випадках (коли вони утворюють малий кут) вони можуть мати перетин як сукупність декількох графічних точок («відрізок перетину»).

Аналогічно два дотичні графічні кола або графічне коло і дотична до нього графічна пряма мають не одну спільну точку дотику, а сукупність графічних точок дотику — «відрізок дотику». Ці припущення контролюються досвідом і узгоджуються з ним.

Поняття «між» також вимагає деяких обмежень у графічній площині через існування в ній графічно інцидентних точок. Графічну точку A_2 не можна відрізнити від графічних точок A_1 і A_3 на графічній прямій a , якщо вона знаходиться «між» графічними точками A_1 і A_3 , що знаходяться одна від одної на віддалі $d < \omega_0$, тобто, якщо вона знаходиться «між» двома умовно інцидентними графічними точками A_1 і A_3 .

Звідси випливає, що і поділ графічного відрізка на частини в графічній площині не можна продовжувати нескінченно.

4. Кожний графічний відрізок може бути поділений навпіл, але поділ цей не можна продовжувати нескінченно, а лише доти, доки графічні точки — кінці наново збудованого графічного відрізка не стануть графічно інцидентними.

Отже, якщо графічні точки A_1 і A_2 графічно інцидентні, то «між» ними уже немає графічно не інцидентних точок. Такі дві точки відрізка не визначають.

Поняття конгруентності, неперервності і паралельності в геометрію графічної площини можна ввести на базі деяких властивостей руху, а саме — зсуву і обертавання, що здійснюються за допомогою лінійки, косинця і циркуля.

Рух в графічній площині α ми називаємо зсувом (або переносним рухом) вздовж деякої графічної прямої $a(a')$, якщо задовольняються такі умови.

1. Кожна графічна точка графічної прямої $a(a')$ зміщується, причому залишається весь час графічно інцидентною цій самій прямій.

2. Кожна графічна точка площини α , в якій лежить графічна пряма $a(a')$, залишається на площині α по той самий бік від прямої $a(a')$, що і була. Якщо повторювати декілька разів один і той же зсув, то деяка графічна точка A буде переходити в графічні точки $A_1, A_2, \dots$ графічної прямої A_1A_2 . Як аксіому приймемо, що ці точки можуть зрештою досягти або пересягнути довільну точку цієї прямої.

Уявляючи, що будь-який зсув із початкового положення в кінцеве відбувається неперервно, ми називаємо прямою, що тут розглядаємо, траєкторією графічної точки A при цьому переносному русі. Відомо, що дві різні траєкторії одного і того ж переносного руху не можуть перетинатися. Тому всім траєкторіям одного і того ж переносного руху дають назву паралельних прямих (наприклад, при зсуві косинця вздовж лінійки його точки описують паралельні прямі).

Приймаємо також як аксіому щодо переносного руху, що будь-які два зсуви T і T' підлягають комутативному закону: $TT' = T'T$.

Наведені аксіоми узгоджуються з практичними операціями косинцем та лінійкою в кресленні.

Характеризуємо тепер рух, що залишає без змін деяку графічну точку графічної площини, наприклад точку O , що залишається на місці. Це буде так зване обертання навколо цієї точки. При цьому припускається, що існує тільки один рух, який переводить промінь a , що виходить з точки O , в будь-який другий промінь a_1 , що також виходить з тієї ж точки O . Усі обертання уявляють собі здійсненими неперервно, виходячи з певного початкового положення. При цьому рухові кожна графічна точка описує траєкторію, що зветься графічним колом. Тут теж як аксіому слід прийняти таке твердження:

Промені $a, a_1, a_2, \dots$, що дістаємо з променя a при повторенні одного і того ж обертання, повинні зрештою або досягти або пересягнути всяку півпрямую, що виходить з точки O . Тому, зокрема, неперервне обертання повинне зрештою привести промінь a в його початкове положення, причому і кожна точка A цього променя повернеться в своє початкове положення. Отже, траєкторії являтимуть собою замкнені лінії, що зустрічають кожен промінь, який виходить з точки O , в одній графічній точці A , так що відрізки OA накладаються один на другий.

Тепер ми можемо дати визначення конгруентності відрізків і кутів.

Два графічні відрізки AB і A_1B_1 будемо називати графічно конгруентними або рівними, якщо існує рух, який приводить ці відрізки в інцидентне положення, тобто графічну точку A переводить в графічну точку A_1 , а графічну точку B — в графічну точку B_1 . Інакше: два графічні відрізки AB і A_1B_1 графічно конгруентні, якщо при накладанні одного з них на другий графічна точка A стане графічно інцидентною графічній точці A_1 , а графічна точка B — графічно інцидентною графічній точці B_1 .

Аналогічно визначається і графічна конгруентність кутів. Кут, рівний своєму суміжному, зветься прямим. Припускається також, що всі графічні прямі кути рівні між собою. Це припущення дозволяє в графічній площині будувати, з допомогою лінійки і прямого кута (косинця), взаємно перпендикулярні прямі.

Із сказаного можна зробити висновок, що графічна площина допускає сукупність рухів, транзитивну відносно лінійних елементів. Отже, вона має свою внутрішню геометрію, яку можна належним чином обгрунтувати.

Г. Л. БУЙМОЛА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ГРАФИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

(ре з ю м е)

Каждой точке A_i' множества E_1' евклидовых точек куска евклидовой плоскости ставится во взаимно однозначное соответствие «кружочек» A_i постоянного достаточно малого радиуса ω_0 с центром в этой точке и называется графической точкой.

Множество E таких графических точек называется графической плоскостью. Графической прямой называется «полоска», рассматриваемая как геометрическое место графических точек. Каждой евклидовой прямой a' ставится в соответствие полоска a шириной $2\omega_0$.

Вводятся понятия графической и абсолютной инцидентности графических точек и прямых, понятия графического отрезка и угла. Рассматриваются некоторые вопросы аксиоматики геометрии графической плоскости.

С. П. ГАВЕЛЯ, В. М. КОСАРЧИН

ПРО ОДИН СПОСІБ РОЗРАХУНКУ СКІНЧЕННО ДЕФОРМОВАНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

В роботах [1—2] запропоновано спосіб застосування методу Я. Б. Лопатинського [3] до розв'язання лінійних статичних задач теорії пологих оболонок. Тут цей спосіб поширюється на випадок, коли в системі диференціальних рівнянь, що описує їх пружну рівновагу, беруться до уваги також і нелінійні члени, які походять від прогинів [4, стор. 475].

Відносно координат $u_1 = u_1(x)$, $u_2 = u_2(x)$ та $w = w(x)$ вектора зміщень така система рівнянь з допомогою матричних позначень, що вживаються в [3]),

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \quad \partial = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}; \quad \partial' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

$$\Delta = \partial' \partial = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

може бути записана у вигляді

$$\Delta u = \Phi(u, w); \tag{1}$$

$$\Delta \Delta w + \lambda^4 w = F(x; u, w). \tag{2}$$

Тут

$$\Phi(u, w) = \bar{\Phi}(u, w) + \tilde{\Phi}(w);$$

$$F(x; u, w) = \bar{F}(x; u, w) + \tilde{F}(u, w);$$

$$\bar{\Phi}(u, w) = \kappa \Delta u - 2\kappa \partial \partial' u - 4\kappa \partial_k w;$$

$$\bar{F}(x; u, w) = \frac{12(1 - \sigma^2)}{Eh^3} Z - \frac{12}{h^3} \partial'_k u;$$

$$\tilde{\Phi}(w) = -[(1 - \kappa) \Delta + 2\kappa \partial \partial'] w \partial' w;$$

$$\tilde{F}(u, w) = \frac{6}{h^2} \left\{ 2(1 - \sigma) \left(\partial' \frac{\partial w}{\partial x_1} \partial u_1 + \partial' \frac{\partial w}{\partial x_2} \partial u_2 \right) + 2\sigma \Delta w \partial' u + \sigma \Delta w \partial' w \partial w + \right.$$

$$\left. + (\partial' w \partial)^2 w + (1 + \sigma) (\partial'_k w \partial w + w \partial'_k w \partial w) \right\};$$

$$\partial_k = \begin{pmatrix} \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}; \quad \partial'_k = \left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$\lambda^4 = \frac{12}{h^2} (k_1^2 + k_2^2 + 2\sigma k_1 k_2);$$

$$\sigma_1 = \frac{k_1 + \sigma k_2}{1 + \sigma}; \quad \sigma_2 = \frac{k_2 + \sigma k_1}{1 + \sigma}; \quad \alpha = \frac{1 + \sigma}{3 - \sigma};$$

x_1, x_2 — криволінійні координати точки x серединної поверхні оболонки, Z — нормальна складова зовнішнього навантаження, E та σ — модуль Юнга та коефіцієнт пружності матеріалу відповідно, h — товщина оболонки, k_1, k_2 — її головні кривизни, які з огляду на відоме припущення В. З. Власова [4, стор. 437] з достатньою точністю можна вважати постійними.

1. ШАРНІРНЕ ЗАКРІПЛЕННЯ ПРЯМОКУТНОГО КОНТУРА

Розглянемо спочатку випадок, коли оболонка заповнює в площині криволінійних координат її серединної поверхні прямокутну ($-\alpha_1 \leq x_1 \leq \alpha_1, -\alpha_2 \leq x_2 \leq \alpha_2$) область Ω , на контурі S якої будемо вважати виконаними умови шарнірного закріплення

$$u|_S = 0; \quad (3)$$

$$w|_S = 0; \quad \Delta w|_S = 0. \quad (4)$$

При відсутності нелінійних членів ($\tilde{\Phi} \equiv 0, \tilde{F} \equiv 0$) розв'язок задачі (1), (2), (3), (4) можна визначити за такою, аналогічною побудованій в [1], ітераційною схемою:

$$u = \lim_{l \rightarrow \infty} u^{(l)}; \quad w = \lim_{l \rightarrow \infty} w^{(l)};$$

$$u^{(l)} = u^{(l)}(x) = \sum_{l, m=1}^{\infty} u_{lm}^{(l)} \omega_l^2(x_1) \omega_m^2(x_2);$$

$$w^{(l)} = w^{(l)}(x) = \sum_{l, m=1}^{\infty} w_{lm}^{(l)} \omega_l^2(x_1) \omega_m^2(x_2);$$

$$\omega_k^1(x_j) = \cos \frac{k\pi}{2} \left(\frac{x_j}{\alpha_j} + 1 \right); \quad \omega_k^2(x_j) = \sin \frac{k\pi}{2} \left(\frac{x_j}{\alpha_j} + 1 \right);$$

$$u_{jlm}^{(l)} = \frac{4\alpha_1^2 \alpha_2^2 \Phi_{jlm}^{l-1}}{\pi^2 (l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2)}; \quad (j = 1, 2) \quad (5)$$

$$w_{lm}^{(l)} = \frac{16\alpha_1^4 \alpha_2^4 \bar{F}_{lm}^{(l)}}{\pi^4 (l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2)^2 + 16\alpha_1^4 \alpha_2^4 \lambda^4}; \quad (6)$$

$$\Phi_{1lm}^{(l)} = \frac{\pi^2 (l^2 \alpha_2^2 - m^2 \alpha_1^2)}{4\alpha_1^2 \alpha_2^2} u_{1lm}^{(l)} - \sum_{rs} \frac{\pi^2 rs}{2\alpha_1 \alpha_2} \gamma_{rl} \gamma_{sm} u_{2rs}^{(l)} - 2\sigma_1 \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_1} \gamma_{rl} w_{rm}^{(l)}; \quad (7)$$

$$\Phi_{2lm}^{(l)} = \frac{\pi^2 (m^2 \alpha_1^2 - l^2 \alpha_2^2)}{4\alpha_1^2 \alpha_2^2} u_{2lm}^{(l)} - \sum_{rs} \frac{\pi^2 rs}{2\alpha_1 \alpha_2} \gamma_{rl} \gamma_{sm} u_{1rs}^{(l)} - 2\sigma_2 \sum_s \frac{\pi s}{\alpha_2} \gamma_{sm} w_{ls}^{(l)}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{lm}^{(i)} = & \frac{12(1-\sigma^4)}{Eh^3} Z_{lm} - \frac{\sigma}{h^2} (k_1 + \sigma k_2) \sum_r \frac{\pi r}{\alpha_1} \gamma_{rl} u_{lr m}^{(i)} - \\ & - \frac{\sigma}{h^2} (k_2 + \sigma k_1) \sum_s \frac{\pi s}{\alpha_2} \gamma_{sm} u_{2ls}^{(i)};\end{aligned}\quad (9)$$

$$Z(x) = \sum_{lm} Z_{lm} \omega_l^2(x_1) \omega_m^2(x_2); \quad \omega_k^1(x_j) = \sum_n \gamma_{kn} \omega_n^2(x_j).$$

З огляду на незначний вплив величин $\tilde{\Phi}(\omega)$, $\bar{F}(u, \omega)$ при достатньо малому навантаженні Z урахування нелінійних членів, очевидно, може бути досягнуте шляхом вживання у формулах (5), (6) замість $\Phi_{jlm}^{(i-1)}$ та $\bar{F}_{lm}^{(i)}$ відповідно

$$\Phi_{jlm}^{(i-1)} = \bar{\Phi}_{jlm}^{(i-1)} + \tilde{\Phi}_{jlm}^{(i-1)}; \quad F_{lm}^{(i)} = \bar{F}_{lm}^{(i)} + \tilde{F}_{lm}^{(i-1)},$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{1lm}^{(i)} = & \frac{-\pi^3}{8\alpha_1^3 \alpha_2^2} \sum_{pqkn} \omega_{pq}^{(i)} \omega_{kn}^{(i)} \{2\alpha_1^2 pqn \theta_{pkl}^{12} \theta_{qnm}^{11} - [(1+x)\alpha_2^2 p^2 + \\ & + (1-x)\alpha_1^2 q^2] k G_{pkl}^{21} \theta_{qnm}^{22}\};\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{2lm}^{(i)} = & \frac{-\pi^3}{8\alpha_1^2 \alpha_2^3} \sum_{pqkn} \omega_{pq}^{(i)} \omega_{kn}^{(i)} \{2\alpha_2^2 pqk \theta_{pkl}^{11} \theta_{qnm}^{12} - [(1-x)\alpha_2^2 p^2 + \\ & + (1+x)\alpha_1^2 q^2] n \theta_{pkl}^{22} \theta_{qnm}^{21}\};\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{lm}^{(i)} = & \frac{\pi^2}{8\alpha_1^3 \alpha_2^3} \sum_{pqkn} \omega_{pq}^{(i)} \{v_{3kn}^{(i)} 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 pq \theta_{pkl}^{12} \theta_{qnm}^{12} + \\ & + v_{1kn}^{(i)} 2\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2^2 p^2 + \alpha_1^2 q^2) \theta_{pkl}^{21} \theta_{qnm}^{21} + v_{2kn}^{(i)} 2\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2^2 p^2 + \alpha_1^2 q^2) \theta_{pkl}^{21} \theta_{qnm}^{21} + \\ & + u_{1kn}^{(i)} \pi \alpha_2 (\alpha_2^2 p^2 + \alpha_1^2 q^2) \theta_{pkl}^{21} \theta_{qnm}^{22} + u_{2kn}^{(i)} \pi \alpha_1 (\alpha_2^2 p^2 + \alpha_1^2 q^2) \theta_{pkl}^{22} \theta_{qnm}^{21} + \\ & + u_{1kn}^{(i)} \pi \alpha_1^2 \alpha_2 pqn \theta_{pkl}^{12} \theta_{qnm}^{11} + u_{2kn}^{(i)} \pi \alpha_1 \alpha_2^2 pqk \theta_{pkl}^{11} \theta_{qnm}^{12} + \\ & + \omega_{kn}^{(i)} \alpha_1 \alpha_2^3 (k_1 + \sigma k_2) pk \theta_{pkl}^{11} \theta_{qnm}^{22} + \omega_{kn}^{(i)} \alpha_1^3 \alpha_2 (k_2 + \sigma k_1) qn \theta_{pkl}^{22} \theta_{qnm}^{11} + \\ & + \omega_{kn}^{(i)} 2\alpha_1 \alpha_2 (1 + \sigma) (\sigma_1 \alpha_2^2 p^2 + \sigma_2 \alpha_1^2 q^2) \theta_{pkl}^{22} \theta_{qnm}^{22}\}.\end{aligned}\quad (12)$$

При цьому

$$\begin{aligned}v_{1lm}^{(i)} = & \frac{\pi^2}{4\alpha_1^2} \sum_{pqkn} \omega_{pq}^{(i)} \omega_{kn}^{(i)} pk \bar{\theta}_{pkl}^{11} \bar{\theta}_{qnm}^{22}; \\ v_{2lm}^{(i)} = & \frac{\pi^2}{4\alpha_2^2} \sum_{pqkn} \omega_{pq}^{(i)} \omega_{kn}^{(i)} qn \bar{\theta}_{pkl}^{22} \bar{\theta}_{qnm}^{11}; \\ v_{3lm}^{(i)} = & \frac{\pi^2}{4\alpha_1^2 \alpha_2^2} \sum_{pqkn} \omega_{pq}^{(i)} \omega_{kn}^{(i)} pn \theta_{pkl}^{12} \theta_{qnm}^{21};\end{aligned}\quad (13)$$

$$\omega_k^i(x) \omega_l^j(x) = \sum_n \theta_{kln}^{ij} \omega_n^2(x) = \sum_n \bar{\theta}_{kln}^{ij} \omega_n^1(x).$$

Так що

$$\begin{aligned}
 2\Theta_{kln}^{11} &= \gamma_{k-l, n} + \gamma_{k+l, n}; \\
 2\Theta_{kln}^{22} &= \gamma_{k-l, n} - \gamma_{k+l, n}; \\
 2\Theta_{kln}^{12} &= \delta(l-k-n) + \delta(l+k-n); \\
 2\Theta_{kln}^{21} &= \delta(k-l-n) + \delta(k+l-n); \\
 2\bar{\Theta}_{kln}^{11} &= \delta(k-l-n) + \delta(k+l-n); \\
 2\bar{\Theta}_{kln}^{22} &= \delta(k-l-n) - \delta(k+l-n);
 \end{aligned} \tag{14}$$

якщо

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0; \\ 0 & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

З формул (14) легко бачити, що реалізація визначення величин Θ_{klm}^{ij} та $\bar{\Theta}_{klm}^{ij}$ за допомогою логічних операцій дозволяє уникнути небажаного завантаження оперативної пам'яті ЕЦОМ.

2. ВИПАДОК КРИВОЛІНІЙНОГО КОНТУРА

Нехай тепер контур S заповнюваної оболонкою області Ω — крива $\xi = \xi(t)$ ($\xi_1 = \xi_1(t)$, $\xi_2 = \xi_2(t)$, $0 \leq t < 2\pi$), що задовольняє умови Ляпунова. Як і в [2], у цьому випадку доречно застосувати інтегральні рівняння. Припустимо, наприклад, заданими граничні умови жорсткого зацімлення.

$$u_{|S} = 0; \tag{15}$$

$$\omega_{|S} = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial n_{|S}} = 0. \tag{16}$$

При розв'язанні допоміжної задачі (15) для рівняння $\Delta u = \Phi$ можна скористатися побудованим в [2] алгоритмом:

$$u(x) = u^0(x) - \int_0^{2\pi} g(x, \xi(t)) \mu(t) dt; \tag{17}$$

$$g(x, \xi) = \sum_{lm} g_{lm} \omega_l(x_1) \omega_m(x_2) \omega_l(\xi_1) \omega_m(\xi_2);$$

$$g_{lm} = \frac{-4\alpha_1 \alpha_2}{\pi^2 (l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2)}; \quad u^0(x) = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} g(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi_1 d\xi_2.$$

При цьому густина $\mu(t)$ потенціалу (17) визначається рівнянням

$$u^0(x(t)) = \int_0^{2\pi} g(x(t), \xi(\tau)) \mu(\tau) d\tau. \tag{18}$$

Розв'язуючи другу допоміжну задачу (16) для рівняння $\Delta\Delta w + \lambda^4 w = F$, зручно вжити потенціальне зображення

$$w(x) = w^0(x) + \int_S G(x, \xi) \frac{\partial \Delta w(\xi)}{\partial \nu} d\xi - \int_S \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \nu \xi} \Delta w(\xi) d\xi, \quad (18')$$

де

$$G(x, \xi) = \sum_{lm} G_{lm} \omega_l(x_1) \omega_m(x_2) \omega_l(\xi_1) \omega_m(\xi_2);$$

$$G_{lm} = \frac{16\alpha_1^3 \alpha_2^3}{\pi^4 (l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2)^2 + 16\alpha_1^4 \alpha_2^4 \lambda^4};$$

$$w^0(x) = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} G(x, \xi) F(\xi) d\xi_1 d\xi_2; \quad \frac{dS}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} = -\frac{d\xi_2}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{d\xi_1}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_2}.$$

Якщо S — контур отвору в оболонці, потенціал (18) приводить до системи інтегральних рівнянь

$$w^0(x(t)) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(x(t)_1, \xi(\tau))}{\partial \nu} \mu^1(\tau) d\tau - \int_0^{2\pi} G(x(t)_1, \xi(\tau)) \mu^2(\tau) d\tau;$$

$$3\mu^1(t) = 2\Delta w^0(x(t)) - 2 \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Delta G(x(t)_1, \xi(\tau))}{\partial \nu} \mu^1(\tau) d\tau + 2 \int_0^{2\pi} \Delta G(x(t)_1, \xi(\tau)) \mu^2(\tau) d\tau,$$

де

$$\mu^1(\tau) = \Delta w(\xi(\tau));$$

$$\mu^2(\tau) = \frac{\partial \Delta w(\xi(\tau))}{\partial \nu} \cdot \frac{dS}{d\tau}.$$

Припустивши для спрощення наступних формул, що область Ω та навантаження Z симетричні відносно координатних осей, замість виразів (5), (6) в розглядуваному тепер випадку криволінійного контура оболонки матимемо

$$u_{jlm}^{(i)} = g_{lm} \left(\alpha_1 \alpha_2 \Phi_{jlm}^{(i)} + \sum_k P_{lmk} \delta_k \mu_{jk}^{(i)} \right); \quad (19)$$

$$w_{lm}^{(i)} = G_{lm} \left\{ \alpha_1 \alpha_2 F_{lm}^{(i)} + \sum_k \delta_k (P_{lmk} \mu_k^{2(i)} - T_{lmk} \mu_k^{1(i)}) \right\}, \quad (20)$$

де $\mu_{jk}^{(i)}$ та $\mu_k^{j(i)}$ визначаються системами рівнянь

$$\sum_{lmk} \frac{P_{lmn} P_{lmk}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} \mu_{lk}^{(i)} = \sum_{lm} \frac{\alpha_1 \alpha_2 P_{lmn}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} \Phi_{lm}^{(i)},$$

$$\sum_{lmk} \frac{Q_{lmn} Q_{lmk}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} \mu_{2k}^{(i)} = \sum_{lm} \frac{\alpha_1 \alpha_2 Q_{lmn}}{l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2} \Phi_{lm}^{(i)},$$

$$3\mu_n^{(l)} + 2 \sum_{lmk} G_{lm} \Delta_{lm} P_{lmn} T_{lmk} \delta_k \mu_k^{1(l)} - 2 \sum_{lmk} G_{lm} \Delta_{lm} P_{lmn} P_{lmk} \delta_k \mu_k^{2(l)} =$$

$$= 2 \sum_{lm} \alpha_1 \alpha_2 G_{lm} \Delta_{lm} P_{lmn} F_{lm}^{(l)};$$

$$\sum_{lmk} G_{lm} P_{lmn} T_{lmk} \delta_k \mu_k^{1(l)} - \sum_{lmk} G_{lm} P_{lmn} P_{lmk} \delta_k \mu_k^{2(l)} = \sum_{lm} \alpha_1 \alpha_2 G_{lm} P_{lmn} F_{lm}^{(l)}.$$

Тут

$$\Delta_{lm} = -\frac{\pi^2}{4\alpha_1^2 \alpha_2^2} (l^2 \alpha_2^2 + m^2 \alpha_1^2);$$

$$\delta_k = \begin{cases} 2 & \text{при } k=0; \\ 1 & \text{при } k>0; \end{cases} \quad l, m = 1, 3, 5, 7, \dots$$

P_{lmk} , Q_{lmk} та T_{lmk} — коефіцієнти розкладів;

$$\omega_l(\xi_1(t)) \omega_m(\xi_2(t)) = \frac{1}{\pi} \sum_k (P_{lmk} \cos kt + Q_{lmk} \sin kt);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [\omega_l(\xi_1(t)) \omega_m(\xi_2(t))] \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\pi} \sum_k (T_{lmk} \cos kt + \bar{T}_{lmk} \sin kt).$$

Таким чином, формули (19), (20), (7), (8), (9), (10), (11), (12) та (13) становлять ітераційний алгоритм розв'язання задачі (1), (2), (15), (16). Оскільки умови (3) (4) при цьому також виконуються, можна вважати, що область Ω являє собою прямокутник з одним або кількома отворами. Випадок внутрішніх задач для областей з криволінійними контурами відрізняється від розглянутого незначно.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. П. Гавеля, В. Н. Косарчин. Упругое равновесие пологой сферической оболочки, жестко защемленной по прямоугольному контуру. Вопросы механики реального твердого тела. Изд-во «Наукова думка», К., 1964.
2. С. П. Гавеля, В. М. Косарчин. Пружна рівновага пологої сферичної оболонки, обмеженої еліпсом і прямокутником. Зб. робіт аспірантів ЛДУ, 1963.
3. Я. Б. Лопатинский. Об одном методе решения второй основной задачи теории упругости. Теор. и прикл. математика, вып. 1, 1958.
4. В. З. Власов. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.

С. П. ГАВЕЛЯ, В. Н. КОСАРЧИН

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РАСЧЕТА КОНЕЧНОДЕФОРМИРУЕМЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

(резюме)

Построен алгоритм нахождения перемещений тонкой полой оболочки с учетом нелинейных членов, происходящих только от прогибов. Эффективность алгоритма достигается посредством распространения некоторых результатов Я. Б. Лопатинского, позволяющего привести задачу к рекуррентным задачам Дирихле, решаемым с помощью интегральных уравнений.

Конкретно рассмотрен случай, когда оболочка заполняет в плоскости криволинейных координат ее срединной поверхности прямоугольник с эллиптическим отверстием. На контуре прямоугольника выполнены условия шарнирного закрепления, край отверстия защемлен. Возможны и другие варианты граничных условий и форм отверстия.

Решение представляется в двойных тригонометрических рядах.

З. В. ЗАРИЦЬКА

ЗОБРАЖЕННЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ У ВИГЛЯДІ ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ ОПЕРАТОРІВ

Питання про наближення функцій $f(x, y)$ за допомогою операторів

$$B_{nm}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k f\left(\frac{k-i}{n}, \frac{i}{m}\right) C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} x^{k-i} y^i \quad (1)$$

у випадку, коли $f(x, y)$ є неперервною, розглянуте В. І. Волковим [1]. Лінійні додатні оператори (1) є узагальненням на двовимірний простір лінійних додатних операторів В. А. Баскакова [2]. При цьому для системи функцій $\varphi_{nm}(x, y)$ виконуються умови:

1) функції $\varphi_{nm}(x, y)$ аналітичні в замкненому прямокутнику $\{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}$;

2) $\varphi_{nm}(0, 0) = 1$;

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} &= -n \left[\frac{\partial^{k-1} \varphi_{n,m}(x, y)}{\partial x^{k-1-i} \partial y^i} + \alpha_{nk}(x, y) \right] = \\ &= -m \left[\frac{\partial^{k-1} \varphi_{nm,1}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{i-1}} + \beta_{mk}(x, y) \right]; \end{aligned}$$

$$|\alpha_{nk}(x, y)| \leq \alpha_n, \quad \alpha_n \rightarrow 0, \quad |\beta_{mk}(x, y)| \leq \beta_m, \quad \beta_m \rightarrow 0;$$

$$4) \quad \frac{n_1}{n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty; \quad \frac{m_1}{m} \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty;$$

$$5) \quad (-1)^k \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \geq 0$$

для всіх k та i , що задовольняють нерівності $0 \leq i \leq k$.

Розглядаючи оператори

$$\begin{aligned} A_{nm}(f; x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \times \\ &\times x^{k-i} y^i \left(nm \int_{\frac{k-i}{n} - \frac{1}{2n}}^{\frac{k-i}{n} + \frac{1}{2n}} dt \int_{\frac{i}{m} - \frac{1}{2m}}^{\frac{i}{m} + \frac{1}{2m}} f(t, v) dv \right), \end{aligned} \quad (2)$$

одержані з (1) за схемою Л. В. Канторовича [3], доведемо, що послідовність (2) збігається до $f(x, y)$ у кожній точці Лебега функції $f(x, y)$.

Означення. Точку (x, y) назовемо точкою Лебега функції $f(x, y)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при $0 < h < \delta$, $0 < k < \delta$ буде виконуватися нерівність

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dt \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} |f(t+x, v+y) - f(x, y)| dv < \varepsilon h k.$$

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ вимірна і обмежена на $[0, 1; 0, 1]$, а на весь перший квадрант продовжена так, що залишається всюди обмеженою і вимірною в кожному квадраті, то для послідовності операторів (2), у кожній точці Лебега функції $f(x, y)$ з квадрату $[0, 1; 0, 1]$ має місце рівність

$$\lim_{(n, m)_k \rightarrow \infty} A_{nm}(f; x, y) = f(x, y)$$

(символ $(n, m)_k$ означає пару (n, m) , що задовольняє умову $\frac{1}{k} \leq \frac{m}{n} \leq k$, k — дане додатне число, більше від 1).

Доведення. Оскільки функція $f(x, y)$ обмежена, то існує таке $M > 0$, що в усьому першому квадранті $|f(x, y)| \leq M$.

Нехай $(x_0, y_0) \in [0, 1; 0, 1]$ — точка Лебега функції $f(x, y)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ можна знайти $\delta > 0$ таке, що як тільки $\frac{1}{n} \leq \delta$, $\frac{1}{m} \leq \delta$, то

$$\int_{\frac{k-l}{n} - \frac{1}{2n}}^{\frac{k-l}{n} + \frac{1}{2n}} dt \int_{\frac{l}{m} - \frac{1}{2m}}^{\frac{l}{m} + \frac{1}{2m}} |f(t, v) - f(x_0, y_0)| dv < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{nm}, \quad (3)$$

де $|t - x_0| \leq \delta$, $|v - y_0| \leq \delta$.

Оцінимо різницю

$$\begin{aligned} |A_{nm}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| &< \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^k C_k^l \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-l} \partial y^l} \times \\ &\times x_0^{k-l} y_0^l \cdot mn \int_{\frac{k-l}{n} - \frac{1}{2n}}^{\frac{k-l}{n} + \frac{1}{2n}} dt \int_{\frac{l}{m} - \frac{1}{2m}}^{\frac{l}{m} + \frac{1}{2m}} |f(t, v) - f(x_0, y_0)| dv \leq \\ &\leq \sum^1 + \sum^2 + \sum^3 + \sum^4 \quad (4) \\ &\left| \frac{k-l}{n} - x_0 \right| < \frac{\delta}{2} \quad \left| \frac{k-l}{n} - x_0 \right| > \frac{\delta}{2} \quad \left| \frac{k-l}{n} - x_0 \right| < \frac{\delta}{2} \quad \left| \frac{k-l}{n} - x_0 \right| > \frac{\delta}{2} \\ &\left| \frac{l}{m} - y_0 \right| < \frac{\delta}{2} \quad \left| \frac{l}{m} - y_0 \right| > \frac{\delta}{2} \quad \left| \frac{l}{m} - y_0 \right| < \frac{\delta}{2} \quad \left| \frac{l}{m} - y_0 \right| > \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Внаслідок (3) і умови (2) маємо:

$$\sum^1 \leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^k C_k^l \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-l} \partial y^l} \cdot x_0^{k-l} y_0^l = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Оскільки у першому квадранті $f(x, y)$ обмежена, то

$$\begin{aligned} \sum^2 &\leq 2M \sum_{\substack{\left| \frac{k-1}{n} - x_0 \right| > \frac{\delta}{2} \\ \left| \frac{l}{m} - y_0 \right| > \frac{\delta}{2}}} \sum \frac{(-1)^k}{k!} C_k^l \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-l} \partial y^l} \cdot x_0^{k-l} y_0^l < \\ &< \frac{8M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^k C_k^l \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-l} \partial y^l} \cdot x_0^{k-l} y_0^l \left(\frac{k-l}{n} - x_0 \right)^2. \end{aligned}$$

З [1] випливає, що

$$\lim_{(n, m)_k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{l=0}^k \left(\frac{k-l}{n} - x_0 \right)^2 C_k^l \frac{\partial^k \varphi_{nm}(x_0, y_0)}{\partial x^{k-l} \partial y^l} x_0^{k-l} y_0^l = 0.$$

Отже, при досить великих n і m , де $\frac{1}{k} \leq \frac{m}{n} \leq k$, $\sum^2 < \frac{\varepsilon}{4}$. Аналогічно можна довести, що також $\sum^3 \leq \frac{\varepsilon}{4}$, $\sum^4 < \frac{\varepsilon}{4}$, починаючи з деякого N .

З оцінок $\sum^1$, $\sum^2$, $\sum^3$, $\sum^4$ та (4) дістаємо, що при $n > N(\varepsilon)$ і $m > N(\varepsilon)$, $\frac{1}{k} \leq \frac{m}{n} \leq k$ має місце нерівність

$$|A_{nm}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

1 теорема доведена.

Зауважимо, що при $\varphi_{nm}(x, y) = (1-x)^n(1-y)^m$ одержується оператор (3) з [4] і теорема 1 І. А. Кіпріянова.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. И. Волков. О сходимости последовательностей линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций 2-х переменных. ДАН СССР, т. 115, № 1, 1957.
2. В. А. Баскаков. Пример последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. ДАН СССР, т. 113, № 2, 1957.
3. Л. В. Канторович. О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна. ДАН СССР, № 21, стр. 563, 1930.
4. И. А. Киприянов. О полиномах формы С. Н. Бернштейна для функций 2-х переменных. Уч. зап. Казан. ун-та им. Ленина, т. 113, кн. 10, 1953.
5. Э. Н. Морозов. Представление некоторых функций в виде предела последовательности операторов. Уч. зап. Калуж. пед. ин-та, вып. XII, физ.-мат. науки. Калуга, 1963.

З. В. ЗАРИЦКАЯ

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
В ВИДЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ**

(р е з ю м е)

Доказывается теорема о сходимости к $f(x, y)$ операторов (2) во всех точках Лебега функции $f(x, y)$.

Т. О. МЕЛЬНИК

ПРО ОДНУ СКЛАДОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ І ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

Раніше було розглянуто задачу про «склеювання» розв'язків двовимірних гіперболічних і параболічних рівнянь другого порядку, кожне з яких задане на x -півосі [1]. В даній замітці застосована раніше методика поширюється на рівняння довільного парного порядку.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай P — прямокутник на площині (x, t) , обмежений прямими $x=x_1$, $x=x_2$, $t=0$, $t=T$. Розіб'ємо цей прямокутник прямою $x=x_2$ ($x_1 < x_2 < x_3$) на дві частини P_1 і P_2 . В P_1 розглянемо параболічне рівняння

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (-1)^m \sum_{i=0}^{2m} a_i^1(x, t) \frac{\partial^i u_1}{\partial x^i} = f_1(x, t), \quad (1)$$

а в P_2 — гіперболічне рівняння

$$\sum_{i=0}^{2m} \sum_{j=0}^i a_{ij}^2(x, t) \frac{\partial^i u_2}{\partial t^{i-j} \partial x^j} = f_2(x, t) \quad (a_{2m,0}(x, t) \equiv 1). \quad (2)$$

Тут $a_{2m}^1(x, t) > 0$ при всіх $(x, t) \in \bar{P}_1$,

$$\sum_{j=0}^{2m} a_{2m,j}^2(x, t) \lambda^{2m-j} = \prod_{j=1}^{2m} (\lambda - \lambda_j(x, t)),$$

де функції $\lambda_1, \dots, \lambda_{2m}$ — дійсні і різні при всіх $(x, t) \in \bar{P}_2$. Нехай в усіх точках $(x, t) \in \bar{P}_2$

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_m < 0 < \lambda_{m+1} < \dots < \lambda_{2m},$$

Коефіцієнти і вільний член рівняння (1) вважаються рівномірно неперервно диференційованими в P_1 не менше від $2m+1$ разів; те ж саме припускається про коефіцієнти і вільні члени рівняння (2) в P_2 .

Для рівнянь (1), (2) задаються початкові умови

$$u_1|_{t=0} = g_0(x) \quad (x_1 \leq x \leq x_2); \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial t^i} \right|_{t=0} = g_{i+1}(x) \quad (0 \leq i \leq 2m-1; x_2 \leq x \leq x_3); \quad (4)$$

граничні умови

$$\sum_{i=0}^{p_r} \alpha_i^r(t) \frac{\partial^i u_1(x_1, t)}{\partial x^i} = h_r^1(t); \quad (1 \leq r \leq m; 0 \leq t \leq T) \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{q_r} \sum_{j=0}^i \beta_{ij}^r(t) \frac{\partial^i u_2(x_3, t)}{\partial t^{i-j} \partial x^j} = h_r^2(t) \quad (6)$$

і умови спряження на лінії розділу $x=x_2$:

$$k_r^1(t) \frac{\partial^r u_1(x_2, t)}{\partial x^r} = k_r^2(t) \frac{\partial^r u_2(x_2, t)}{\partial x^r} + H_r(t) \quad (0 \leq r \leq 2m-1; 0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

Початкові функції (3), (4), коефіцієнти і вільні члени граничних умов (5), (6) і умов спряження (7) вважаються заданими, достатню кількість разів неперервно диференційованими функціями,

p_r і q_r ($1 \leq r \leq m$) — цілі числа, що задовольняють умови

$$0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_m \leq 2m-1; \quad 0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m \leq 2m-1.$$

Припускається, що умови (3) — (7) узгоджені в точках $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ і $(x_3, 0)$:

$$\sum_{i=0}^{p_r} \alpha_i^r(0) \frac{d^i g_0(x_1)}{dx^i} = h_r^1(0); \quad (1 \leq r \leq m);$$

$$\sum_{i=0}^{q_r} \sum_{j=0}^i \beta_{ij}^r(0) \frac{d^j g_{i-j+1}(x_3)}{dx^j} = h_r^2(0);$$

$$k_s^1(0) \frac{d^s g_0(x_2)}{dx^s} = k_s^2(0) \frac{d^s g_1(x_2)}{dx^s} + H_s(0) \quad (0 \leq s \leq 2m-1).$$

Крім цього, припускається, що граничні умови (5), (6) задовольняють відому умову P [2] на стороні $x=x_1$ і умову типу (4) із [3] на стороні $x=x_3$. Під $u_1(x_2, t)$ ($u_2(x_2, t)$) розуміється граничне значення функції $u_1(x, t)$ ($u_2(x, t)$) при прямуванні x до x_2 зліва (справа).

Додаткові умови на функції $k_r^1(t)$ і $k_r^2(t)$ будуть вказані нижче.

2. ДВІ ДОПОМІЖНІ ЗАДАЧІ

Задача I. В P_1 потрібно знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняв би початкову умову (3), граничні умови (5) і граничні умови на лінії $x=x_2$:

$$\frac{\partial^r u_1(x_2, t)}{\partial x^r} = \psi_r(t) \quad (m \leq r \leq 2m-1; 0 \leq t \leq T). \quad (8)$$

Тут $\psi_r(t)$ — довільно задані досить гладкі функції. Розв'язок цієї задачі можна записати у вигляді [2]

$$u_1(x, t) = \sum_{r=m}^{2m-1} \int_0^t G_r(x, t, \tau) \psi_r(\tau) d\tau + U_1(x, t), \quad (9)$$

де $U_1(x, t)$ — відомий розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови (3), (5) і однорідні (нульові) умови (8);

$G_r(x, t, \tau)$ ($m \leq r \leq 2m-1$) — відомі ядра [2].

Задача II. В P_2 треба знайти розв'язок рівняння (2), який задовольняв би початкові умови (4), граничні умови (6) і граничні умови на стороні $x=x_2$:

$$\frac{\partial^r u_2(x_2, t)}{\partial x^r} = \chi_r(t) \quad (m \leq r \leq 2m-1; 0 \leq t \leq T). \quad (10)$$

Тут $\chi_m(t), \dots, \chi_{2m-1}(t)$ — задані довільні досить гладкі функції.

Через $x = \varphi_i(t; \xi, \tau)$ позначимо розв'язок рівняння характеристик

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_i(x, t) \quad (1 \leq i \leq 2m),$$

який проходить через довільну точку $(\xi, \tau) \in \bar{P}_2$. Число T припускається настільки малим, що характеристики $x = \varphi_1(t; x_2, 0)$ і $x = \varphi_{2m}(t; x_2, 0)$ ніде в $\bar{P}_2$ не перетинаються.

Нас цікавитиме залежність розв'язку задачі II від функцій $\chi_r(t)$. Очевидно, що ці функції на розв'язок $u_2(x, t)$ впливають лише в області

$$P_3 \{x_2 \leq x < \varphi_1(t; x_2, 0); 0 \leq t \leq T\}.$$

В області ж $P_2 \setminus P_3$ розв'язок задачі однозначно визначається граничними умовами (6) і початковими умовами (4). Через те ми розв'язок в $P_2 \setminus P_3$ не братимемо до уваги.

Відомо [4], що рівняння (2) зводиться до еквівалентної системи першого порядку відносно невідомих функцій $v_0 = u_2, v_1, \dots, v_{2m}$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} - \lambda_{i+1}(x, t) \frac{\partial v_i}{\partial x} = v_{i+1} + \sum_{j=0}^i b_{ij}(x, t) v_j \quad (0 \leq i \leq 2m-2); \quad (11)$$

$$\frac{\partial v_{2m-1}}{\partial t} - \lambda_{2m}(x, t) \frac{\partial v_{2m-1}}{\partial x} = \sum_{j=0}^{2m-1} b_{2m-1,j}(x, t) v_j + f_2(x, t).$$

Початкові умови (4) визначають відповідні початкові умови для нових невідомих функцій

$$v_i(x, 0) = \omega_i(x) \quad (0 \leq i \leq 2m-1; \omega_0(x) \equiv g_1(x)).$$

Через $t_{ii}(\xi, \tau)$ позначимо ординату точки перетину характеристики $x = \varphi(t; \xi, \tau)$ ($1 \leq i \leq m$) з прямою $x = x_2$. Очевидно, що $t_i(x_2, \tau)_i \equiv \tau$.

Введемо нові невідомі функції

$$v_r(t) = \frac{\partial^r u(x_2, t)}{\partial x^r} \quad (0 \leq r \leq m-1).$$

Тоді, розглянувши при $x=x_2$ ті із рівнянь (11), які відповідають значенням індексів $i=m, m+1, \dots, 2m-1$, приходимо до такої лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $v_r(t)$:

$$\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s e_{2m-k-s}^s(t) v_s^{(2m-k-1)}(t) = \psi_k(t; v_1, \dots, v_{m-1}) + I_k(t; v_0, \dots, v_{2m-1}) + \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{m+s-1} e_{2m-k-s-1}^{m+s}(t) \chi_{m+s}^{(m-k-1)}(t) \quad (0 \leq k \leq m-1). \quad (12)$$

Тут наведені позначення:

$e_i^j(t)$ — сума всіх різних добутків по j штук з i величин $\lambda_1(x_2, t), \dots, \lambda_i(x_2, t)$ при цьому $e_i^j(t)$ приймається рівним нулю при $j > i$.

$\psi_k(t; v_1, \dots, v_{m-1})$ є лінійна комбінація з відомими коефіцієнтами функцій $v_s^r(t)$ ($1 \leq s \leq m-1; 0 \leq r \leq 2m-s-2$);

$I_k(t; v_0, \dots, v_{2m-1})$ — лінійний інтегральний оператор типу Вольтера, застосований до функцій $v_0, \dots, v_{2m-1}$.

Для системи (12) маємо очевидні початкові умови:

$$v_s^{(r)}(0) = g_1^{(s+r)}(x_2) \quad (0 \leq s \leq m-1; 0 \leq r \leq 2m-s-2). \quad (13)$$

Розв'язуючи задачу (12), (13), одержуємо

$$v_s(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m+k-s-1}}{(m+k-s-1)!} \rho_{ks}(\tau) \chi_{m+k}(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-s+k-1}}{(m-s+k-1)!} \varphi_{ks}(\tau) I_{m+k}(\tau; v_0, \dots, v_{m-1}) d\tau + \zeta_s(t), \quad (14)$$

де $\rho_{ks}(t)$, $\varphi_{ks}(t)$, $\zeta_s(t)$ — відомі функції, які очевидним чином виражаються через дані вихідної задачі.

Далі відзначимо, що вирази (14) дають нам значення функцій $v_0, \dots, v_{m-1}$ на лінії $x=x_2$ (ці дані, очевидно, виражаються через відомі функції і через інтеграли від 0 до t від всіх невідомих $v_0, \dots, v_{2m-1}$). В свою чергу, величини $v_0(x_2, t), \dots, v_{m-1}(x_2, t)$ дають можливість звести задачу II шляхом інтегрування системи (11) вздовж характеристик до системи інтегральних рівнянь Вольтера, яка розв'язується методом послідовних наближень.

3. ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ (1)–(7) ДО СИСТЕМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРА

Попереду зазначимо, що задача (1)–(7) буде розв'язана, якщо будуть визначені функції $v_0(t), \dots, v_{m-1}(t)$, тому що в цьому випадку вона розпадається на дві окремі змішані задачі: одна для рівняння (1) в P_1 , друга для рівняння (2) в P_2 . Враховуючи це, робимо так: Функцію $u_1(x, t)$ при $(x, t) \in P_1$ шукаємо у вигляді

$$u_1(x, t) = \sum_{r=m}^{2m-1} \int_0^t G_r(x, t, \tau) \mu_r(\tau) d\tau + U_1(x, t), \quad (15)$$

де $\mu_m(t), \dots, \mu_{2m-1}(t)$ поки що довільні функції. Функцію $u_2(x, t)$ при $(x, t) \in P_2$ будемо визначати з системи (11) в області $P_m: \{x_2 \leq x \leq \varphi_m(t; x_2, 0); 0 \leq t \leq T\}$, прийнявши за граничні значення на лінії $x = x_2$ для функцій $u_2 = v_0, v_1, \dots, v_{m-1}$ ті значення, які є наслідком виразів (див. (14)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^s u_2(x_2, t)}{\partial x_s} &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m+k-s-1}}{(m+k-s-1)!} \varphi_{ks}(\tau) \mu_k(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-\tau)^{m+k-s-1}}{(m+k-s-1)!} \varphi_{ks}(\tau) I_{m+k}(\tau; v_0, \dots, v_{m-1}) d\tau + \zeta_s(t), \end{aligned} \quad (16)$$

де $\mu_0(t), \dots, \mu_{m-1}(t)$ також поки що довільні функції.

Будемо тепер невідомі функції $\mu_0(t), \dots, \mu_{2m-1}(t)$ підбирати так, щоб задовольнити умови (7). Згідно з побудовою розв'язків задач I і II, при підстановці $u_1(x, t)$ у вигляді (15) і $u_2(x, t)$, вираженого через величини (16), в останні m штук рівностей (7) отримуємо

$$k_r^1(t) \mu_{r-m}(t) = k_r^2(t) \mu_r(t) + H_r(t) \quad (m \leq r \leq 2m-1).$$

Звідси

$$\mu_r(t) = \frac{k_r^1(t)}{k_r^2(t)} \mu_{r-m}(t) + \frac{H_r(t)}{k_r^2(t)} = \omega_r(t) \mu_{r-m}(t) + \delta_r(t) \quad (m \leq r \leq 2m-1). \quad (17)$$

При цьому, природньо, припускається, що $k_m^2(t), \dots, k_{2m-1}^2(t) \neq 0$ при всіх $t \in [0, T]$. Так само перші m рівностей (7) дають

$$\begin{aligned} \sum_{s=m}^{2m-1} \int_0^t k_s^2(t) \frac{\partial^r G_s(x, t, \tau)}{\partial x^r} \Big|_{x=x_2} \cdot \mu_s(\tau) d\tau + H_r(t) + \frac{\partial^r U_1(x, t)}{\partial x^r} \Big|_{x=x_2} = \\ = \sum_{s=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m+s-r-1}}{(m+s-r-1)!} k_r^1(t) \rho_{sz}(\tau) \mu_s(\tau) d\tau + \\ + \sum_{s=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m+s-r-1}}{(m+s-r-1)!} k_r^1(t) \varphi_{sr}(\tau) I_{m+s}(\tau, v_0, \dots, v_{m-1}) d\tau + \\ + k_r^1(t) \zeta_r(t) \quad (0 \leq r \leq m-1). \end{aligned}$$

Підставляючи сюди замість $\mu_m, \dots, \mu_{2m-1}$ їхні вирази (17) і вводячи очевидні перепозначення, отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{m-1} \int_0^t G_r^{(s)}(t, \tau) \mu_s(\tau) d\tau = \sum_{s=0}^{m-1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m+s-r-1}}{(m+s-r-1)!} \rho^{(s)}(t, \tau) \mu_s(\tau) d\tau + \\ + I^{(r)}(t; v_0, \dots, v_{m-1}) \quad (0 \leq r \leq m-1). \end{aligned} \quad (18)$$

Якщо тимчасово вважати члени $I^{(r)}(t, v_0, \dots, v_{m-1})$ відомими, то (18) являє собою систему інтегральних рівнянь Вольтера першого роду відносно функцій $\mu_0, \dots, \mu_{m-1}$.

Враховуючи відомі властивості ядер $G_r^s(t, \tau)$, ми цю систему відразу можемо звести до системи інтегральних рівнянь Вольтера другого роду [2, стор. 411—413]. Якщо до одержаної системи другого роду приєднати ще m штук рівнянь для функцій $v_0, \dots, v_{m-1}$, які одержуються з (11) шляхом інтегрування вздовж характеристик при $(x, t) \in P_m$ з врахуванням (16), то ми приходимо до системи $2m$ інтегральних рівнянь Вольтера другого роду відносно невідомих $\mu_0, \dots, \mu_{m-1}, v_0, \dots, v_{m-1}$, яка розв'язується методом послідовних наближень.

Таким чином, можна вважати $\mu_0, \dots, \mu_{m-1}$ визначеними і, значить, згідно з зауваженням, зробленим раніше, можна вважати вихідну задачу розв'язаною.

ЛІТЕРАТУРА

1. Т. О. Мельник. Про «склеювання» розв'язків гіперболічних і параболічних рівнянь. Вісник ЛДУ, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.
2. С. Д. Эйдельман. Параболические системы. Изд-во «Наука», М., 1964.
3. З. О. Мельник. Об одной общей смешанной задаче. ДАН СССР, т. 157, 5, 1964.
4. Р. Курант. Уравнения с частными производными. Изд-во «Мир», М., 1964.

Т. Е. МЕЛЬНИК

ОБ ОДНОЙ СОСТАВНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

(ре з ю м е)

Рассматривается задача о «склеивании» решений гиперболических и параболических уравнений произвольного четного порядка.

Г. П. ГУБАНСВ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА ЗАЛИШКУ ПРИ НАБЛИЖЕННІ НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ТИПУ БЕРНШТЕЙНА

1. Нехай $KH^{(\alpha)}$ позначає клас функцій періоду 2π , що задовольняють умову Ліпшиця степеня α , $0 < \alpha \leq 1$, з константою K .

М. П. Корнійчук [1—2] одержав асимптотичний вираз верхньої межі абсолютних величин відхилень функцій від інтерполяційних сум Бернштейна, поширеної на клас $KH^{(\alpha)}$. Застосовуючи в основному метод М. П. Корнійчука, ми одержуємо асимптотично точну оцінку величини верхньої межі у випадку наближення тригонометричними сумами типу Бернштейна:

$$B_{T_n}(f; x) = \frac{1}{2} \left\{ T_n \left(f; x - \frac{\pi}{2n} \right) + T_n \left(f; x + \frac{\pi}{2n} \right) \right\},$$

де

$$T_n(f; x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(x_k) \frac{\sin \frac{2n-1}{2}(x-x_k)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_k)}$$

тригонометричні поліноми порядку $(n-1)$, найкращі в заданій системі рівновіддалених точок $x_k = \frac{k\pi}{n}$ ($k=1, 2, \dots, 2n$).

Підставляючи значення $T_n(f; x)$, одержимо для $B_{T_n}(f; x)$ формулу

$$B_{T_n}(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} f(x_k) K_{T_n}(x - x_k),$$

де

$$K_{T_n}(x - x_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{4} \cos nx \left\{ \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(x - \frac{2k-1}{2n} \pi \right)} - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(x - \frac{2k+1}{2n} \pi \right)} \right\}$$

Позначимо

$$E(B_{T_n}; KH^{(\alpha)}; x) = \sup_{f \in KH^{(\alpha)}} |f(x) - B_{T_n}(f; x)|.$$

Неважко перевірити, що $E(B_{T_n}; KH^{(\alpha)}; x)$ є періодична з періодом $h = \frac{\pi}{n}$ функція. Тому при її вивченні можна вважати, що $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2n}$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. Для всіх $0 < \alpha \leq 1$ рівномірно відносно x має місце асимптотична рівність ($K=1$)

$$E(B_{T_n}; H^{(\alpha)}; x) = \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha \left\{ (1-u)^\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cos \pi u \left[\frac{2}{1-4u^2} (1+u^\alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + (1+u)^\alpha - 2(1-u)^\alpha) + ((1+u)^\alpha - (1-u)^\alpha) \int_0^1 \frac{t^{u+\frac{1}{2}}}{1+t} dt \right] \right\} + O(n^{-1-\alpha}),$$

де $u = \frac{x}{h}$, $h = \frac{\pi}{n}$.

Відзначимо окремі випадки:

$$E(B_{T_n}; H^{(1)}; x) = \frac{\pi}{2n} + x \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \cos nx \left[\frac{2h}{h^2 - 4x^2} - \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2} - \frac{x}{h}}}{1+t} dt \right] \right\} + O(n^{-2});$$

$$E(B_{T_n}; H^{(\alpha)}; 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha + O(n^{-1-\alpha});$$

$$E\left(B_{T_n}; H^{(\alpha)}; \frac{1}{2}h\right) = \left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha + O(n^{-1-\alpha}).$$

2. Через $\tilde{H}^{(\alpha, \beta)}$ позначимо клас неперервних 2π -періодичних відносно x, y функцій, які задовольняють такі умови:

$$|f(x_1; y_1) - f(x_2; y_2)| \leq M |x_1 - x_2|^\alpha + N |y_1 - y_2|^\beta;$$

$$|f(x_1; y_1) - f(x_1; y_2) - f(x_2; y_1) + f(x_2; y_2)| \leq C |x_1 - x_2|^\alpha |y_1 - y_2|^\beta.$$

В роботі [3] була одержана асимптотична оцінка величин

$$E(B_{m,n}; \tilde{H}^{(\alpha, \beta)}; x, y) = \sup_{f \in \tilde{H}^{(\alpha, \beta)}} |f(x, y) - B_{m,n}(f; x, y)| \quad (0 < \alpha, \beta \leq 1),$$

де $B_{m,n}(f; x, y)$ — інтерполяційна сума Бернштейна порядку m по x і порядку n по y .

Користуючись методом доведення роботи [3], одержимо аналогічний вираз верхньої межі $E(B_{m,n}; \tilde{H}^{(\alpha, \beta)}; x, y)$ при наближенні тригонометричними сумами типу Бернштейна:

$$B_{T_{m,n}}(f; x, y) = \frac{1}{4} \{ T_{m,n}(f; x+p; y+g) + T_{m,n}(f; x-p; y+p) + \\ + T_{m,n}(f; x+p; y-g) + T_{m,n}(f; x-p; y-g) \},$$

де

$$T_{m,n}(f; x, y) = \frac{1}{4mn} \sum_{k=1}^{2m} \sum_{l=1}^{2n} f(x_k; y_l) \frac{\sin \frac{2m-1}{2}(x-x_k) \sin \frac{2n-1}{2}(y-y_l)}{\sin \frac{1}{2}(x-x_k) \sin \frac{1}{2}(y-y_l)},$$

$$p = \frac{\pi}{2m}, \quad g = \frac{\pi}{2n}$$

тригонометричні поліноми порядку $(m-1)$ по x і $(n-1)$ по y , найкращі в заданій системі рівновіддалених точок (x_k, y_l) $x_k = kh$, $h = \frac{\pi}{m}$, $k=1, 2, \dots, 2m$; $y_l = lg$, $g = \frac{\pi}{n}$, $l=1, 2, \dots, 2n$. Суму $B_{T_{m,n}}(f; x, y)$ можна записати у вигляді

$$B_{T_{m,n}}(f; x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{2m} \sum_{l=1}^{2n} f(x_k, y_l) K_{T_m}(x - x_k) K_{T_n}(y - y_l).$$

Позначимо

$$E(B_{T_{m,n}}; \tilde{H}^{(\alpha, \beta)}; x, y) = \sup_{f \in \tilde{H}^{(\alpha, \beta)}} |f(x, y) - B_{T_{m,n}}(f; x, y)|.$$

Має місце така теорема.

Теорема 2. Для всіх $0 < \alpha, \beta \leq 1$ рівномірно відносно x, y справедлива асимптотична рівність

$$E(B_{T_{m,n}}; \tilde{H}^{(\alpha, \beta)}; x, y) = \left(\frac{\pi}{m}\right)^\alpha A_1(\alpha; u) + \left(\frac{\pi}{n}\right)^\beta A_2(\beta; v) + O(m^{-1-\alpha}) + \\ + O(n^{-1-\beta}) + O(m^{-\alpha} n^{-\beta}),$$

де

$$A_1(\alpha; u) = (1-u)^\alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cos \pi u \left\{ \frac{2}{1-4u^2} [1+u^\alpha + (1+u)^\alpha - 2(1-u)^\alpha] + \right. \\ \left. + [(1+u)^\alpha - (1-u)^\alpha] \int_0^1 \frac{t^{u+\frac{1}{2}}}{1+t} dt \right\};$$

$$A_2(\beta; v) = (1-v)^\beta - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cos \pi v \left\{ \frac{2}{1-4v^2} [1+v^\beta + (1+v)^\beta - 2(1-v)^\beta] + \right. \\ \left. + [(1+v)^\beta - (1-v)^\beta] \int_0^1 \frac{z^{v+\frac{1}{2}}}{1+z} dz \right\};$$

$$u = \frac{x}{h}, \quad h = \frac{\pi}{m}; \quad v = \frac{y}{g}, \quad g = \frac{\pi}{n}$$

Відзначимо, нарешті, такі випадки:

$$E(B_{T_{m,n}}; \tilde{H}^{(\alpha, \beta)}; 0, 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{m}\right)^\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^\beta + O(m^{-1-\alpha}) + \\ + O(n^{-1-\beta}) + O(m^{-\alpha} n^{-\beta});$$

$$E\left(B_{T_{m,n}}; \tilde{H}^{(\alpha, \beta)}; \frac{1}{2}h, \frac{1}{2}g\right) = \left(\frac{\pi}{2m}\right)^\alpha + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^\beta + O(m^{-1-\alpha}) + \\ + O(n^{-1-\beta}) + O(m^{-\alpha} n^{-\beta});$$

$$E(B_{T_{m,n}}; \tilde{H}^{(1,1)}; x, y) = \frac{\pi}{2m} + x \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \cos mx \left(\frac{2h}{h^2 - 4x^2} - \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2} - \frac{x}{h}}}{1+t} dt \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\pi}{2n} + y \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \cos ny \left(\frac{2g}{g^2 - 4y^2} - \int_0^1 \frac{z^{\frac{1}{2} - \frac{y}{g}}}{1+z} dz \right) \right\} + O(m^{-2}) +$$

$$+ O(n^{-2}) + O(m^{-1}n^{-1}).$$

При доведенні теорем ми спираємося на результати [1, 2, 3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. П. Корнейчук. Асимптотическая оценка остатка при приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, интерполяционными суммами Бернштейна. Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки, № 1, 1959.
2. Н. П. Корнейчук. Некоторые вопросы приближения периодических функций тригонометрическими многочленами. Канд. диссертация. Днепропетровск, 1959.
3. Г. П. Губанов. Асимптотическая оценка остатка при приближении периодических функций двух переменных суммами Бернштейна—Рогозинского. Научн. зап. Днепропетр. гос. ун-та, т. 77, вып. 9, 1962.

Г. П. ГУБАНОВ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ОСТАТКА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ТИПА БЕРНШТЕЙНА

(резюме)

Устанавливается асимптотическая оценка верхней грани при приближении непрерывных периодических функций класса $KH(\alpha)$ суммами типа Бернштейна, построенными на базе полиномов, наилучших в системе нулей функции $\sin \pi x$. Полученная оценка переносится на двумерный случай.

Е. І. ЛУНЬ

СПРОЩЕННЯ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИПУ ТИМОШЕНКА

Розглядаються деякі спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка, які подані в [3, 6, 8, 9]. Враховуються припущення, які, як показано в [1, 2, 5], припустимі при розрахунках оболонок нульової гауссової кривини, оболонок, в яких пружний стан досить швидко змінюється в напрямі хоча би однієї з координатних ліній, та пологих оболонок. Виходимо з рівнянь, поданих в [3] та [9].

В перших двох рівняннях рівноваги нехтуємо зусиллями N_1 і N_2 , а у виразах для компонентів деформації $e_{\alpha n}$, $e_{\beta n}$ нехтуємо членами $\frac{u}{R_1}$ та $\frac{v}{R_2}$. Співвідношення пружності беремо у вигляді (14) роботи [9].

При наступних перетвореннях в рівняннях рівноваги та в рівняннях нерозривності деформацій нехтуватимемо членами, в які входять молодші похідні функції напружень та які мають множниками гауссову кривину середньої поверхні. При цьому:

1. Якщо тангенціальні компоненти зовнішнього навантаження відсутні

$$q_\alpha = q_\beta = 0, \quad (1)$$

то, як показано в [1], перші два рівняння рівноваги задовольняються введенням залежностей

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \\ T_2 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}; \\ S &= -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$ — функція напружень. Використовуючи (2), (1_[9])^{*} та (14_[9]), останні три рівняння рівноваги запишемо у вигляді

$$-\Delta w - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma_3 + \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma_4 \right) + \frac{1+\nu}{Eh} \Delta_k \varphi = \frac{1+\nu}{Eh} q_n;$$

* В квадратних дужках вказано номер роботи, з якої береться формула.

$$\begin{aligned}
(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B \gamma_4}{\partial \alpha} - \frac{\partial A \gamma_3}{\partial \beta} \right) \right] - \frac{3}{h^2} \left(A \gamma_4 + \frac{A}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right\} + \\
+ 2 \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B \gamma_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial A \gamma_4}{\partial \beta} \right) \right] = 0; \\
(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A \gamma_3}{\partial \beta} - \frac{\partial B \gamma_4}{\partial \alpha} \right) \right] - \frac{3}{h^2} \left(B \gamma_3 + \frac{B}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right\} + \\
+ 2 \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A \gamma_4}{\partial \beta} + \frac{\partial B \gamma_3}{\partial \alpha} \right) \right] = 0,
\end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]; \\
\Delta_k &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{R_2} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right].
\end{aligned}$$

Виключивши з рівнянь (3) вираз $\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B \gamma_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial A \gamma_4}{\partial \beta} \right)$, одержимо одне з рівнянь ключової системи

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \Delta \Delta w - \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta \Delta_k \varphi + \Delta_k \varphi = q_n - \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta q_n. \quad (4)$$

Друге основне рівняння одержується з першого рівняння формул (6_[9]) нерозривності деформацій при врахуванні (14_[9]), (1_[9]), (2) та співвідношень Гаусса—Кодацці і має вигляд

$$\Delta \Delta \varphi - 2Eh \Delta_k w = 0. \quad (5)$$

Крім того, з останніх двох рівнянь системи (3) одержується, що кути повороту нормалі визначаються формулами

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[w + \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta w - \frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)} (\Delta_k \varphi - q_n) \right], \\
\gamma_4 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[w + \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta w - \frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)} (\Delta_k \varphi - q_n) \right],
\end{aligned} \quad (6)$$

де $\psi = \psi(\alpha, \beta)$ є загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\Delta \psi - \frac{3}{h^2} \psi = 0. \quad (7)$$

Рівняння (4), (5) і (7) становлять ключову систему рівнянь*

$$\begin{aligned}
\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \Delta \Delta w - \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta \Delta_k \varphi + \Delta_k \varphi &= q_n - \frac{3h^2}{3(1-\nu)} \Delta q_n, \\
\Delta \Delta \varphi - 2Eh \Delta_k w &= 0; \\
\Delta \psi - \frac{3}{h^2} \psi &= 0.
\end{aligned} \quad (8)$$

* Повідомлено на науковій конференції ЛДУ ім. Ів. Франка в жовтні 1964 р.

2. Якщо коефіцієнти першої квадратної форми задовольняють умову

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = \frac{\partial B}{\partial \alpha} = 0, \quad (9)$$

то перші два рівняння рівноваги задовольнятимуться при таких залежностях:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) + Q_\alpha, \\ T_2 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) + Q_\beta, \\ S &= - \frac{1}{AB} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$Q_\alpha = - \int q_\alpha A d\alpha; \quad Q_\beta = - \int q_\beta B d\beta. \quad (11)$$

Після перетворень, аналогічних перетворенням п. 1, одержимо для даного випадку ключову систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \Delta \Delta w - \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta \Delta_k \varphi + \Delta_k \varphi &= q - \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta q, \\ \Delta \Delta \varphi - 2Eh \Delta_k w &= Q, \\ \Delta \psi - \frac{3}{h^2} \psi &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} q &= q_n - \frac{Q_\alpha}{R_1} - \frac{Q_\beta}{R_2}, \\ Q &= -\Delta(Q_\alpha + Q_\beta) + (1+\nu) \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} \right) \end{aligned}$$

та формули для кутів повороту нормалі

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= - \frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[w + \frac{2h^3}{3(1-\nu)} \Delta w - \frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)} (\Delta_k \varphi - q) \right], \\ \gamma_4 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[w + \frac{2h^3}{3(1-\nu)} \Delta w - \frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)} (\Delta_k \varphi - q) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

При розрахунку досить пологих оболонок, середня поверхня яких в декартовій прямокутній системі координат XUZ задається рівнянням

$$z = z(x, y),$$

нехтують [5] квадратами і добутком величин $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в порівнянні з одиницею. Тоді положення точок на середній поверхні визначаються де-

картовими координатами (x, y) їх проєкцій на площину XOY , $A=B=1$, R_1 і R_2 — const, виконуються умови (9) і має місце ключова система (12) *, в якій

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_k = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ q &= q_z - \frac{Q_x}{R_1} - \frac{Q_y}{R_2}, \\ Q &= -\Delta(Q_x + Q_y) - (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_y}{\partial y^2} \right); \\ Q_x &= -\int q_x dx; \quad Q_y = -\int q_y dy,\end{aligned}\tag{14}$$

q_x, q_y, q_z — проєкції зовнішнього навантаження, віднесеного до одиниці площі.

3. У випадку осесиметричної задачі для пологої сферичної оболонки, середня поверхня якої задана рівнянням

$$z = \sqrt{R^2 - r^2} - (R - z_0),\tag{15}$$

приймається [7], що

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -\frac{r}{R}.$$

Диференціальні рівняння рівноваги набувають вигляду

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dr} T_1 - T_2 + r q_r &= 0; \\ \frac{r}{R} (T_1 + T_2) - \frac{dr}{dr} N_1 - r q_n &= 0; \\ \frac{dr}{dr} G_1 - G_2 - r N_1 &= 0,\end{aligned}\tag{16}$$

де q_r і q_n — інтенсивності навантаження відповідно в меридіальному і нормальному напрямках.

Перше рівняння системи (16) задовольняється введенням залежностей

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + Q, \\ T_2 &= \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + Q,\end{aligned}\tag{17}$$

де

$$Q = -\int q_r dr.$$

З двох інших рівнянь цієї системи одержуємо формулу

$$\gamma_3 = -\frac{d}{dr} \left[\frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta w + w - \frac{2h(1+\nu)}{3E(1-\nu)} \left(\frac{1}{R} \Delta \varphi - q \right) \right],\tag{18}$$

* Аналогічна система для випадку, коли $q_x = q_y = 0$, подана в [6].

де

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}; \quad q = q_n - \frac{2Q}{R},$$

та основне рівняння, яке разом з рівнянням, що одержується з рівняння 1 (6_[9]) нерозривності деформацій, дає ключову систему рівнянь для розглядуваного випадку

$$\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} \Delta \Delta w - \frac{2h}{3(1-\nu)} \Delta \Delta \varphi + \frac{1}{R} \Delta \varphi = q - \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \Delta q; \quad (19)$$

$$\Delta \Delta \varphi - \frac{2Eh}{R} \Delta w = -(1-\nu) \Delta Q.$$

Ключові системи рівнянь (8), (12), (19) враховують деформації зсуву e_{an} , $e_{\beta n}$ за моделлю С. П. Тимошенка [9], що має практичне значення [7] в тих областях оболонки, які прилягають до контура або до отворів, діаметр яких не можна вважати великим порівняно з товщиною оболонки. При цьому в загальному випадку порядок ключової системи рівнянь дає можливість задовольняти не по чотири, а по п'ять граничних умов на кожному краї оболонки. Деякі з граничних умов мають вигляд: в переміщеннях і кутах повороту

$$u = u^{(0)}, \quad v = v^{(0)}, \quad w = w^{(0)}, \quad \gamma_3 = \gamma_3^{(0)}, \quad \gamma_4 = \gamma_4^{(0)} \quad \text{при } \alpha = \alpha_0,$$

в зусиллях і моментах

$$T_1 = T_1^{(0)}, \quad S = S^{(0)}, \quad N_1 = N_1^{(0)}, \quad G_1 = G_1^{(0)}, \quad H = H^{(0)} \quad \text{при } \alpha = \alpha_0.$$

Зокрема, для зацімленого краю

$$u = v = w = \gamma_3 = \gamma_4 = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0,$$

для вільного краю

$$T_1 = S = N_1 = G_1 = H = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0,$$

для шарнірно опертого краю, що не зміщується,

$$u = v = w = \gamma_4 = G_1 = 0 \quad \text{при } \alpha = \alpha_0.$$

Виходячи із системи (19), знайдено розв'язок осесиметричної задачі для пологої сферичної оболонки. Якщо оболонка алюмінієва, зацімлена по контуру і перебуває під дією рівномірно-розподіленого нормального навантаження, то при $R = 200$ см, $a = 90$ см, $2h = 0,4$ см, $q_n = 1$ кг/см², $E = 0,7 \cdot 10^6$ кг/см², $\nu = 0,32$, де R — радіус сферичної оболонки, a — радіус колового контура оболонки, максимальний згинаючий момент на контурі оболонки $M_r = 17,6$ кгм/м. Відповідне значення згинаючого моменту, одержане при нехтуванні зсувами [7], більше на 12,5%.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. З. Власов. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
2. А. Л. Годьденвейзер. Рецензия на книгу В. В. Новожилова «Теория тонких оболочек». Прикл. матем. и мех., т. XIII, вып. 1, 1949.
3. Е. І. Лунь. До теорії пружних оболонок. Зб. робіт аспірантів ЛДУ ім. Ів. Франка. Вид-во Львів. ун-ту, 1963.
4. М. Мишонов. К теории полых оболочек. Прикл. матем. и мех., т. XXII, вып. 5, 1958.

5. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек. Судпромгиз. Л., 1962.
6. Б. Л. Пелех. Кандидатская диссертация. ЛГУ им. Ив. Франко, 1965.
7. С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. М., 1963.
8. М. П. Шереметьев. Лекции по теории упругости. Изд-во Львов. ун-та, 1962—1963.
9. М. П. Шереметьев, Е. И. Лунь. Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Труды IV Всесоюз. конференции по теории оболочек и пластин, 1962.

Е. И. ЛУНЬ

УПРОЩЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

(резюме)

Рассматриваются упрощения основных уравнений теории оболочек типа Тимошенко применительно к оболочкам нулевой гауссовой кривизны, к пологим оболочкам и к оболочкам, в которых напряженное состояние достаточно быстро изменяется в направлении хотя бы одной из координатных линий.

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ВПРЕСОВКА ЗАМКНУТОГО СТЕРЖНЯ В КРИВОЛІНІЙНИЙ ОТВІР АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

Нехай в криволінійний отвір анізотропної пластинки, що має в кожній точці площину пружної симетрії, паралельну серединній площині, встановлений замкнутий ізотропний криволінійний стержень (кільце) сталого перерізу, контур якого до деформації відрізнявся від контура отвору на величину порядку допустимих пружних переміщень. При цьому припускається, що стержень дотикається пластинки по всьому краю отвору.

Поперечний переріз стержня може бути довільної форми, симетричної відносно серединної площини пластинки. В основу розрахунку стержня покладена гіпотеза нормального жорсткого перерізу. Тертям між пластинкою і стержнем нехтується. Аналогічна задача для ізотропної пластинки розглянута в роботі [3].

З умови задачі випливає, що після того, як кільце встановлене в отвір, на лінії контакту L повинні справджуватися такі рівності:

$$\begin{aligned} u_n - u_{1n} &= \varepsilon^*; \\ N^{(i)} &= N_1^{(i)}; \\ T^{(i)} &= T_1^{(i)} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де u_n — нормальна складова вектора переміщення контурних точок пластинки; $N^{(i)}$ і $T^{(i)}$ — відповідно нормальна і дотична складові вектора напруження; ε^* — мала величина порядку пружних переміщень*.

Контурні рівності (1) можна виразити через дві аналітичні в своїх площинах функції $\varphi_1(z_1)$ і $\psi_1(z_2)$ комплексного змінного $z_1 = x + s_1 y$ і $z_2 = x + s_2 y$; в результаті одержимо [5]

$$\operatorname{Re} \left\{ i \frac{d}{dt} [(s_1 - i) \varphi_1(t_1) + (\bar{s}_1 - i) \overline{\varphi_1(t_1)} + (s_2 - i) \psi_1(t_2) + (\bar{s}_2 - i) \overline{\psi_1(t_2)}] \right\} = N_{(i)} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ e^{-ia} [(p_1 + iq_1) \varphi_1(t_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \overline{\varphi_1(t_1)} + (p_2 + iq_2) \psi_1(t_2) + \\ + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \overline{\psi_1(t_2)}] \} = u_{1n} + \varepsilon^* \text{ на } L, \end{aligned}$$

де $s_1, s_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ — відомі величини, що залежать від пружних

* Тут і далі величини, позначені індексом «1», відносяться до стержня.

сталих матеріалу; α — кут, утворений зовнішньою нормаллю $\vec{n}$ з додатним напрямом осі x ; t — афікс точки контура отвору L .

Розглянемо тепер деформацію стержня. Рівняння рівноваги елемента стержня з врахуванням третьої з умов (1) зводиться до таких співвідношень [2]:

$$-\frac{1}{2h} \left(\frac{dV_n}{ds_1} - \frac{1}{r_1} V_\tau \right) + \frac{h^*}{h} \frac{r_2}{r_1} N = N^{(t)}; \quad (3)$$

$$\frac{dV_\tau}{ds_1} = -\frac{1}{r_1} V_n, \quad \frac{dM}{ds_1} = \frac{r_0}{r_1} V_n,$$

де V_τ і V_n — відповідно поздовжня і поперечна складові головного вектора внутрішніх зусиль; M — момент внутрішніх зусиль, які діють в довільному нормальному перерізі стержня; N — нормальне зусилля, прикладене до стержня; r_1, r_2 — радіуси кривини крайніх волокон стержня, причому під r_1 ми будемо розуміти радіус кривини того крайнього волокна, вздовж якого пластинка дотикається до стержня; елемент дуги цього волокна ми позначили через ds_1 , а його відстань до осі стержня через ε_1 ; r_0 — радіус кривини осі стержня; $2h$ — висота пластинки; $2h^*$ — висота того краю стержня, що не контактує з пластинкою; b — ширина стержня в площині його осі.

Розглядаючи деформацію волокна стержня, еквідистантного його осі, одержимо співвідношення [2], [3].

$$\frac{d^2 u_{1n}}{ds_1^2} - r_1 \frac{d}{ds_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) \frac{du_{1n}}{ds_1} + \frac{1}{r_1^2} u_{1n} = \frac{r_0}{r_1^2} e_0 - \frac{r_0}{r_1} \frac{d\Theta}{ds_1} + r_1 \Theta \frac{d}{ds_1} \left(\frac{1}{r_1} \right), \quad (4)$$

де u_{1n} — нормальна складова вектора переміщення; e_0 — відносне подовження осі стержня; Θ — кут повороту нормального перерізу стержня внаслідок його деформації.

При малій деформації закон Гука для криволінійного стержня візьмемо в такому вигляді [7]:

$$e_0 = \frac{V_\tau}{g_1} + \frac{M}{r_0 g_1}, \quad (5)$$

$$\frac{d\Theta}{ds_1} = \frac{r_0}{r_1} \left[\frac{M}{g_2} + \frac{M}{r_0^2 g_1} + \frac{V_\tau}{r_0 g_1} \right].$$

Тут $g_1 = E^* F$ — жорсткість стержня на розтяг; $g_2 = E^* I'$ — жорсткість стержня на згин; F — площа нормального перерізу стержня; E^* — модуль Юнга для стержня;

$$I' = \int_F \frac{r_0}{r_0 + y} y^2 dF,$$

де y — змінна величина, відраховувана від осі стержня. Для прямокутного перерізу стержня $2h^* \times b$ величина I' дорівнює

$$I' = I_z, \quad (6)$$

де $I_z = \frac{h^* b^3}{6}$ — момент інерції перерізу стержня; b — ширина стержня;

$$\lambda = 12 \left(\frac{r_0^3}{b^3} \ln \frac{2r_0 + b}{2r_0 - b} - \frac{r_0^2}{b^2} \right).$$

Нормальне напруження в перерізі стержня визначається за формулою

$$\sigma = \frac{V_\tau}{F} + \frac{M}{r_0 F} + \frac{My}{I'} \cdot \frac{r_0}{r_0 + y}. \quad (7)$$

З врахуванням (5) рівність (4) набуває вигляду

$$\frac{d^2 u_{1n}}{ds_1^2} - r_1 \frac{d}{ds_1} \left(\frac{1}{r_1} \right) \frac{du_{1n}}{ds_1} + \frac{1}{r_1^2} u_{1n} = - \frac{r_0^2 M}{r_1^2 g_2} + r_1 \Theta \frac{d}{ds_1} \left(\frac{1}{r_1} \right). \quad (8)$$

На підставі співвідношень (3) контурні умови розглядуваної задачі (2) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ i \frac{d}{dt} [(s_1 - i) \varphi_1(t_1) + (\bar{s}_1 - i) \overline{\varphi_1(t_1)} + (s_2 - i) \psi_1(t_2) + (\bar{s}_2 - i) \overline{\psi_1(t_2)}] \right\} = \\ = \frac{1}{2h} \left[\frac{d}{ds_1} \left(r_1 \frac{dV_\tau}{ds_1} \right) + \frac{1}{r_1} V_\tau \right] + \frac{h^* r_2}{h r_1} N; \\ \operatorname{Im} \left\{ i \frac{d}{dt} [(s_1 - i) \varphi_1(t_1) + (\bar{s}_1 - i) \overline{\varphi_1(t_1)} + (s_2 - i) \psi_1(t_2) + (\bar{s}_2 - i) \overline{\psi_1(t_2)}] \right\} = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ e^{-ia} [(p_1 + iq_1) \varphi_1(t_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \overline{\varphi_1(t_1)} + (p_2 + iq_2) \psi_1(t_2) + \\ + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \overline{\psi_1(t_2)}] \} = u_{1n} + \varepsilon^*; \end{aligned}$$

$$\frac{dM}{ds_1} = - r_0 \frac{dV_\tau}{ds_1}.$$

Величина ε^* взагалі є функцією дуги контура отвору. Для прикладу розглянемо нескінченну анізотропну пластинку з круговим отвором радіуса r_1 , в який впresовано пружне кільце ширини b . Зовнішній радіус кільця в недеформованому стані дорівнював $r_1 + \varepsilon^*$ ($\varepsilon^* > 0$ — величина стала).

Будемо вважати, що впresоване кільце вільне від дії зовнішніх зусиль, а напруження в пластинці на нескінченності обмежені:

$$X_x^\infty = p, \quad Y_y^\infty = q, \quad X_y^\infty = 0; \quad N = 0.$$

Область зміни z , зайняту пластинкою, відобразимо на зовнішність одиничного кола функцією

$$z = \omega(\zeta) = r_1 \zeta, \quad t = r_1 \sigma, \quad \sigma = e^{i\theta}. \quad (10)$$

Тоді, очевидно, функції

$$\begin{aligned} z_1 = \omega_1(\zeta_1) = \frac{r_1}{2} \left[(1 - is_1) \zeta_1 + (1 + is_1) \frac{1}{\zeta_1} \right]; \\ z_2 = \omega_2(\zeta_2) = \frac{r_1}{2} \left[(1 - is_2) \zeta_2 + (1 + is_2) \frac{1}{\zeta_2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

будуть також конформно переводити відповідні області зміни z_1 і z_2

на зовнішність одиничного круга, причому для контурних точок змінні ζ_1 і ζ_2 набувають одного і того самого значення $\sigma = e^{i\theta}$.

Якщо ввести позначення

$$\varphi_1[\omega_1(\zeta_1)] = \varphi(\zeta_1); \quad \psi_1[\omega_2(\zeta_2)] = \psi(\zeta_2),$$

контурні умови (8), (9) в розглядуваному випадку можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left[\sigma^3 \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} u_n \right) \right] &= r_0^2 \frac{M}{g_2} - \varepsilon^*; \\ \operatorname{Re} \left\{ i \frac{d}{d\sigma} [(s_1 - i) \varphi(\sigma) + (\bar{s}_1 - i) \overline{\varphi(\sigma)} + (s_2 - i) \psi(\sigma) + (\bar{s}_2 - i) \overline{\psi(\sigma)}] \right\} &= \\ &= \frac{1}{2hr_0} \frac{d}{d\sigma} \left[\sigma^3 \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} M \right) \right] + C; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\operatorname{Im} \left\{ i \frac{d}{d\sigma} [(s_1 - i) \varphi(\sigma) + (\bar{s}_1 - i) \overline{\varphi(\sigma)} + (s_2 - i) \psi(\sigma) + (\bar{s}_2 - i) \overline{\psi(\sigma)}] \right\} = 0,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sigma} [(p_1 + iq_1) \varphi(\sigma) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \overline{\varphi(\sigma)} + (p_2 + iq_2) \psi(\sigma) + \right. \\ \left. + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \overline{\psi(\sigma)}] \right\} = u_n \text{ на } \gamma, \end{aligned}$$

де

$$C = \frac{1}{2hr_0} (M_0 + r_0 V_{0\tau}), \quad \frac{dM}{d\sigma} = -r_0 \frac{dV_\tau}{d\sigma}. \quad (13)$$

Комплексні потенціали $\varphi(\zeta_1)$ і $\psi(\zeta_2)$, що визначають напружений стан в анізотропній пластинці, можна подати у вигляді

$$\varphi(\zeta_1) = \frac{r_1(1 - is_1)}{2} A_0^* \zeta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_1^{-n}; \quad (14)$$

$$\psi(\zeta_2) = \frac{r_1(1 - is_2)}{2} (B_0^* + iC_0^*) \zeta_2 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta_2^{-n},$$

де A_0^* , B_0^* , C_0^* — відомі величини, які виражаються через напруження на нескінченності [6].

Вирази внутрішніх зусиль у перерізі кільця подамо у формі комплексних рядів Фур'є:

$$\begin{aligned} V_\tau &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \sigma^{-n}; \\ M &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n \sigma^{-n}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n \sigma^{-n}.$$

Коефіцієнти розкладу функцій (14) і (15) визначимо з умови їх точного задоволення контурним рівностям (12) з врахуванням (13) і умови однозначності кута Θ повороту перерізу (5); в результаті прийдемо до таких систем алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [(1 + \bar{i}s_1) \bar{a}_1 + (1 + \bar{i}s_2) \bar{b}_1] &= -\operatorname{Re} [(1 + is_1) A_0 + (1 + is_2) B_0] - \\ &\quad - \frac{g_2 + r_0^2 g_1}{2hr_0 g_2} \beta_0, \\ \operatorname{Re} [(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{a}_1 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \bar{b}_1] &= -\operatorname{Re} [(p_1 + iq_1) A_0 + (p_2 + iq_2) B_0] + \\ &\quad + \varepsilon^* - \frac{r_0^2}{g_2} \beta_0, \quad (16) \\ \operatorname{Im} [(1 + \bar{i}s_1) \bar{a}_1 + (1 + \bar{i}s_2) \bar{b}_1] &= -\operatorname{Im} [(1 + is_1) A_0 + (1 + is_2) B_0]; \\ 3(1 + \bar{i}s_1) \bar{a}_3 + 3(1 + \bar{i}s_2) \bar{b}_3 &= (1 - \bar{i}s_1) \bar{a}_1 + (1 - \bar{i}s_2) \bar{b}_1 + (1 - is_1) A_0 + \\ &\quad + (1 - is_2) B_0 + \frac{3}{hr_0} \beta_2, \\ (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{a}_3 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \bar{b}_3 &= -(\bar{p}_1 - i\bar{q}_1) \bar{a}_1 - (\bar{p}_2 - i\bar{q}_2) \bar{b}_1 - \\ &\quad - (p_1 - iq_1) A_0 - (p_2 - iq_2) B_0 + \frac{2r_0^2}{3g_2} \beta_2, \\ 3(1 + \bar{i}s_1) \bar{a}_3 + 3(1 + \bar{i}s_2) \bar{b}_3 &= -(1 - \bar{i}s_1) \bar{a}_1 - (1 - \bar{i}s_2) \bar{b}_1 - \\ &\quad - (1 - is_1) A_0 - (1 - is_2) B_0; \\ (n+1)(1 + \bar{i}s_1) \bar{a}_{n+1} + (n+1)(1 + \bar{i}s_2) \bar{b}_{n+1} &= (n-1)(1 - \bar{i}s_1) \bar{a}_{n-1} + \\ &\quad + (n-1)(1 - \bar{i}s_2) \bar{b}_{n-1} + \frac{1}{hr_0} (n^2 - 1) \beta_n; \\ (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) \bar{a}_{n+1} + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) \bar{b}_{n+1} &= -(\bar{p}_1 - i\bar{q}_1) a_{n-1} - (\bar{p}_2 - i\bar{q}_2) b_{n-1} + \\ &\quad + \frac{2r_0^2}{(n^2 - 1)g_2} \beta_n; \\ (n+1)(1 + \bar{i}s_1) \bar{a}_{n+1} + (n+1)(1 + \bar{i}s_2) \bar{b}_{n+1} &= -(n-1)(1 - \bar{i}s_1) \bar{a}_{n-1} - \\ &\quad - (n-1)(1 - \bar{i}s_2) \bar{b}_{n-1} \quad (n=4, 6, 8, \dots), \\ \beta_n &= -r_0 \alpha_n, \quad \gamma_n = \frac{r_0^2}{(n^2 - 1)g_2} \beta_n, \quad (n=2, 4, 6, \dots), \\ \alpha_0 &= -\frac{g_2 + r_0^2 g_1}{r_0 g_2} \beta_0, \quad \gamma_0 = \varepsilon^* - \frac{r_0^2}{g_2} \beta_0. \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{r_1(1-is_1)}{2} A_0^*, \quad B_0 = \frac{r_1(1-is_2)}{2} (B_0^* + iC_0^*).$$

Коефіцієнти a_n і b_n з парним індексом, а коефіцієнти α_n і β_n з непарним індексом дорівнюють нулеві.

Розв'язуючи систему (16), знайдемо коефіцієнти a_n , b_n і β_n ; ці коефіцієнти будуть залежати від параметра β_0 . Внаслідок голоморфності функцій $\varphi_0(\zeta_1)$ і $\psi_0(\zeta_2)$ коефіцієнти розкладу їх a_n і b_n з ростом номера « n » прямують до нуля. Тому знайдеться такий номер « N », починаючи з якого всі коефіцієнти a_n і b_n з наперед заданим ступенем точності можна покласти рівними нулеві, тобто

$$a_N(\beta_0) = 0, \quad b_N(\beta_0) = 0. \quad (17)$$

Номер « N » повинен бути підбраний так, щоб параметр β_0 , знайдений з першої і другої умов (17), з прийнятим ступенем точності збігався.

Нормальний тиск, що виникає на лінії контакту пластинки з кільцем, визначається за формулою

$$N^{(i)} = \frac{1}{2hr_1} \alpha_0 + \frac{1}{2hr_1} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (1-n^2)(\alpha_n \sigma^n + \bar{\alpha}_n \sigma^{-n}). \quad (18)$$

Якщо $N^{(i)} < 0$, то пластинка буде контактувати з кільцем вздовж всього контура L . При розтязі пластинки вздовж осі Ox ($q=0$) мінімальна величина ϵ^* визначається з умови

$$N^{(i)} = 0 \text{ при } \theta = 0 \text{ (або } \theta = \pi). \quad (19)$$

Розглянемо ортотропну пластинку. Напрямок координатних осей x і y спрямуємо вздовж головних напрямів пружності. Для більшості ортотропних матеріалів параметри s_1 і s_2 чисто уявні: $s_1 = i\beta_1^*$, $s_2 = i\beta_2^*$. Тоді величини p_1 і p_2 будуть дійсними, а величини q_1 і q_2 — чисто уявними [5]:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\beta_1^{*2} + \nu_1}{E_1}; \quad q_1 = -i \frac{1 + \nu_2 \beta_1^{*2}}{\beta_1^* E_2}; \\ p_2 &= -\frac{\beta_2^{*2} + \nu_1}{E_1}; \quad q_2 = -i \frac{1 + \nu_2 \beta_2^{*2}}{\beta_2^* E_2}. \end{aligned} \quad (20)$$

У випадку ортотропної пластинки сталі A_0^* і B_0^* виражаються через напруження на нескінченності такими формулами [6]:

$$A_0^* = -\frac{X_x^\infty + \beta_2^{*2} Y_y^\infty}{2(\beta_1^{*2} - \beta_2^{*2})}; \quad B_0^* = \frac{X_x^\infty + \beta_1^{*2} Y_y^\infty}{2(\beta_1^{*2} - \beta_2^{*2})}, \quad C_0^* = \frac{X_y^\infty}{2\beta_2^*}. \quad (21)$$

Із системи (16), з врахуванням (20) і (21), випливає, що для ортотропної пластинки при $X_y^\infty = 0$ коефіцієнти a_n , b_n і β_n будуть величинами дійсними.

Для кільця прямокутного поперечного перерізу $2h^* \times b$ систему рівнянь (16) подамо в безрозмірних величинах δ і γ , поклавши

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{b}{r_1}; \quad \gamma = \frac{h^*}{h}; \quad I^* = \lambda I_z = \lambda \frac{h^* b^3}{6}; \quad \epsilon_1 = \frac{b}{2}; \\ g_1 &= 2h^* b E^*; \quad g_2 = \lambda E^* \frac{h^* b^3}{6}. \end{aligned} \quad (22)$$

Враховуючи (20), (21) і (22), система (16) для ортотропної пластинки з впресованим кільцем прямокутного перерізу набуде вигляду

$$\begin{aligned}
(1 + \beta_1^*) a_1 + (1 + \beta_2^*) b_1 &= -(1 - \beta_1^*) A_0 - (1 - \beta_2^*) B_0 - \frac{2\gamma[\lambda\delta^2 + 3(2 - \delta)^2]}{\lambda\delta(2 - \delta)} \beta_0'; \\
(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) a_1 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) b_1 &= -(p_1 + iq_1) A_0 - (p_2 + iq_2) B_0 + \varepsilon^* - \\
&\quad - \frac{3(2 - \delta)^2}{\lambda E^* \delta^2} \beta_0'; \\
3(1 + \beta_1^*) a_3 + 3(1 + \beta_2^*) b_3 &= (1 - \beta_1^*) a_1 + (1 - \beta_2^*) b_1 + (1 + \beta_1^*) A_0 + \\
&\quad + (1 + \beta_2^*) B_0 + 12\gamma \frac{\delta}{2 - \delta} \beta_2'; \\
(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) a_3 + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) b_3 &= -(\bar{p}_1 - i\bar{q}_1) a_1 - (\bar{p}_2 - i\bar{q}_2) b_1 - \\
&\quad - (p_1 - iq_1) A_0 - (p_2 - iq_2) B_0 + \frac{2(2 - \delta)^2}{\lambda E^* \delta^2} \beta_2'; \\
3(1 + \beta_1^*) a_3 + 3(1 + \beta_2^*) b_3 &= -(1 - \beta_1^*) a_1 - (1 - \beta_2^*) b_1 - \\
&\quad - (1 + \beta_1^*) A_0 - (1 + \beta_2^*) B_0; \tag{23} \\
(n + 1)(1 + \beta_1^*) a_{n+1} + (n + 1)(1 + \beta_2^*) b_{n+1} &= (n - 1)(1 - \beta_1^*) a_{n-1} + \\
&\quad + (n - 1)(1 - \beta_2^*) b_{n-1} + \frac{4\gamma\delta(n^2 - 1)}{2 - \delta} \beta_n'; \\
(\bar{p}_1 + i\bar{q}_1) a_{n+1} + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2) b_{n+1} &= -(\bar{p}_1 - i\bar{q}_1) a_{n-1} - (\bar{p}_2 - i\bar{q}_2) b_{n-1} + \\
&\quad + \frac{6(2 - \delta)^2}{\lambda E^* \delta^2 (n^2 - 1)} \beta_n'; \\
(n + 1)(1 + \beta_1^*) a_{n+1} + (n + 1)(1 + \beta_2^*) b_{n+1} &= -(n - 1)(1 - \beta_1^*) a_{n-1} - \\
&\quad - (n - 1)(1 - \beta_2^*) b_{n-1}; \quad (n = 4, 6, 8, \dots) \\
\alpha_n &= -\frac{4h^* \delta}{2 - \delta} \beta_n'; \quad \gamma_n = \frac{3(2 - \delta)^2}{\lambda E^* \delta^2 (n^2 - 1)} \beta_n' \quad (n = 2, 4, 6, \dots); \\
\alpha_0 &= -\frac{4h^* [\lambda\delta^2 + 3(2 - \delta)^2]}{\lambda\delta(2 - \delta)} \beta_0'; \quad \gamma_0 = \varepsilon^* - \frac{3(2 - \delta)^2}{\lambda E^* \delta^2} \beta_0'; \\
\lambda &= 3 \frac{(2 - \delta)^2}{\delta^2} \left[\frac{2 - \delta}{2\delta} \ln \frac{1}{1 - \delta} - 1 \right]; \quad \beta_n = 2h^* b \beta_n'.
\end{aligned}$$

Для кільця прямокутного поперечного перерізу формула (7) в безрозмірних величинах зведеться до вигляду

$$\sigma = \frac{V_\tau}{2h^* b} + \frac{\eta M}{2h^* b^2}, \tag{24}$$

де

$$\eta = \frac{2k(1 - \delta)[\delta^2(\lambda + 3) - 12\delta + 12] - 3(2 - \delta)^3}{\lambda k \delta (1 - \delta)(2 - \delta)};$$

$$k = \frac{r}{r_2}, \quad \frac{r_1}{r} = \frac{1}{k(1-\delta)}.$$

Кільцеві напруження σ_θ в ортотропній пластинці вздовж краю кругового отвору обчислюються за формулою

$$\sigma_\theta = \frac{2}{r_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\cos \theta + i\beta_1^* \sin \theta)^2 [(1+\beta_1^*) - (1-\beta_1^*) \cos 2\theta - i(1-\beta_1^*) \sin 2\theta] \varphi'(\sigma)}{(1+\beta_1^{*2}) - (1-\beta_1^{*2}) \cos 2\theta} + \right. \\ \left. + \frac{(\cos \theta + i\beta_2^* \sin \theta)^2 [(1+\beta_2^*) - (1-\beta_2^*) \cos 2\theta - i(1-\beta_2^*) \sin 2\theta] \psi'(\sigma)}{(1+\beta_2^{*2}) - (1-\beta_2^{*2}) \cos 2\theta} \right\}.$$

Розглянемо числовий приклад. За ортотропну пластинку візьмемо склотекстоліт КАСТ-В [8] товщиною 1 см з пружними даними

$$E_1 = 1,97 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; E_2 = 1,36 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; G = 0,33 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \nu_2 = 0,12.$$

Впресоване кільце прямокутного поперечного перерізу з дюралюміна з модулем пружності $E^* = 7,2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$. Пластинка розтягується в напрямі осі Ox зусиллям $X_x^\infty = p$ ($Y_y^\infty = 0$, $X_y^\infty = 0$). За величину ε^* прийнята величина $\varepsilon_{\min}^*$ згідно з умовою (19). Обчислення проводились при $\gamma = 1$, $\delta = 0,2$. Числові значення кільцевих напружень σ_θ в пластинці і σ_1 в кільці в окремих точках вздовж лінії дотику наведені в таблиці.

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
σ_θ/p	-0,661	-0,531	-0,227	0,124	0,495	0,933	1,529	2,368	3,355	3,869
σ_1/p	2,524	2,350	1,850	1,088	0,157	-0,827	-1,747	-2,493	-2,978	-3,146
$\sigma_\theta^{(0)}/p$	-0,831	-0,688	-0,356	0,029	0,432	0,896	1,508	2,350	3,328	3,834
σ_2/p	-3,912	-3,725	-3,101	-2,148	-0,985	0,246	1,396	2,628	2,934	3,144
τ_θ/p	-0,359	-0,359	-0,359	-0,359	-0,359	-0,359	-0,359	-0,359	-0,359	-0,359

Тут через $\sigma_\theta^{(0)}$ позначені напруження, що виникають в пластинці з круговим отвором при відсутності кільця; σ_0 і σ_2 — нормальні напруження відповідно в точках осі стержня і в крайніх волокнах, що не контактують з пластинкою.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.
2. Т. Л. Мартынович. Пружна рівновага пластинки з криволінійним контуром, підкріпленим пружним кільцем. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 1, 1965.
3. Т. Л. Мартынович, М. П. Саврук. Упругое равновесие пластинки, в которую впрессован замкнутый стержень. «Прикладная механика», т. 1, вып. 8, 1965.
4. Т. Л. Мартынович. До питання про підкріплення анізотропної пластинки пружним стержнем. Вісн. Львів. ун-ту сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.
5. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. Гостехтеориздат, 1957.
6. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеориздат, 1951.
7. М. М. Филоненко-Бродич и др. Курс сопротивления материалов, ч. 1. Гостехтеориздат, 1955.
8. Стеклотекстолиты и другие конструкционные пластинки. Сб. статей. Оборонгиз, 1960.

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

ВПРЕССОВКА ЗАМКНУТОГО СТЕРЖНЯ В КРИВОЛИНЕЙНОЕ ОТВЕРСТИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

(резюме)

Рассматривается задача об упругом равновесии анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, в которое впрессован замкнутый стержень произвольного поперечного сечения, симметричного относительно срединной плоскости пластинки. Внешний контур стержня до деформации отличается от контура отверстия пластинки на величину допустимых упругих перемещений. Задача сводится к совместному решению уравнений (8) и (9).

В качестве примера рассмотрена бесконечная анизотропная пластинка с круговым отверстием, в которое впрессовано упругое кольцо. Для случая ортотропной пластинки при одноосном растяжении на бесконечности приводится числовой пример.

Стаття надійшла 23. XII 1965 р.

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, Б. М. КОРДУБА

РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЦИЛІНДРІВ

Задача розрахунку потенціалу осесиметричної системи електродів зводиться до розв'язку рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -q(r, z) \quad (1)$$

при відповідних граничних умовах.

З прикладної точки зору значний інтерес являє собою одержання числових, хоч і наближених, значень шуканих величин потенціалу. Од-

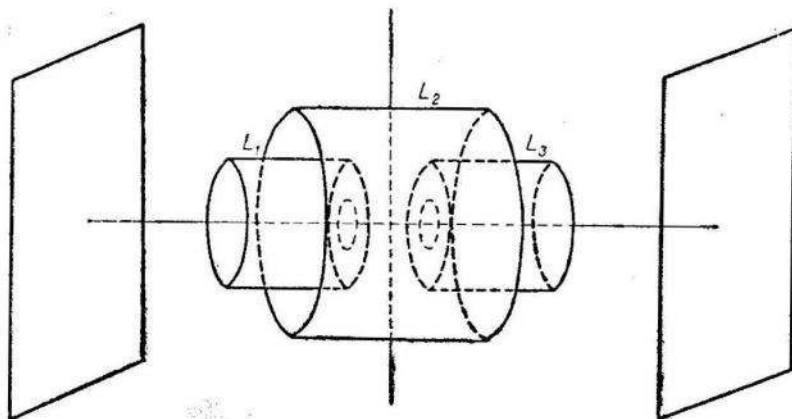


Рис. 1.

ним з таких методів є метод прямих [1, 2]. В роботі [3] даний метод застосовується до розв'язку задачі про розподіл потенціалу всередині системи, що складається з поверхонь обертання, поміщених між двома заземленими вертикальними площинами.

Розглянемо тепер систему, зображену на рис. 1. Зовні циліндри L_1 і L_3 закриті, а на внутрішніх торцях є отвори. На L_1 і L_3 задані потенціали $u=1$, а на L_2 — $u=0$. Розміри подані на рис. 2. (У зв'язку з симетрією задачі відносно осей $z=0$ і $r=0$ подано четверть осьового перерізу даної системи). По обидві сторони від центра системи на віддалі a помістимо вертикальні площини з заданим потенціалом $u=0$.

Замінімо рівняння (1) по змінній z його диференціально-різницеvim аналогом з точністю до $O(h^6)$. Система звичайних диференціальних рівнянь, яка одержиться в результаті цього, матиме вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dA_n \vec{U}(r)}{dr} - \frac{1}{h^2} G_n \vec{U}(r) = -A_n \vec{q} - \frac{1}{12} \vec{B}_n. \quad (2)$$

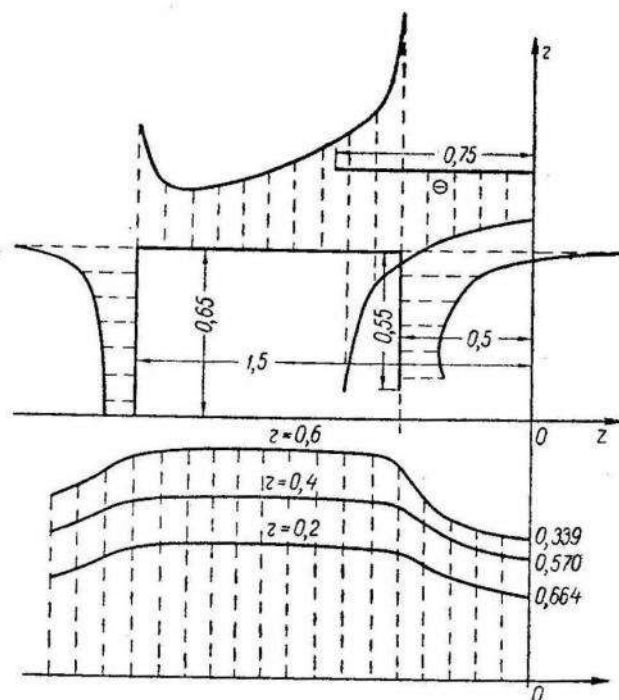


Рис. 2.

Тут

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q^{(1)}(r) \\ \vdots \\ q^{(n)}(r) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\vec{B}_n = \begin{pmatrix} -\frac{12}{h^2} U^{(0)} - \frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(0)}}{\partial r} + q^{(0)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (n-2) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{12}{h^2} U^{(n+1)} - \frac{\partial^2 U^{(n+1)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(n+1)}}{\partial r} + q^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

У зв'язку з тим, що k перших і k останніх прямих не перетинає несучих поверхонь електродів,

$$q^{(0)} = q^{(1)} = \dots = q^{(k-1)} = q^{(n-k+2)} = \dots = q^{(n)} = q^{(n+1)} = 0,$$

а

$$\vec{B}_n \equiv 0 \quad (U^{(0)} = U^{(n+1)} = 0).$$

$\vec{U}$ і G мають ті самі значення, що і в [3]. Після відповідних перетворень, як і в роботі [3], приходимо до системи рівнянь

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dV^{(k)}}{dr} - \delta_k^2 V^{(k)}(r) = -Q^{(k)}(r), \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

де

$$\delta_k^2 = \frac{\mu_k^2}{1 - \frac{\lambda_k}{12}}, \quad (5)$$

а μ_k^2 — відповідний коефіцієнт при $V^{(k)}(r)$ роботи [3].

Інтегруючи дану систему, аналогічно тому, як це робилося в [3], одержуємо таку розрахункову формулу:

$$U(r, z_k) = \frac{4}{n+1} \sum_{\alpha=\omega}^{\frac{\omega+1}{2}} \sum_{\beta=1}^{m_\alpha} q^{(\alpha, \beta)} r^{(\alpha, \beta)} \sum_{l=1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{l+1} \sin \frac{(2l-1)k\pi}{n+1} \times$$

$$\times \cos \frac{[(n+1)-2\alpha](2l-1)\pi}{n+1} \begin{cases} K_0(r^{(\alpha, \beta)} \delta_l) I_0(r \delta_l) & 0 \leq r \leq r^{(\alpha, \beta)} \\ I_0(r^{(\alpha, \beta)} \delta_l) K_0(r \delta_l) & r \geq r^{(\alpha, \beta)}, \end{cases} \quad (6)$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

де ω — порядковий номер першої прямої, що перетинає електрод; ω — номер останньої прямої, що перетинає електрод; m_α — кількість точок електрода, що лежить на прямій α .

Задача розв'язувалася при $\alpha=10, 15, 30$. Потенціал всередині системи в усіх трьох випадках збігається з точністю 2—3 знаків. На рис. 2 дано розподіл потенціалу в точках на прямих при $r=0,2$, $r=0,4$, $r=0,6$, а також розподіл густин зарядів $q(r, z)$ на кожному електроді.

Для знаходження невідомих параметрів $q^{(\alpha, \beta)}$ складаємо систему алгебраїчних рівнянь m -го порядку, де m — кількість невідомих параметрів (в нашому випадку $m=30$). Дана система має вигляд

$$\sum_{j=1}^{30} a_{ij} q_j^{(\alpha, \beta)} = b_i, \quad (i=1, 2, \dots, 30).$$

Вона легко одержується із (6). Якщо невідомі параметри $q^{(\alpha, \beta)}$ перенумерувати на $q_j^{(\alpha, \beta)}$ ($j=1, 2, \dots, 30$), то коефіцієнтом при $q_j^{(\alpha, \beta)}$ в i -му рівнянні буде

$$a_{ij} = \frac{4}{n+1} r_{ij}^{(\alpha, \beta)} \sum_{l=1}^{\frac{n+1}{2}} (-1)^{l+1} \sin \frac{(2l-1)\alpha\pi}{n+1} \cos \frac{[(n+1)-2\alpha](2l-1)\pi}{n+1} \times$$

$$\times \begin{cases} K_0(r_{ij}^{(\alpha, \beta)} \delta_l) I_0(r_{ii} \delta_l) & (0 \leq r_{ii} \leq r_{ij}^{(\alpha, \beta)}) \\ I_0(r_{ij}^{(\alpha, \beta)} \delta_l) K_0(r_{ii} \delta_l) & (r_{ii} \geq r_{ij}^{(\alpha, \beta)}), \end{cases}$$

де $r_{ij}^{(\alpha, \beta)} = r_{ji}^{(\alpha, \beta)}$, що відповідають $q_j^{(\alpha, \beta)}$ в i -му рівнянні, а вільний член $b_i = U(r_{ii}, z_a)$ — відоме значення потенціалу в точці контура (r_{ii}, z_a) .

Зауважимо, що достатньо обчислити діагональні елементи даної матриці і елементи над діагоналлю. Елементи під діагоналлю можна одержати за формулою

$$a_{ji} = a_{ij} \frac{r_{ji}^{(\alpha, \beta)}}{r_{ij}^{(\alpha, \beta)}}.$$

Розрахунок на електронно-обчислювальній машині М-20 займає 2,5—3 хв.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. Г. Слободянский. Способ интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. Прикл. матем. и механ., т. 3, вып. 1, 1939.
2. В. Н. Фаддеева. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, т. 28, 1949.
3. Т. Л. Мартынович, Б. М. Кордуба. Применение метода прямых в сочетании с методом интегральных преобразований к расчету электростатических полей с осевой симметрией. Журн. вычисл. математики и матем. физики, т. 5, № 6, 1965.

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ, Б. М. КОРДУБА

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ ЦИЛИНДРОВ

(резюме)

Решается задача распределения потенциала внутри системы электродов в виде поверхностей вращения с заданными на них потенциалами. Задача доведена до числа.

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, В. Г. КОСТЕНКО

ЕЛІПТИЧНА ДИСТОРСІЯ ЕЛЕКТРОННОЇ ЛІНЗИ

В роботі [1] методом збурень було встановлено, що у випадку симетричної еліптичної дисторсії електронної лінзи поле потенціалу може бути зображене у вигляді

$$u(r, z, \theta) = u_0(r, z) + \lambda u_1(r, z) \cos 2\theta + O(\lambda^2), \quad (1)$$

де $u_0(r, z)$ — розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

зовні електродів l_1, l_2, l_3 незбуреної осесиметричної лінзи, який задовольняє умови

$$u_0(r, z)|_{l_1, l_3} = 1, \quad u_0(r, z)|_{l_2} = 0, \quad \frac{\partial u_0(0, z)}{\partial r} = 0; \quad (3)$$

$u_1(r, z)$ — розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{4}{r^2} u_1 = 0, \quad (4)$$

який задовольняє умови

$$u_1(r, z)|_{l_1, l_3} = a_1 \frac{\partial u_0}{\partial n}, \quad u_1(r, z)|_{l_2} = a_2 \frac{\partial u_0}{\partial n}, \quad u_1(0, z) = 0; \quad (5)$$

λ — параметр збурення; a_1 і a_2 — радіуси електродів l_1, l_3 і l_2 відповідно; n — зовнішня до поверхні електродів нормаль.

У випадку несиметричної еліптичної дисторсії досить ввести два параметри збурення, а для знаходження поля потенціалу такої лінзи потрібно буде розв'язати дві задачі для рівняння (4) з умовами вигляду (5).

У тій же роботі [1] була запропонована схема знаходження наближених розв'язків задач (2), (3) і (4), (5) з застосуванням методу прямих і спряжених. За цією схемою легко одержується поле потенціалу в аналітичній формі на окремих прямих, перпендикулярних до електродів лінзи. Але пізніше з'ясувалося, що таке поле потенціалу мало придатне для знаходження траєкторій руху електронів лінзи на ЕОМ.

Наведемо тепер схему знаходження наближених розв'язків задач (2), (3) і (4), (5), основу на використанні власних функцій диск-

ретного аргументу [2]. Остання приводить до одержання числового поля потенціалу, з якого легко знаходяться траєкторії руху електронів лінзи на ЕОМ.

Розглянемо, наприклад, задачу (4), (5). Розв'язок цієї задачі прямує до нуля на нескінченності, а тому в межах точності, яка вимагається, завжди можна підібрати такий паралелепіпед, одна грань якого проходить через вісь симетрії лінзи, а інші симетрично віддалені від лінзи настільки, що на них шукану функцію можна покласти рівною нулеві.

Граничні умови (5) виражаються через нормальну похідну потенціалу осесиметричної лінзи, яка має розрив при переході через електроди. Тому, природно, під $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ в умовах (5) розуміти граничні значення цієї нормальної похідної $\frac{\partial u_0}{\partial n^-}$ і $\frac{\partial u_0}{\partial n^+}$ при наближенні по нормалі до електродів відповідно знизу і зверху.

Отже, будемо шукати в прямокутнику D розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{4}{r^2} u_1 = 0, \quad (4)$$

який задовольняє умови

$$\begin{aligned} u_1(r_\alpha \pm 0, z) &= a_1 \frac{\partial u_0}{\partial n^\pm} \text{ на } l_1 \text{ і } l_3; \\ u_1(r_\beta \pm 0, z) &= a_2 \frac{\partial u_0}{\partial n^\pm} \text{ на } l_2; \\ u_1(r, z) &= 0 \text{ на } S, \end{aligned} \quad (5')$$

де $r=r_\alpha$ і $r=r_\beta$ — прямі, на яких лежать електроди l_1 , l_3 і l_2 відповідно; D — перетин раніше підбраного паралелепіпеда з площиною z, r ; S — границя D (рис. 1).

Замінюючи похідні кінцево-різницевиими відношеннями у вузлі $z_i = z_0 + ih_1$, $r_k = kh$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, \beta - 1, \beta + 1, \dots, m$) і позначаючи $u_1(r_k, z_i) = u_{1i}(r_k)$, одержимо з рівняння (4)

$$R \vec{u}_1(r_k) + \gamma^2 T \vec{u}_1(r_k) = 0, \quad (6)$$

де

$$\gamma = \frac{h}{h_1}, \quad R u_{1i}(r_k) = \left(1 + \frac{h}{r_k}\right) u_{1i}(r_{k+1}) - \left(2 + \frac{h}{r_k} + \frac{4h^2}{r_k^2}\right) u_{1i}(r_k) + u_{1i}(r_{k-1});$$

$$\vec{u}_1(r_k) = \begin{pmatrix} u_{11}(r_k) \\ \vdots \\ u_{1n}(r_k) \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тому що $T = P \Lambda P$, $P = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left\| \sin \frac{ij\pi}{(n+1)} \right\|_{i,j=1}^n$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_k = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

то домножаючи (6) зліва на P і позначаючи $P\vec{u}_1(r_k) = \vec{u}_1(r_k)$, одержимо

$$R\vec{u}_1(r_k) + \gamma^2 \Lambda \vec{u}_1(r_k) = 0, \quad (7)$$

що після підстановки оператора R і $r_k = kh$ дає

$$(k+1)\vec{u}_{1i}(r_{k+1}) - (2k^2 + k + 4)\vec{u}_{1i}(r_k) + k^2\vec{u}_{1i}(r_{k-1}) + \gamma^2 k^2 \lambda_i \vec{u}_{1i}(r_k) = 0, \quad (8)$$

($i = 1, 2, \dots, n$), ($k = 1, \dots, \alpha-1, \alpha+1, \dots, \beta-1, \beta+1, \dots, m$).

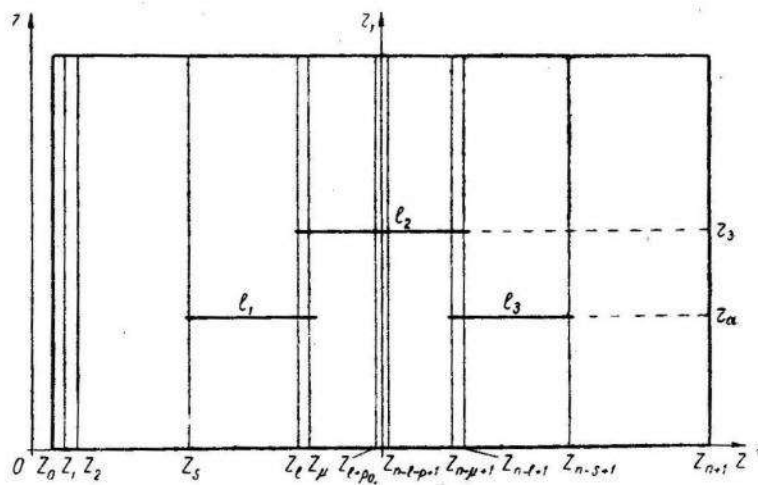


Рис. 1.

Розіб'ємо тепер прямокутник D прямими $r = r_\alpha$ і $r = r_\beta$ на частини D_1, D_2, D_3 так, щоб в D_1 увійшли нижні сторони поверхонь електродів l_1 і l_3 , в D_2 — верхні сторони поверхонь електродів l_1, l_3 та нижня сторона поверхні електроду l_2 , в D_3 — верхня сторона поверхні електроду l_2 .

Позначимо тепер через $q(r_\alpha, z)$ і $q(r_\beta, z)$ стрибки функції $u_1(r, z)$ у напрямі осі or на прямих $r = r_\alpha$ і $r = r_\beta$ відповідно, а через $\sigma(r_\alpha, z)$ і $\sigma(r_\beta, z)$ стрибки $\frac{\partial u_1}{\partial r}$ у напрямі or на прямих $r = r_\alpha$ і $r = r_\beta$ відповідно, тобто

$$q(r_k, z) = u_1(r_k + 0, z) - u_1(r_k - 0, z) \quad (k = \alpha, \beta);$$

$$\sigma(r_k, z) = \left. \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|_{r=r_k+0} - \left. \frac{\partial u_1}{\partial r} \right|_{r=r_k-0} \quad (k = \alpha, \beta). \quad (9)$$

Тоді, очевидно, згідно з попередніми позначеннями, покриттям області D сіткою прямих, симетричністю та постановкою задачі (4), (5), матимемо для $k = \alpha, \beta$ стовпці

$$\vec{q}(r_\alpha) = (0, \dots, 0, q_\alpha(r_\alpha), \dots, q_\beta(r_\alpha), 0, \dots, 0, q_\mu(r_\alpha), \dots, q_s(r_\alpha), 0, \dots, 0);$$

$$\begin{aligned}\vec{q}(r_\beta) &= (0, \dots, 0, q_l(r_\beta), \dots, q_{l+p}(r_\beta), q_{l+p}(r_\beta), \dots, q_l(r_\beta), 0, \dots, 0); \\ \vec{\sigma}(r_\alpha) &= (0, \dots, 0, \sigma_s(r_\alpha), \dots, \sigma_\mu(r_\alpha), 0, \dots, 0, \sigma_\mu(r_\alpha), \dots, \sigma_s(r_\alpha), 0, \dots, 0); \\ \vec{\sigma}(r_\beta) &= (0, \dots, 0, \sigma_l(r_\beta), \dots, \sigma_{l+p}(r_\beta), \dots, \sigma_{l+p}(r_\beta), \dots, \sigma_l(r_\beta), 0, \dots, 0),\end{aligned}\quad (10)$$

причому ненульові елементи стовпців $\vec{q}(r_k)$ для $k=\alpha, \beta$ знайдуться за формулами

$$\vec{q}(r_k z) = a_\eta \left(\frac{\partial u_0}{\partial n^+} - \frac{\partial u_0}{\partial n^-} \right) \Big|_{r=r_k} \quad \eta = 1, 2, \quad (11)$$

при відомому розв'язку задачі (2), (3).

Якщо позначити через $\tilde{q}(r_\alpha, z)$ і $\tilde{q}(r_\beta, z)$ стрибки функції $\tilde{u}_1(r, z)$, а через $\tilde{\sigma}(r_\alpha, z)$ і $\tilde{\sigma}(r_\beta, z)$ стрибки $\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial r}$ при переході у напрямі осі or через прямі $r=r_\alpha$ і $r=r_\beta$, то одержимо

$$\tilde{q}_i(r_k) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} q_j(r_k); \quad (k=\alpha, \beta) \quad (12)$$

$$\tilde{\sigma}_l(r_k) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \sigma_j(r_k).$$

Отже, ми приходимо до такої задачі спряження: знайти розв'язки рівнянь (8) у вигляді

$$\tilde{u}_{1l}(r_k) = \begin{cases} \tilde{u}_{1l}^{(1)}(r_k) & 1 \leq k \leq \alpha - 1; \\ \tilde{u}_{1l}^{(2)}(r_k) & \alpha + 1 \leq k \leq \beta - 1; \\ \tilde{u}_{1l}^{(3)}(r_k) & \beta + 1 \leq k \leq m \end{cases}$$

і які б задовольняли умови

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{1l}^{(1)}(r_0) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} u_{1j}^{(1)}(r_0) = 0; \\ \tilde{u}_{1l}^{(2)}(r_\alpha) - \tilde{u}_{1l}^{(1)}(r_\alpha) &= \tilde{q}_i(r_\alpha), \quad \frac{d\tilde{u}_{1l}^{(2)}}{dr} \Big|_{r=r_\alpha} - \frac{d\tilde{u}_{1l}^{(1)}}{dr} \Big|_{r=r_\alpha} = \tilde{\sigma}_l(r_\alpha); \\ \tilde{u}_{1l}^{(3)}(r_\beta) - \tilde{u}_{1l}^{(2)}(r_\beta) &= \tilde{q}_i(r_\beta), \quad \frac{d\tilde{u}_{1l}^{(3)}}{dr} \Big|_{r=r_\beta} - \frac{d\tilde{u}_{1l}^{(2)}}{dr} \Big|_{r=r_\beta} = \tilde{\sigma}_l(r_\beta); \\ \tilde{u}_{1l}^{(3)}(r_{m+1}) &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} u_{1j}^{(3)}(r_{m+1}) = 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Загальний розв'язок рівнянь (8) для вказаних проміжків зміни k матиме вигляд

$$\tilde{u}_{1i}(r_k) = \begin{cases} \tilde{u}_{1i}^{(1)}(r_k) = A_i^{(1)} P_i(r_k) + B_i^{(1)} T_i(r_k) & 1 \leq k \leq \alpha - 1; \\ \tilde{u}_{1i}^{(2)}(r_k) = A_i^{(2)} P_i(r_k) + B_i^{(2)} T_i(r_k) & \alpha + 1 \leq k \leq \beta - 1; \\ \tilde{u}_{1i}^{(3)}(r_k) = A_i^{(3)} P_i(r_k) + B_i^{(3)} T_i(r_k) & \beta + 1 \leq k \leq m, \end{cases} \quad (14)$$

де $P_i(r_k)$ та $T_i(r_k)$ — власні функції дискретного аргументу рівняння (8), які одержуються з умов

$$P_i(r_0) = 0, \quad P_i(r_1) = 1; \quad (15)$$

$$T_i(r_0) = 1, \quad T_i(r_1) = 0$$

за рекурентними формулами

$$P_i(r_k) = \frac{2(k-1)^2 + k + 3 - \lambda_i \gamma^2 (k-1)^2}{(k-1)k} P_i(r_{k-1}) - \frac{k-1}{k} P_i(r_{k-2}); \quad (16)$$

$$T_i(r_k) = \frac{2(k-1)^2 + k + 3 - \lambda_i \gamma^2 (k-1)^2}{(k-1)k} T_i(r_{k-1}) - \frac{k-1}{k} T_i(r_{k-2}).$$

Задовольняючи умови (13), одержимо

$$B_i^{(1)} = 0, \quad B_i^{(2)} = \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\alpha) P_i(r_\alpha) - \tilde{q}(r_\alpha) \frac{dP_i}{dr} \Big|_{r=r_\alpha}}{\Delta_{i, \alpha+1}};$$

$$B_i^{(3)} = \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\beta) P_i(r_\beta) - \tilde{q}_i(r_\beta) \frac{dP_i}{dr} \Big|_{r=r_\beta}}{\Delta_{i, \beta+1}} + \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\alpha) P_i(r_\alpha) - \tilde{q}_i(r_\alpha) \frac{dP_i}{dr} \Big|_{r=r_\alpha}}{\Delta_{i, \alpha+1}}; \quad (17)$$

$$A_i^{(3)} = -B_i^{(3)} \frac{T_i(r_{m+1})}{P_i(r_{m+1})}, \quad A_i^{(2)} = A_i^{(3)} + \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\beta) T_i(r_\beta) - \tilde{q}_i(r_\beta) \frac{dT_i}{dr} \Big|_{r=r_\beta}}{\Delta_{i, \beta+1}};$$

$$A_i^{(1)} = A_i^{(2)} + \frac{\tilde{\sigma}_i(r_\alpha) T_i(r_\alpha) - \tilde{q}_i(r_\alpha) \frac{dT_i}{dr} \Big|_{r=r_\alpha}}{\Delta_{i, \alpha+1}},$$

де

$$\Delta_{i, k+1} = \begin{vmatrix} P_i(r_k) & T_i(r_k) \\ \frac{dP_i}{dr} \Big|_{r=r_k} & \frac{dT_i}{dr} \Big|_{r=r_k} \end{vmatrix} \quad \text{для } k = \alpha, \beta.$$

Легко встановити, замінюючи похідні кінцево-різницевиими відношеннями і використовуючи формули (16), що

$$\Delta_{i, k+1} = -\frac{1}{h(k+1)}.$$

Враховуючи, що $PP=E$ (одична матриця), маємо

$$P\vec{u}_1 = PP\vec{u}_1(r_k) = \vec{u}_1(r_k),$$

тобто

$$u_{1i}(r_k) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \tilde{u}_{1j}(r_k). \quad (18)$$

Прирівнюючи тепер, згідно з (5'),

$$u_{1i}^{(1)}(r_\alpha) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \tilde{u}_{1j}^{(1)}(r_\alpha) = a_1 \left. \frac{\partial u_0}{\partial n} \right|_{r=r_\alpha} \quad i=s, \dots, \mu; \quad (19)$$

$$u_{1i}^{(2)}(r_\beta) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \sin \frac{ij\pi}{n+1} \tilde{u}_{1j}^{(2)}(r_\beta) = a_2 \left. \frac{\partial u_0}{\partial n} \right|_{r=r_\beta} \quad i=l, \dots, l+p$$

і використовуючи при цьому формули (14), (17), (12) та (11), одержимо систему $\mu+p-s+2$ рівнянь для визначення

$$\sigma_s(r_\alpha), \dots, \sigma_\mu(r_\alpha), \sigma_l(r_\beta), \dots, \sigma_{l+p}(r_\beta).$$

Після знаходження останніх невідомих наближень розв'язок розглядуваної задачі набере вигляду

$$u_{1i}(r_k) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^n \left\{ \begin{array}{l} A_i^{(1)} P_i(r_k) + B_i^{(1)} T_i(r_k) \\ 1 \leq k \leq \alpha-1 \\ A_i^{(2)} P_i(r_k) + B_i^{(2)} T_i(r_k) \\ \alpha+1 \leq k \leq \beta-1 \\ A_i^{(3)} P_i(r_k) + B_i^{(3)} T_i(r_k) \\ \beta+1 \leq k \leq m \end{array} \right\} \sin \frac{ij\pi}{n+1}. \quad (20)$$

Знаходження $P_i(r_k)$ та $T_i(r_k)$ за формулами (16) при великих i, k приводить до переповнення розрядної сітки ЕОМ і додаткових затрат машинного часу. Щоб уникнути цього недоліку, комбінації функцій $P_i(r_k)$ та $T_i(r_k)$, що входять в систему рівнянь (19) і формули (20), перетворюються за допомогою ланцюгових дробів.

За викладеною схемою на машині «Минск-2» були розв'язані задачі (2), (3) та (4), (5), при цьому взято $s=148$, $\mu=180$, $l=180$, $l+p=184$, $n=368$, $m=169$, $a_1=1$, $a_2=1,7$, $h_1=0,15$, $h=0,05$.

Розв'язки обох задач знайдено в 1300 вузлах сітки, які розміщені в області лінзи ($148 \leq i \leq 184$; $0 \leq k \leq 35$) і використовуються для знаходження траєкторій руху електронів. Частина поля потенціалів — розв'язків задач (2), (3) і (4), (5) зображена в таблицях.

Методом Штермера були знайдені траєкторії руху електронів осесиметричної лінзи, а також при різних значеннях параметра λ і кута Θ з використанням формули

$$u(r, z, \Theta) = u_0(r, z) + \lambda u_1(r, z) \cos 2\Theta, \quad (1')$$

$u_{0i}(r_k)$							
$k \backslash i$		1	2	3	4	5	6
172		0,98708	0,98718	0,98736	0,98753	0,98800	0,98844
173		0,98152	0,98165	0,98191	0,98229	0,98280	0,98342
174		0,97364	0,97382	0,97417	0,97469	0,97539	0,97625
175		0,96259	0,96282	0,96329	0,96399	0,96492	0,96608
176		0,94733	0,94763	0,94822	0,94911	0,95031	0,95180
177		0,92676	0,92711	0,92780	0,92885	0,93027	0,93206
178		0,89996	0,90032	0,90104	0,90212	0,90361	0,90551
179		0,86679	0,86707	0,86764	0,86851	0,86973	0,87132
180		0,82856	0,82866	0,82885	0,82915	0,82961	0,83023
181		0,78865	0,78847	0,78809	0,78783	0,78678	0,78586
182		0,75214	0,75166	0,75069	0,74922	0,74723	0,74471
183		0,72433	0,72362	0,72219	0,72002	0,71709	0,71335
184		0,70933	0,70850	0,70683	0,70429	0,70087	0,69651

$u_{1i}(r_k)$						
$k \backslash i$		1	2	3	4	5
172		-0,00011	-0,00037	-0,00080	-0,00137	-0,00208
173		-0,00016	-0,00055	-0,00118	-0,00208	-0,00309
174		-0,00024	-0,00082	-0,00175	-0,00301	-0,00458
175		-0,00035	-0,00121	-0,00257	-0,00443	-0,00676
176		-0,00050	-0,00173	-0,00370	-0,00639	-0,00978
177		-0,00068	-0,00240	-0,00513	-0,00888	-0,01364
178		-0,00088	-0,00309	-0,00665	-0,01157	-0,01787
179		-0,00103	-0,00361	-0,00776	-0,01359	-0,02112
180		-0,00109	-0,00363	-0,00784	-0,01372	-0,02141
181		-0,00086	-0,00300	-0,00650	-0,01130	-0,01755
182		-0,00057	-0,00198	-0,00423	-0,00733	-0,01125
183		-0,00029	-0,00099	-0,00210	-0,00356	-0,00530
184		-0,00012	-0,00042	-0,00085	-0,00135	-0,00182

траекторії руху електронів лінзи, збуреної симетричною еліптичною дисторсією. Останні можуть бути використані для визначення оптичних характеристик таких лінз.

ЛІТЕРАТУРА

1. Є. С. Дорожовський, В. Г. Костенко. Поле потенціалу електронної лінзи з порушеною осью симетрії. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.
2. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд-во Киев. ун-та, 1962.

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, В. Г. КОСТЕНКО

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ДИСТОРСИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ЛИНЗЫ

(резюме)

В работе дается схема нахождения потенциала электронной линзы, мало отличающейся от симметрической (случай эллиптической дисторсии) с применением собственных функций дискретного аргумента. Приводится рассчитанное поле как осесимметрической линзы, так и возмущенной эллиптической дисторсией.

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Л. Й. ОЩИПКО

ЗГИН ТОНКОЇ НЕОДНОРІДНОЇ ПЛИТИ З КРУГЛИМ ОПОРНИМ РЕБРОМ ЖОРСТКОСТІ

Розглянемо задачу про довільний згин круглої плити кінцевих розмірів, вільно опертої вздовж внутрішнього кругового опорного ребра жорсткості. Розв'язок записується через комплексні потенціали, для визначення яких використовуються умови опертя, підкріплення і спряження на ребрі, а також умови першої основної задачі на зовнішньому контурі плити. Методом інтегралів типу Коші задача звелась до системи двох алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих постійних коефіцієнтів розкладу шуканих функцій в комплексні ряди Фур'є.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається тонка неоднорідна плита, серединна площа якої займає внутрішність кола L радіуса R_1 . Плита вільно оперта вздовж підкріплюючого тонкого ребра жорсткості по колу Γ радіуса R . Поведінка опорного ребра описується теорією малих деформацій тонких криволінійних стержнів. Допускається, що одна з головних центральних осей інерції поперечного перерізу ребра лежить в серединній площині плити xOy . Плита навантажена довільним поперечним навантаженням $q_k(x, y)$ ($k=1, 2$) відповідно в областях S_1 ($r \leq R$) і S_2 ($R \leq r \leq R_1$). Вздовж Γ на плиту діють згинаючі моменти $m_0(\theta)$, а по L — згинаючі моменти $m_2(\theta)$ і перерізуючі сили $p_2(\theta)$ (r, θ — полярні координати з полюсом в центрі плити). Циліндрична жорсткість плити дорівнює $D_k = \text{const}$ в областях S_k ($k=1, 2$) відповідно.

Розв'язок основного диференціального рівняння згину плит

$$D_k \Delta \Delta w_k = q_k(x, y) \quad (k = 1, 2) \quad (1.1)$$

запишемо у вигляді

$$w_k = 2 \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi_k^*(z) + \chi_k^*(z)] + w_{0k}(\bar{z}, z) \quad (k = 1, 2). \quad (1.2)$$

Тут w_k — прогин плити в області S_k ($k=1, 2$), а $\varphi_k^*(z)$ і $\chi_k^*(z)$ — аналітичні функції в тій же області; $w_{0k}(\bar{z}, z)$ — будь-які часткові інтеграли рівняння (1.1). Без обмеження загальності прийемо, що

$$w_{01} = w_{02}; \quad \frac{\partial w_{01}}{\partial r} = \frac{\partial w_{02}}{\partial r} \quad \text{на } \Gamma \quad (1.3)$$

На контурі Γ шукані прогини повинні задовольняти такі умови підкріплення, опертя і спряження (див. [3], стор. 110):

$$(\delta_1 + \nu_1 - \lambda \nu_2) \frac{\partial w_1}{\partial r} + R \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} - \lambda R \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} - \delta_2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial r \partial \theta^2} = -\frac{R}{D_1} m_0(\theta); \quad (1.4)$$

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0; \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r}, \quad (1.6)$$

де $\lambda = \frac{D_2}{D_1}$, а $\delta_1 = \frac{A}{RD_1}$ і $\delta_2 = \frac{C}{RD_1}$ — відносні жорсткості опорного ребра на згин і кручення.

Крім того, на зовнішній границі плити L повинна виконуватись умова першої основної задачі (див. [3], стор. 23).

$$-\kappa \bar{\varphi}_2^*(z) + z \bar{\varphi}_2^{*'}(z) + \chi_2^{*'}(z) = F_2(z) - i C_1 \bar{z} + C_2, \quad (1.7)$$

де $\kappa = (3 + \nu_2)/(1 - \nu_2)$

$$F_2(z) = \frac{1}{2D_2(1 - \nu_2)} \left\{ \int_0^s \left[m_2(s_1) - i \int_0^{s_1} p_2(s_2) ds_2 \right] d\bar{z} - i \int_0^s \left[m^0(s_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - i \int_0^{s_1} p^0(s_2) ds_2 \right] d\bar{z}. \right. \quad (1.8)$$

Тут $m^0(s)$ і $p^0(s)$ позначають момент і перерізуючу силу, що відповідають частковому розв'язку w_{02} .

Введемо заміну $z = R\zeta$ і позначимо

$$\varphi_k^*(z) = \varphi_k^*(R\zeta) = \varphi_k(\zeta), \quad \chi_k^*(z) = \chi_k^*(R\zeta) = R\chi_k(\zeta). \quad (1.9)$$

При такій заміні коло Γ перейде в коло γ одиничного радіуса, а коло L — в коло l радіуса $\eta = \frac{R_1}{R}$.

Підставляючи вирази (1.2) в умови (1.4), (1.5) і враховуючи позначення (1.9) та співвідношення (1.9) статті [5], отримуємо

$$2\text{Re} \{ \delta_2 \sigma^2 \varphi_1'''(\sigma) + 2\delta_2 \sigma \varphi_1''(\sigma) + [\delta_1 - \delta_2 + \lambda(1 - \nu_2) + 3 + \nu_1] \varphi_1'(\sigma) + \\ + [\delta_1 + \delta_2 + \lambda(1 - \nu_2) - (1 - \nu_1)] \frac{1}{\sigma} \varphi_1(\sigma) + \delta_2 [\sigma \chi_1'''(\sigma) + 3\chi_1''(\sigma)] \sigma^2 + \\ + [\delta_1 + \delta_2 + \lambda(1 - \nu_2) - (1 - \nu_1)] \sigma \chi_1''(\sigma) - 4\lambda \varphi_2'(\sigma) = F_1(\sigma) \text{ на } \gamma, \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{\sigma} \varphi_1(\sigma) + \chi_1(\sigma) + \sigma \overline{\varphi_1(\sigma)} + \overline{\chi_1(\sigma)} = 0, \text{ на } \gamma, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{\sigma} \varphi_2(\sigma) + \chi_2(\sigma) + \sigma \overline{\varphi_2(\sigma)} + \overline{\chi_2(\sigma)} = 0 \text{ на } \gamma, \quad (1.12)$$

де $\sigma = e^{i\theta}$,

$$F_1(\sigma) = -m_0(\Theta) \frac{R}{D_1} - \left[(\delta_1 + \nu_1 - \lambda \nu_2) \frac{\partial w_{01}}{\partial r} + R \frac{\partial^2 w_{01}}{\partial r^2} - \right. \\ \left. - \lambda R \frac{\partial^2 w_{02}}{\partial r^2} - \delta_2 \frac{\partial^3 w_{01}}{\partial r \partial \Theta^2} \right] \Gamma.$$

Для перетворення умови (1.6) використаємо той факт, що

$$\frac{\partial w_1}{\partial \Theta} = 0; \quad \frac{\partial w_2}{\partial \Theta} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (1.13)$$

і складемо таку комплексну комбінацію:

$$\frac{\partial w_1}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \Theta} = \frac{\partial w_2}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \Theta} \quad \text{на } \Gamma. \quad (1.14)$$

Одночасно згадуючи, що

$$\frac{\partial w_k}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial w_k}{\partial \Theta} = 2[\varphi'_k(\sigma) + \sigma \chi'_k(\sigma) + \overline{\sigma \varphi_k(\sigma)}] + \frac{\partial w_{0k}}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial w_{0k}}{\partial \Theta}, \quad (1.15)$$

підставимо співвідношення (1.15) в (1.14), враховуючи умову (1.3). У результаті отримаємо

$$\varphi_1'(\sigma) + \sigma \chi_1'(\sigma) + \overline{\sigma \varphi_1(\sigma)} = \varphi_2'(\sigma) + \sigma \chi_2'(\sigma) + \overline{\sigma \varphi_2(\sigma)} \quad \text{на } \gamma. \quad (1.16)$$

Граничну умову (1.7) запишемо у вигляді

$$-x \overline{\varphi_2(t)} + \frac{\eta^2}{t} \varphi_2'(t) + \chi_2'(t) = F_2^*(t) - i C_1 \frac{\eta^2}{t} + C_2 \quad \text{на } l. \quad (1.17)$$

Тут t афікс точки на колі l , $\eta = \frac{R_1}{R}$,

$$F_2^*(t) = F_2(R\zeta)|_l.$$

Отже, граничними умовами тепер є (1.10)–(1.12), (1.15) і (1.17).

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Враховуючи умову (1.3), зобразимо функції $\varphi_2(\zeta)$ і $\chi_2(\zeta)$ у вигляді

$$\varphi_2(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta), \quad \chi_2(\zeta) = \chi_0(\zeta) + \chi_*(\zeta) + B \ln \zeta, \quad (2.1)$$

де B — дійсна постійна; $\varphi_0(\zeta)$ і $\chi_0(\zeta)$ — функції, аналітичні в області $|\zeta| < \eta$; $\varphi_*(\zeta)$ і $\chi_*(\zeta)$ — функції, аналітичні в області $|\zeta| \geq 1$.

Домножаючи умови (1.11), (1.12), (1.16) і (1.10) на $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ і інтегруючи їх по γ при $|\zeta| < 1$ [2], отримуємо

$$\chi_1(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} \varphi_1(\zeta); \quad (2.2)$$

$$a_1 + a_0 = 0; \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\zeta} \varphi_0(\zeta) + \chi_0(\zeta) + \zeta \overline{\varphi_*} \left(\frac{1}{\zeta} \right) + \overline{\chi_*} \left(\frac{1}{\zeta} \right) = 0; \quad (2.4)$$

$$d_1 + b_0 = 0; \quad (2.5)$$

$$\zeta \bar{\varphi}_* \left(\frac{1}{\zeta} \right) = \varphi_1'(\zeta) + \zeta \chi_1'(\zeta) - \varphi_0'(\zeta) - \zeta \chi_0'(\zeta) - \frac{B}{2}; \quad (2.6)$$

$$2(a_1 - d_1) = B; \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \delta_2 \zeta^2 \varphi_1'''(\zeta) + 2\delta_2 \zeta \varphi_1''(\zeta) + [\delta_1 - \delta_2 + \lambda(1 - \nu_2) + 3 + \nu_1] \varphi_1'(\zeta) + \\ & + [\delta_2 + \delta_1 + \lambda(1 - \nu_2) - (1 - \nu_1)] \left[\frac{1}{\zeta} \varphi_1(\zeta) + \zeta \chi_1'(\zeta) \right] + \\ & + \delta_2 [\zeta^3 \chi_1'''(\zeta) + 3\zeta^2 \chi_1''(\zeta)] - 4\lambda \left[\varphi_0'(\zeta) + d_1 + \bar{\varphi}_* \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right] + \\ & + 2[\delta_1 + \lambda(1 - \nu_2) + 1 + \nu_1] a_1 = F(\zeta); \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$[\delta_1 + \lambda(1 - \nu_2) + 1 + \nu_1] a_1 - 2\lambda d_1 = \frac{1}{4} F(0), \quad (2.9)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= \varphi_1'(0); \quad a_0 = \chi_1(0); \quad d_1 = \varphi_0'(0); \\ b_0 &= \chi_0(0); \quad F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F_1(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

При цьому внаслідок відомої довільності при визначенні шуканих функцій було прийнято, що

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \operatorname{Im} \varphi_1'(0) = \operatorname{Im} \chi_1(0) = 0; \\ \varphi_0(0) &= \operatorname{Im} \varphi_0'(0) = \operatorname{Im} \chi_0(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Диференціюючи співвідношення (2.2) і (2.6), підставляємо їх в (2.8) і отримуємо звичайне диференціальне рівняння на комплексній площині для функції $\varphi_1(\zeta)$:

$$\begin{aligned} & [(\delta_2 + \delta_1) + \lambda(1 - \nu_2) - (1 - \nu_1) - 4\lambda] \frac{1}{\zeta} \varphi_1(\zeta) + (2 - \delta_2 + 2\lambda) \varphi_1'(\zeta) + \\ & + \delta_2 \zeta \varphi_1''(\zeta) = G(\zeta) - \lambda B + 2\lambda [\zeta \varphi_0''(\zeta) + \zeta^2 \chi_0''(\zeta)]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тут

$$G(\zeta) = \frac{1}{8\pi i} \int_{\Gamma} F_1(\sigma) \frac{\sigma + \zeta}{\sigma(\sigma - \zeta)} d\sigma.$$

Розв'язуючи (2.12) так само, як в [5], знаходимо

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= \frac{1}{\delta_2(\mu_2 - \mu_1)} \left\{ \zeta^{\mu_2+1} \int_0^\zeta [G(\zeta) - \lambda B] \zeta^{-(\mu_2+1)} d\zeta - \right. \\ & \left. - \zeta^{\mu_1+1} \int_0^\zeta [G(\zeta) - \lambda B] \zeta^{-(\mu_1+1)} d\zeta \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\lambda}{\delta_2(\mu_2 - \mu_1)} \left\{ \zeta^{\mu_2+1} \int_0^\zeta [\zeta \varphi_0^*(\zeta) + \zeta^2 \chi_0^*(\zeta)] \zeta^{-(\mu_2+1)} d\zeta - \right. \\ \left. - \zeta^{\mu_1+1} \int_0^\zeta [\zeta \varphi_0^*(\zeta) + \zeta^2 \chi_0^*(\zeta)] \zeta^{-(\mu_1+1)} d\zeta \right\}, \quad (2.14)$$

де

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{\delta_2} \left\{ -(1+\lambda) \pm \sqrt{(1+\lambda)^2 - \delta_2[\delta_1 - \lambda(1+\nu_2) + (1+\nu_1)]} \right\}. \quad (2.15)$$

З рівнянь (2.3), (2.5), (2.7) і (2.8) визначаємо постійні a_0 , a_1 , b_0 , d_1 у вигляді

$$a_1 = -a_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{F(0) - 4\lambda B}{\delta_1 - \lambda(1+\nu_2) + (1+\nu_1)}; \\ d_1 = -b_0 = \frac{1}{\delta_1 - \lambda(1+\nu_2) + (1+\nu_1)} \left[\frac{1}{4} F(0) - \frac{\delta_1 + \lambda(1-\nu_2) + (1+\nu_1)}{2} B \right]. \quad (2.16)$$

Зауважимо, що після визначення коефіцієнта B в чисельнику (2.16) з'являється множник, рівний знаменнику.

Зобразимо тепер всі функції $\varphi_1(\zeta)$, $\chi_1(\zeta)$; $\varphi_0(\zeta)$, $\chi_0(\zeta)$; $\varphi_*(\zeta)$, $\chi_*(\zeta)$ у вигляді комплексних рядів Фур'є з невідомими постійними коефіцієнтами

$$\varphi_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \zeta^{n+1}, \quad \chi_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \zeta^n; \quad (2.17)$$

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} \zeta^{n+1}, \quad \chi_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n; \quad (2.18)$$

$$\varphi_*(\zeta) = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{n-1} \zeta^{1-n}, \quad \chi^*(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^{-n}. \quad (2.19)$$

Підставляючи розклад (2.18) у вираз (2.14), отримуємо

$$\varphi_1(\zeta) = \left[A_1 - \frac{\lambda B}{\delta_1 - \lambda(1+\nu_2) + (1+\nu_1)} \right] \zeta - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \zeta^{n+1}, \quad (2.20)$$

де

$$a_{n+1} = \frac{2\lambda n}{\Delta_n} [(n+1)d_{n+1} + (n-1)b_n] + A_{n+1}; \quad (2.21)$$

$$\Delta_n = \delta_2 n^2 + 2n(1+\lambda) + \delta_1 - \lambda(1+\nu_2) + (1+\nu_1);$$

A_{n+1} — коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є відомих членів правої частини (2.14), які виражаються через функцію $G(\zeta)$.

Легко перевірити, що, як і слід було чекати, коефіцієнт при ζ в (2.20) дорівнює раніше визначеному коефіцієнту a_1 (2.16), якщо

розписати значення A_1 . Використовуючи співвідношення (2.2), (2.4) і (2.6), виразимо всі функції через $\varphi_0(\zeta)$ і $\chi_0(\zeta)$. Тоді коефіцієнти відповідних рядів матимуть вигляд

$$a_{n+1} = -\alpha_n = A_{n+1} + \frac{2\lambda n}{\Delta_n} [(n+1)d_{n+1} + (n-1)b_n]$$

$$\bar{\beta}_{n-1} = a_{n+1} - (n+1)d_{n+1} - nb_n, \quad (2.22)$$

$$\bar{c}_n = -(d_{n+1} + b_n + \bar{\beta}_{n-1}),$$

при $n \geq 2$;

$$-\bar{c}_1 = d_2 + b_1. \quad (2.23)$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів d_{n+1} і b_n використаємо граничну умову (1.17), куди ми підставляємо вираз (2.1). В результаті отримуємо

$$-x[\overline{\varphi_0(t)} + \overline{\varphi_*(t)}] + \frac{\eta^2}{t} [\varphi_0'(t) + \varphi_*'(t)] +$$

$$+ [\chi_0'(t) + \chi_*'(t)] + \frac{B}{t} = F_2^*(t) - iC_1 \frac{\eta^2}{t} + C_2. \quad (2.24)$$

Отримане рівняння і комплексно спряжене до нього рівняння домножаємо на $\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t-\zeta}$ і інтегруємо їх по l при $|\zeta| < \eta$:

$$-x\bar{\varphi}_*\left(\frac{\eta^2}{\zeta}\right) + \frac{\eta^2}{\zeta} \varphi_0'(\zeta) - \frac{\eta^2 d_1}{\zeta} + \chi_0'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_l F_2^*(t) \frac{dt}{t-\zeta} + C_2;$$

$$-x\varphi_0(\zeta) + \bar{d}_1 \zeta + 2\bar{d}_2 \eta^2 + \zeta \bar{\varphi}_*\left(\frac{\eta^2}{\zeta}\right) + \bar{b}_1 + \bar{\chi}_*\left(\frac{\eta^2}{\zeta}\right) +$$

$$+ \frac{B}{\eta^2} \zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_l \overline{F_2^*(t)} \frac{dt}{t-\zeta} + iC_1 \zeta + \bar{C}_2. \quad (2.25)$$

Підставляючи функції (2.18) і (2.19) в рівняння (2.25) і враховуючи співвідношення (2.22), отримуємо такі рівняння для визначення коефіцієнтів b_n і d_{n+1} та постійної B :

$$\left. \begin{aligned} 2\eta^2 d_2 + b_1 &= B_0 + C_2, \\ (1-x)d_1 + B\eta^{-2} &= \bar{B}_{-1}\eta^{-2} + iC_1, \\ -\bar{c}_1 x\eta^4 d_2 &= \bar{B}_{-2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

$$\left. \begin{aligned} -x\eta^{2-2n}\bar{\beta}_{n-1} + (n+1)\eta^2 d_{n+1} + nb_n &= B_{n-1}, \\ (n-1)(1-\eta^2)\bar{\beta}_{n-1} + a_{n+1} - (1+x\eta^{2(n+1)})d_{n+1} &= \bar{B}_{-(n+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 2) \quad (2.27)$$

Тут використано розклад

$$F_2^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n t^n, \quad (2.28)$$

де B_n — відомі коефіцієнти.

З рівнянь (2.26) і (2.23) отримуємо

$$B = \frac{1+\nu}{2} \left[\frac{F(0)\eta^2}{\delta_1 - \lambda(1+\nu_2) + (1+\nu_1)} + \operatorname{Re} \bar{B}_{-1} \right] \times \\ \times \frac{\delta_1 - \lambda(1+\nu_2) + (1+\nu_1)}{(1+\nu_2)[\delta_1 + \lambda(1-\nu_2) + (1+\nu_1)]\eta^2 + (1-\nu_2)[\delta_1 - \lambda(1+\nu_2) + (1+\nu_1)]}; \quad (2.29)$$

$$d_2 = \frac{(\bar{B}_{-2} - A_2)\Delta_1}{4\lambda - (x\eta^4 + 1)\Delta_1}; \quad b_1 = \bar{B}_{-2} + \frac{(\bar{B}_{-2} - A_2)(x\eta^4 - 1)\Delta_1}{4\lambda - (x\eta^4 + 1)\Delta_1}.$$

Використовуючи співвідношення (2.22), з (2.27) отримуємо таку систему рівнянь для визначення d_{n+1} і b_n при $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} & [2\lambda n(n+1) - (x\eta^{2(n+1)} + 1)\Delta_n + (n^2 - 1)(\eta^2 - 1)(\Delta_n - 2\lambda n)]d_{n+1} + \\ & + n(n-1)\{2\lambda + (\eta^2 - 1)[\Delta_n - 2(n-1)\lambda]\}b_n = \{\bar{B}_{n+1} + [(n-1)\eta^2 - n]A_{n+1}\}\Delta_n; \\ & [(\eta^{2n} + x)\Delta_n - 2\lambda n x](n+1)d_{n+1} + [(\eta^{2n-2} + x)\Delta_n - 2\lambda(n-1)x]nb_n = \\ & = (B_{n-1}\eta^{2n-2} + xA_{n+1})\Delta_n. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Визначник системи (2.30) має вигляд

$$\begin{aligned} I_n = & -n\eta^{2n}\Delta_n\{2\lambda[2n(n^2 - 1) + (n-1)(1 - x^2 - n^2)\eta^2 - 2nx\eta^{-4n} - \\ & - n^2(n+1)\eta^{-2}] + \Delta_n[(x\eta^{2n} + \eta^{-2})(\eta^{2n} + x\eta^2) - (n^2 - 1)(1 - \eta^{-2})]\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Легко переконатись, що $I_n < 0$.

При $\eta \rightarrow \infty$ і $B_n = 0$ отримуємо нульовий розв'язок системи (2.30). У цьому випадку коефіцієнти d_{n+1} і b_n при $n \geq 2$ і коефіцієнт d_2 тожньо дорівнюють нулеві, що і відповідає розв'язку для безмежної області.

Визначивши з (2.30) b_n і d_{n+1} , а із співвідношень (2.22) решту коефіцієнтів, отримуємо розв'язок поставленої задачі.

При часткових значеннях параметрів легко отримати розв'язки більш простих задач, які розглядаються в роботах [1] і [5].

Приклад. Як приклад розглянемо випадок дії зосередженої сили P в довільній точці $|\zeta_0| < 1$. Без обмеження загальності будемо вважати, що точка ζ_0 лежить на дійсній осі. За часткові розв'язки w_{0k} візьмемо розв'язок задачі про дію зосередженої сили на жорстко зашцімлену по Γ безмежну плиту, а саме:

$$w_{01} = \frac{PR^2}{16\pi D_1} \left[(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \zeta_0) \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \zeta_0)}{(1 - \zeta_0)(1 - \bar{\zeta}\zeta_0)} + (1 - \zeta_0^2)(1 - r^2) \right],$$

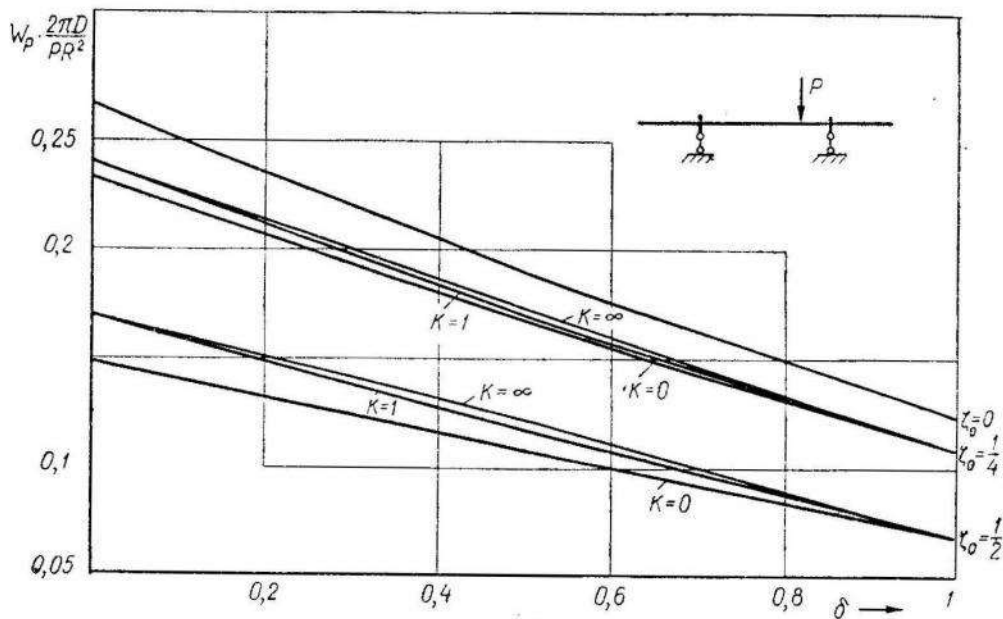
$$w_{02} = 0.$$

Розв'язок поставленої задачі отримуємо у вигляді

$$\begin{aligned} w_1 = & \frac{PR^2}{16\pi D_1} \left\{ (\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \zeta_0) \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \zeta_0)}{(1 - \zeta_0)(1 - \bar{\zeta}\zeta_0)} + (1 - \zeta_0^2)(1 - r^2) \times \right. \\ & \times \left(\frac{(1 + \nu_2)[\delta_1 + \lambda(1 - \nu_2) + 3 + \nu_1]\eta^2 + (1 - \nu_2)[\delta_1 - \lambda(1 + \nu_2) + 3 + \nu_1]}{(1 + \nu_2)[\delta_1 + \lambda(1 - \nu_2) + 1 + \nu_1]\eta^2 + (1 - \nu_2)[\delta_1 - \lambda(1 + \nu_2) + 1 + \nu_1]} - \right. \\ & \left. \left. - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta^{4n}\Delta_n}{I_n} n[(x + \eta^{-2(n+1)})(1 + x\eta^{2-2n}) - (n^2 - 1)\eta^{-2n}(1 - \eta^{-2})]r^n \zeta_0^n \cos n\theta \right) \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 = & \frac{PR^2}{4\pi D_1} (1 - \zeta_0^2) \left\{ \frac{\Delta_1}{I_1} \zeta_0 (1 - r^2) (1 + \kappa) \kappa (\eta^{-4} \frac{r}{\kappa} + r^{-1}) \cos \Theta - \right. \\
& - \frac{(1 + \nu_2) \eta^2 \ln r + 0,5(1 - \nu_2)(r^2 - 1)}{(1 + \nu_2)[\delta_1 + \lambda(1 - \nu_2) + (1 + \nu_1)] \eta^2 + (1 - \nu_2)[\delta_1 - \lambda(1 + \nu_2) + (1 + \nu_1)]} + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta_n}{I_n} \zeta_0^n \{ n [\kappa \eta^{-2n} + n \eta^{-2} - (n-1)] r^{n+2} + n[(n+1) - n \eta^{-2} + \\
& + \kappa \eta^{2n}] r^{2-n} - [n(n+1) + (1 - n^2 - \kappa^2) \eta^2 + n \kappa \eta^{-2n}] r^n + [n(n-1) + \\
& + (1 - n^2 - \kappa^2) \eta^2 - n \kappa \eta^{2n}] r^{-n} \} \eta^{2n} \cos n\Theta \Big\}; \\
& (I_1 = I_n \text{ при } n = 1).
\end{aligned}$$

Якщо в цьому розв'язку покласти $\eta \rightarrow \infty$ (безмежна область) і $\delta_1 = \delta_2 = 0$ (непідкріплена пластинка), отримаємо розв'язок, який збіга-



ється з [1]. Якщо ж покласти $\lambda = 0$ і $\eta = 1$, то w_1 дасть розв'язок для круглої плити з краєвим опорним ребром жорсткості [5].

На рисунку побудовані графіки прогину w_p під силою P в залежності від величини $\delta = \frac{\delta_1}{\delta_1 + 2}$ для трьох значень $k = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ при $\nu = 0,3$ і $\eta = 2$.

При порівнянні цих результатів з випадком, розгляненим в [5], що відповідає даному результату при $\eta = 1$, можна відзначити, що при збільшенні $\eta = \frac{R_1}{R}$ жорсткість плити зростає. Прогин під силою при різних жорсткостях δ_1 і δ_2 зменшується від нуля при $\delta_1 = \delta_2 = \infty$ до 16% при $\delta_1 = \delta_2 = 0$ в порівнянні з випадком $\eta = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дандарс (I. Dandurs), Ли Тан-мин (Tung-Ming Lee). Изгиб сосредоточенной силой бесконечной пластинки, опертой по круговому контуру. Прикладная механика (Transactions of the ASME, русский перевод), т. 30, сер. E, № 2, 1963.
2. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
3. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., 1964.
4. Н. П. Флейшман, Л. И. Ощипко. Згин тонкої плити з круглим опорним кільцем. Тези доповідей XXXIX наук. конференції ЛДУ, фіз.-матем. науки, 1965.
5. Н. П. Флейшман, Л. И. Ощипко. Произвольный изгиб тонкой плиты с круглым опорным кольцом. Прикладная механика, т. II, вып. 4, 1966.

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Л. И. ОЩИПКО

ИЗГИБ ТОНКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛИТЫ С КРУГЛЫМ ОПОРНЫМ РЕБРОМ ЖЕСТКОСТИ

(резюме)

Решена задача о произвольном изгибе круглой плиты, свободно опертой по внутреннему опорному ребру жесткости. Решение записывается через комплексные потенциалы, для определения которых используются условия опирания, подкрепления и сопряжения на ребре, а также условия первой основной задачи на внешнем контуре плиты. Методом интегралов типа Коши задача свелась к системе двух алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных разложения искомым функций в комплексные ряды Фурье. Рассмотрен числовой пример изгиба плиты сосредоточенной силой, приложенной в точке внутри опорного кольца.

Н. П. ФЛЕЙШМАН, О. В. МАРКОВСЬКА

ВПЛИВ РЕБРА ЖОРСТКОСТІ НА ЗГИН КРУГЛОЇ ПЛИТИ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ МОМЕНТАМИ

Розглядається згин круглої ізотропної тонкої плити з підкріпленням краєм. Пружне ребро, яке підкріплює контур γ плити, є тонким стержнем сталого перетину. Плита перебуває під дією зосереджених моментів, які прикладені до краю. Розв'язок знайдено у замкнутому вигляді, що дозволяє дослідити задачу якісно і кількісно. В іншій постановці розв'язок аналогічних задач методом рядів Фур'є одержаний в монографії [1]. Вплив криволінійних ребер жорсткості на згин плит при різних інших навантаженнях досліджено в працях [4, 7, 8] та ін. [див. огляд 3].

1. Жорсткості на згин (A) та кручення (C) підкріплюючого ребра та циліндрична жорсткість D плити вважаються сталими величинами. Бігармонічна функція прогинів w шукається у вигляді

$$w = w_0 + w_1, \quad (1.1)$$

де w_0 — відомий основний прогин плити при відсутності ребра жорсткості, а w_1 — шуканий додатковий прогин, який обумовлений наявністю підкріплюючого ребра.

Без обмеження загальності прийемо радіус плити за одиницю. За формулою Гурса маємо

$$w_k = 2 \operatorname{Re} \left[\bar{\zeta} \varphi_k(\zeta) + \int \psi_k(\zeta) d\zeta \right] \quad (k = 0, 1). \quad (1.2)$$

Тут $\varphi_k(\zeta)$ та $\psi_k(\zeta)$ — функції комплексного змінного $\zeta = x + iy = \rho e^{i\theta}$, які голоморфні всередині γ . Напруження та деформації плити для основного та додаткового напружених станів виражаються відповідно через функції $\varphi_k(\zeta)$ та $U_k(\zeta) = \varphi'_k(\zeta) + \zeta \psi_k(\zeta)$.

Як показано в [5], визначення шуканих функцій $\varphi_1(\xi)$ і $U_1(\xi)$ зводиться до інтегрування системи двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку із змінними коефіцієнтами на комплексній площині:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(\zeta) + \alpha_{11} \zeta^{-1} \varphi_1(\zeta) + \alpha_{12} U_1(\zeta) &= V_1; \\ U_1'(\zeta) + \alpha_{21} \zeta^{-2} \varphi_1(\zeta) + \alpha_{22} \zeta^{-1} U_1(\zeta) &= V_2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Сталі коефіцієнти α_{ij} виражаються через відносні жорсткості підкріплюючого ребра на згин та кручення

$$\delta_1 = \frac{A}{D}; \quad \delta_2 = \frac{C}{D} \quad (1.4)$$

таким чином:

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \frac{3+\nu}{2} \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right); \quad \alpha_{21} = \frac{3+\nu}{2} \left(\frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1} \right); \\ \alpha_{12} &= \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1} \right); \quad \alpha_{22} = \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) - 1.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Праві частини рівнянь (1.3) мають вигляд

$$\begin{aligned}V_1 &= V_1^0 + \bar{a}_1(\alpha_{21} + \alpha_{22}); \\ \zeta V_2 &= V_2^0 + \bar{a}_1(\alpha_{11} + \alpha_{12} + 1),\end{aligned}\quad (1.6)$$

де у випадку довільного статично зрівноваженого навантаження по контуру плити матимемо

$$V_1^0 = -\varphi_0'(\zeta) - \overline{\varphi_0'(0)}; \quad (1.7)$$

$$V_2^0 = \overline{\varphi_0'(0)} + U_0(\zeta) - \zeta U_0'(\zeta); \quad (1.8)$$

$$a_1 = -\frac{\delta_1}{2(1+\nu+\delta_1)} [\varphi_0'(0) + \overline{\varphi_0'(0)}]. \quad (1.9)$$

Остаточно розв'язок системи (1.3) при $\delta_1 \neq \delta_2$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\varphi_1(\zeta) &= \frac{\zeta}{k_2 - k_1} \{ [k_2 I_{11}(\zeta) - I_{12}(\zeta)] - [k_1 I_{21}(\zeta) - I_{22}(\zeta)] \} - \\ &\quad - \bar{a}_1 \zeta \left[1 - \frac{2(\alpha_{12} + \alpha_{22})(1+\nu+\delta_1)}{\mu_1 \mu_2 \delta_1} \right];\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}U_1(\zeta) &= \frac{1}{k_2 - k_1} \{ k_1 [k_2 I_{11}(\zeta) - I_{12}(\zeta)] - k_2 [k_1 I_{21}(\zeta) - I_{22}(\zeta)] \} + \\ &\quad + \bar{a}_1 \left[1 + \frac{2(1+\alpha_{11} + \alpha_{21})(1+\nu+\delta_1)}{\mu_1 \mu_2 \delta_1} \right].\end{aligned}\quad (1.11)$$

Тут

$$I_{kj}(\zeta) = \zeta^{\mu_k} \int \zeta^{-1-\mu_k} V_j^0 d\zeta \quad (k, j=1, 2).$$

$$k_{1,2} =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\left[(1+\nu) \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) + 2 \right] \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right)^2 + (1+\nu) \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) + 1 - \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{\delta_1 \delta_2}}}{-(1-\nu) \left(\frac{1}{\delta_2} - \frac{1}{\delta_1} \right)};\end{aligned}\quad (1.12)$$

$$\mu_{1,2} = -\left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right)^2 + (1+\nu) \left(\frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1} \right) + 1 - \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{\delta_1 \delta_2}}. \quad (1.13)$$

Розв'язок для рівних жорсткостей можна одержати, якщо інтегрувати (1.3) при $\delta_1 = \delta_2$. Якщо відомі функції (1.10) та (1.11), то функція $\psi_1(\zeta)$, яка голоморфна всередині γ , виразиться формулою

$$\psi_1(\zeta) = \frac{1}{\zeta} U_1(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \varphi_1'(\zeta). \quad (1.14)$$

2. Нехай плита навантажена зосередженими моментами M_l ($l=1, 2, \dots, r$), які прикладені в точках контура $\sigma_l = e^{i\alpha_l}$. Ці моменти задовольняють умову рівноваги

$$\sum_1^r M_l = \sum_1^r (M_{xl} + iM_{yl}) = 0.$$

Для непідкріпленої плити маємо [9]

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= -\frac{i}{4\pi D(3+\nu)} \sum M_l \ln(\sigma_l - \zeta) + \frac{i(1-\nu)\zeta}{8\pi D(1+\nu)(3+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l}; \\ \psi_0(\zeta) &= \frac{i}{4\pi D(1-\nu)} \sum \bar{M}_l \ln(\sigma_l - \zeta) - \frac{i}{4\pi D(3+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l(\sigma_l - \zeta)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Звідси

$$U_0(\zeta) = \frac{i\zeta}{4\pi D(1-\nu)} \sum \bar{M}_l \ln(\sigma_l - \zeta) + \frac{i}{8\pi D(1+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l}. \quad (2.2)$$

Підставляючи функції (2.1) та (2.2) у формули (1.7) — (1.9), знаходимо

$$\begin{aligned} V_1^0 &= -\frac{i}{4\pi D(3+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l - \zeta} - \frac{i(1-\nu)}{8\pi D(3+\nu)(1+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l} + \\ &+ \frac{i}{8\pi D(1+\nu)} \sum \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} V_2^0 &= \frac{i\zeta^2}{4\pi D(1-\nu)} \sum \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l - \zeta} + \frac{i}{8\pi D(1+\nu)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l} - \\ &- \frac{i}{8\pi D(1+\nu)} \sum \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$a_1 = -\frac{\delta_1}{4(1+\nu+\delta_1)} \cdot \frac{i}{4\pi D(1+\nu)} \sum \left(\frac{M_l}{\sigma_l} - \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l} \right). \quad (2.5)$$

За допомогою останніх виразів шукані функції (1.10) та (1.11) остаточно запишуться так:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= -\frac{i}{4\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \cdot \left\{ \zeta^{1+\mu_1} \left[k_2 \sum M_l \int \frac{\zeta^{-1-\mu_1}}{\sigma_l - \zeta} d\zeta + \right. \right. \\ &+ \frac{3+\nu}{1-\nu} \sum \bar{M}_l \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{\sigma_l - \zeta} d\zeta \left. \right] - \zeta^{1+\mu_2} \left[k_1 \sum M_l \int \frac{\zeta^{-1-\mu_2}}{\sigma_l - \zeta} d\zeta + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{3+\nu}{1-\nu} \sum \bar{M}_l \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{\sigma_l - \zeta} d\zeta \right] \right\} + \frac{i\alpha_{22}\zeta}{4\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \sum \frac{M_l}{\sigma_l} - \end{aligned}$$

$$-\frac{i\delta_1\zeta}{16\pi D(1+\nu)(1+\nu+\delta_1)} \sum \left(\frac{M_l}{\sigma_l} - \frac{\bar{M}_l}{\sigma_l} \right); \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(\zeta) = & -\frac{i}{4\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ [k_1-(1+\mu_1)] \zeta^{-1+\mu_1} \left[k_2 \sum M_l \int \frac{\zeta^{-1-\mu_1}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta + \right. \right. \\ & + \frac{3+\nu}{1-\nu} \sum \bar{M}_l \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta \left. \right] - [k_2-(1+\mu_2)] \zeta^{-1+\mu_2} \left[k_1 \sum M_l \int \frac{\zeta^{-1-\mu_2}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta + \right. \\ & \left. + \frac{3+\nu}{1-\nu} \sum \bar{M}_l \int \frac{\zeta^{1+\mu_2}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta \right] \left. \right\} - \frac{i(\alpha_{21}+\alpha_{22})}{4\pi D(3+\nu)\mu_1\mu_2} \zeta^{-1} \sum \frac{M_l}{\sigma_l} + \\ & + \frac{i}{4\pi D(3+\nu)} \sum \frac{M_l}{\zeta(\sigma_l-\zeta)}. \end{aligned}$$

У розв'язок (2.6) входять інтеграли вигляду

$$I(\zeta) = \int \frac{\zeta^{\pm 1-\mu_j}}{\sigma_l-\zeta} d\zeta, \quad (2.7)$$

які можна обчислити лише при раціональних значеннях чисел μ_j . Але при довільних жорсткостях ребра δ_1 та δ_2 згідно з (1.13) числа μ_j можуть бути ірраціональними. Тому при підрахунках краще задатися значеннями μ_1 та μ_2 і обчислювати відповідні величини δ_1 і δ_2 за формулою

$$\frac{1}{\delta_{2,1}} = -\frac{\mu_1+\mu_2}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{4}\right)^2 - \frac{1+\mu_1\mu_2 - \frac{1+\nu}{2}(\mu_1+\mu_2)}{(3+\nu)(1-\nu)}}. \quad (2.8)$$

Відносні жорсткості δ_1 , δ_2 для деяких значень μ_1 та $\mu = -\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2) = \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_1}$ наведені в табл. 1. Числа табл. 1 зображені у вигляді дробів, чисельник яких дорівнює δ_1 , а знаменник — δ_2 .

З (2.8) видно, що не всякій довільній парі чисел μ_1, μ відповідають дійсні невід'ємні значення δ_1, δ_2 (див. риси в табл. 1). Якщо покласти під інтегралом в (2.7) $\zeta = t^n$ та $\pm 1 - \mu_j = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ — дріб, що не скорочується, дістанемо

$$I(t) = n \int \frac{t^{m+n-1}}{\sigma_l - t^n} dt. \quad (2.9)$$

При $m \geq 1$ очевидно, що $m+n-1 \geq n$ і підінтегральна функція в (2.9) може бути записана у вигляді

$$\frac{t^{m+n-1}}{\sigma_l - t^n} = - \sum_{k=0}^j \sigma_l^k t^{m-kn-1} + \sigma_l^{j+1} \frac{t^{m-jn-1}}{\sigma_l - t^n},$$

де $m-jn-1 < n$; $j = E\left(\frac{m-1}{n}\right)$.

Таблиця 1

$\mu \downarrow$		-2	-1	-3/4	-1/2	-1/4	$\leftarrow \mu_1$
0,75	$\frac{4,035}{1,991}$	$\frac{0,316}{0,146}$	$\frac{0,579}{0,121}$	$\frac{0,696}{0,117}$	$\frac{0,859}{0,113}$	$\frac{1,110}{0,110}$	10
1	$\frac{8,595}{1,132}$	$\frac{2,896}{1,527}$	$\frac{0,521}{0,179}$	$\frac{0,640}{0,168}$	$\frac{0,803}{0,160}$	$\frac{1,047}{0,153}$	7,5
1,25	$\frac{14,55}{0,847}$	$\frac{4,653}{0,966}$	$\frac{0,426}{0,274}$	$\frac{0,568}{0,236}$	$\frac{0,737}{0,215}$	$\frac{0,980}{0,201}$	6
1,5	$\frac{24,52}{0,685}$	$\frac{6,105}{0,748}$	$\frac{1,842}{1,045}$	—	$\frac{0,655}{0,288}$	$\frac{0,906}{0,257}$	5
1,75	$\frac{45,62}{0,579}$	$\frac{7,511}{0,618}$	$\frac{2,423}{0,748}$	—	—	$\frac{0,764}{0,372}$	4
2	$\frac{122,7}{0,502}$	$\frac{8,921}{0,530}$	$\frac{2,814}{0,608}$	—	—	—	3
2,25	—	$\frac{10,35}{0,464}$	$\frac{3,129}{0,518}$	$\frac{1,189}{0,710}$	—	—	2,5
2,5	—	$\frac{11,82}{0,414}$	$\frac{3,391}{0,454}$	$\frac{1,407}{0,559}$	—	—	2,25
3	—	$\frac{14,87}{0,341}$	$\frac{3,835}{0,365}$	$\frac{1,659}{0,417}$	$\frac{0,876}{0,538}$	—	2
4	—	$\frac{21,63}{0,253}$	$\frac{4,474}{0,265}$	$\frac{1,946}{0,287}$	$\frac{1,173}{0,318}$	—	1,75
5	—	$\frac{29,50}{0,201}$	$\frac{4,925}{0,208}$	$\frac{2,118}{0,221}$	$\frac{1,304}{0,236}$	—	1,5
6	—	$\frac{38,82}{0,167}$	$\frac{5,263}{0,172}$	$\frac{2,236}{0,180}$	$\frac{1,386}{0,189}$	—	1,25
7,5	—	$\frac{56,56}{0,134}$	$\frac{5,639}{0,137}$	$\frac{2,356}{0,141}$	$\frac{1,465}{0,147}$	—	1
10	—	$\frac{103,8}{0,100}$	$\frac{6,058}{0,102}$	$\frac{2,480}{0,104}$	$\frac{1,543}{0,107}$	—	0,75
$\mu_1 \rightarrow$	3/4	2/3	1/2	1/4	0	—	$\uparrow \mu$

Функція $f(t) = \frac{t^{m-jn-1}}{\sigma_l - t^n}$, яка має n полюсів у точках $t_k = e^{(ia_l + 2k\pi i)/n}$ ($k=0, 1, \dots, n-1$), може бути записана у вигляді суми головних частин лоранівських розкладів в околі кожного з полюсів [2]:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\text{res}_{t=t_k} f(t)}{t-t_k} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t_k^{m-n(1+j)}}{t-t_k}.$$

Тепер інтеграл $I(t)$ легко обчислюється

$$I(t) = -n \sum_{k=0}^j \sigma_i^k \frac{t^{m-kn}}{m-kn} - \sigma_i^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2k\pi i \left(\frac{m}{n} - j - 1\right)} \ln(t - t_k). \quad (2.10)$$

3. Для ілюстрації впливу підкріплюючого ребра на зусилля в плиті розглянемо дві окремі задачі: на кінцях діаметра круглої плити з підкріпленим краєм діють рівні та протилежно направлені 1) згинаючі моменти M (рис. 1), 2) крутильні моменти M (рис. 2).

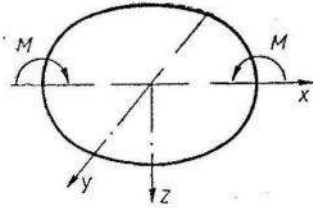


Рис. 1.

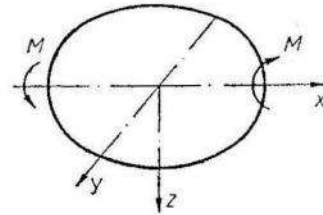


Рис. 2.

Для задачі 1 маємо

$$\begin{aligned} M_1 &= iM \text{ при } \sigma_1 = 1; \\ M_2 &= -iM \text{ при } \sigma_2 = -1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для задачі 2 маємо

$$\begin{aligned} M_1 &= M \text{ при } \sigma_1 = 1; \\ M_2 &= -M \text{ при } \sigma_2 = -1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Підставляючи значення (3.1) та (3.2) у формули (2.6), після деяких перетворень одержуємо додаткові функції $\varphi_1(\zeta)$ та $\psi_1(\zeta)$ для задачі 1:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= \frac{M\zeta}{2\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ \left(k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_1} \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{1-\zeta^2} d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - \left(k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_2} \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{1-\zeta^2} d\zeta \right\} + \frac{M\delta_1\zeta}{4\pi D(1+\nu)(1+\nu+\delta_1)}; \\ \psi_1(\zeta) &= \frac{M\zeta^{-1}}{2\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ [k_1 - (1+\mu_1)] \left(k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_1} \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{1-\zeta^2} d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - [k_2 - (1+\mu_2)] \left(k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_2} \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{1-\zeta^2} d\zeta \right\} - \frac{M\zeta}{2\pi D(3+\nu)(1-\zeta^2)}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для задачі 2 [6]

$$\begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= -\frac{iM\zeta}{2\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ \left(k_2 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_1} \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{1-\zeta^2} d\zeta - \right. \\ &\quad \left. - \left(k_1 + \frac{3+\nu}{1-\nu} \right) \zeta^{\mu_2} \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{1-\zeta^2} d\zeta \right\}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\psi_1(\zeta) = -\frac{iM\zeta^{-1}}{2\pi D(3+\nu)(k_2-k_1)} \left\{ [k_1-(1+\mu_1)] \left(k_2+\frac{3+\nu}{1-\nu}\right) \zeta^{\mu_1} \int \frac{\zeta^{1-\mu_1}}{1-\zeta^2} d\zeta - \right. \\ \left. - [k_2-(1+\mu_2)] \left(k_1+\frac{3+\nu}{1-\nu}\right) \zeta^{\mu_2} \int \frac{\zeta^{1-\mu_2}}{1-\zeta^2} d\zeta \right\} + \frac{iM}{2\pi D(3+\nu)} \cdot \frac{\zeta}{1-\zeta^2}.$$

Згинаючі моменти та зусилля в плиті (в полярній системі координат), які діють в точках $\sigma=e^{i\theta}$ контура γ , виражаються за відомими формулами [4] у вигляді:

для задачі 1:

$$M_\theta = -4D(1+\nu) \operatorname{Re}[\varphi'(\sigma)] + 2D(1-\nu) \operatorname{Re}[\sigma\varphi''(\sigma) + \sigma^2\psi'(\sigma)] = \\ = M \sum_{1,2} A_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j); \\ M_\rho = -4D(1+\nu) \operatorname{Re}[\varphi'(\sigma)] - 2D(1-\nu) \operatorname{Re}[\sigma\varphi''(\sigma) + \sigma^2\psi'(\sigma)] = \\ = M \sum_{1,2} B_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j) + \frac{M}{\pi} \frac{1+\nu}{1+\nu+\delta_1}; \quad (3.5)$$

$$Q_\rho = -8D \operatorname{Re}[\sigma\varphi''(\sigma)] = \\ = M \sum_{1,2} C_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j) + \frac{4M}{\pi(3+\nu)} \left(\alpha_{11} + \frac{3+\nu}{1-\nu} \alpha_{12}\right) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\sigma^2}\right);$$

для задачі 2

$$H_{\rho\theta} = 2D(1-\nu) \operatorname{Im}[\sigma\varphi''(\sigma) + \sigma^2\psi'(\sigma)] = M \sum_{1,2} D_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j); \quad (3.6)$$

$$Q_\theta = 8D \operatorname{Im}[\sigma\varphi''(\sigma)] = \\ = M \sum_{1,2} E_j \operatorname{Re}\Phi(\mu_j) + \frac{4M}{\pi(3+\nu)} \left(\alpha_{11} - \frac{3+\nu}{1-\nu} \alpha_{12}\right) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-\sigma^2}\right).$$

Тут позначено

$$\Phi(\mu_j) = \sigma^{\mu_j} \int \frac{\sigma^{1-\mu_j}}{1-\sigma^2} d\sigma; \\ \operatorname{Re}\Phi(\mu) = \operatorname{Im}[i\Phi(\mu)]. \quad (3.7)$$

Формули для коефіцієнтів A_j, B_j, C_j, D_j, E_j ($j=1,2$) наведені в табл. 2.

У розв'язок (3.3)–(3.4) входить інтеграл вигляду

$$\zeta^\mu \int \frac{\zeta^{1-\mu}}{1-\zeta^2} d\zeta.$$

Для прикладу обчислимо цей інтеграл при $\mu_1=0,5$; $\mu_2=-3,5$. Згідно з (2.10) маємо

$$V\zeta \int \frac{V\zeta}{1-\zeta^2} d\zeta = -\frac{V\zeta}{2} \left(\ln \frac{1-V\zeta}{1+V\zeta} + i \ln \frac{1-iV\zeta}{1+iV\zeta} \right);$$

Таблиця 2

	$j=1$	$j=2$
A_j	$-\frac{k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} [(1+3\nu)(1+\mu_1) + k_1(1-\nu)(1-\mu_1)]$	$\frac{k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} [(1+3\nu)(1+\mu_2) + k_2(1-\nu)(1-\mu_2)]$
B_j	$-\frac{k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} [(3+\nu)(1+\mu_1) - k_1(1-\nu)(1-\mu_1)]$	$\frac{k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} [(3+\nu)(1+\mu_2) - k_2(1-\nu)(1-\mu_2)]$
C_j	$-4 \frac{k_2 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} \mu_1(1+\mu_1)$	$4 \frac{k_1 - \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} \mu_2(1+\mu_2)$
D_j	$-\frac{k_2 + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} (1-\nu) [(1+\mu_1) - k_1(1-\mu_1)]$	$\frac{k_1 + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} (1-\nu) [(1+\mu_2) - k_2(1-\mu_2)]$
E_j	$-4 \frac{k_2 + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} \mu_1(1+\mu_1)$	$4 \frac{k_1 + \frac{3+\nu}{1-\nu}}{\pi(3+\nu)(k_2-k_1)} \mu_2(1+\mu_2)$

$$\zeta^{-3,5} \int \frac{\zeta^{4,5}}{1-\zeta^2} d\zeta = -\frac{2}{7} - \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{2} \frac{V\zeta}{\zeta^4} \left(\ln \frac{1-V\zeta}{1+V\zeta} + i \ln \frac{1-iV\zeta}{1+iV\zeta} \right).$$

Тут $|\arg \zeta| \leq \pi$.

Аналітична функція $V\zeta \left(\ln \frac{1-V\zeta}{1+V\zeta} + i \ln \frac{1-iV\zeta}{1+iV\zeta} \right)$ є регулярною в безмежній площині з розрізами вздовж променів $(0, -\infty)$ та $(1, \infty)$, а тому можна продовжити аналітично розв'язок задачі на всі точки контура γ за винятком точок ± 1 , в яких діють зосереджені моменти.

В непідкріпленій плиті [9] при підході до точок прикладання зосереджених моментів внутрішні згинаючі та крутячі моменти мають особливості вигляду $\frac{1}{1-\rho}$, а перерізуючі сили Q_ρ та Q_θ — особливості

вигляду $\frac{1}{(1-\rho)^2}$. Щодо плити з підкріпленням краєм, то, як показує аналіз наведених вище формул, в околі точок прикладання зосереджених моментів моменти та перерізуючі сили мають більш слабкі особливості вигляду відповідно $\ln(1-\rho)$ та $\frac{1}{1-\rho}$.

На рис. 3 наведені графіки залежності зусиль та моментів (3.5) та (3.6) в точці $\sigma=i$ для $\mu_1=0,5$ та $1,5 \leq \mu \leq 10$. Відповідні значення відносних жорсткостей ребра змінюються при цьому (табл. 1) в інтер-

валах $1,842 \leq \delta_1 \leq 6,058$; $0,102 \leq \delta_2 \leq 1,045$. Для порівняння на тому ж рис. 3 пунктиром показані значення відповідних зусиль в невідкріпленій плиті [9].

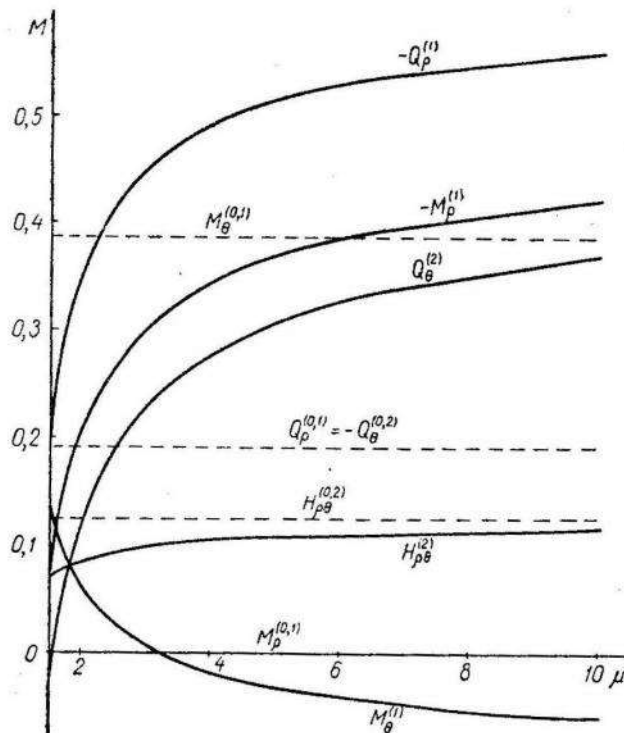


Рис. 3.

ЛІТЕРАТУРА

1. Д. В. Вайнберг. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд-во АН УССР, 1952.
2. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. М., 1950.
3. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. Пластинки с криволинейными ребрами жесткости. Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (обзорные доклады). Изд-во АН СССР, 1965.
4. Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Изд-во «Наукова думка», К., 1964.
5. Н. П. Флейшман. Изгиб произвольно нагруженной тонкой плиты с подкрепленной круговой границей. Прикладная механика, т. II, вып. 8, 1966.
6. Н. П. Флейшман, О. В. Марковська. Дія зосереджених моментів на круглій плиті з підкріпленням краю. Тези доповідей 39 наукової конференції ЛДУ, фіз.-матем. науки, 1965.
7. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львов. ун-та, 1960.
8. М. П. Шереметьев, Т. Л. Мартинович. Згин нескінченної пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. III, вип. 2, 1957.
9. Yu Yi-Yuan. Journal of Applied Mechanics, vol. 21, № 2, 1954.

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Е. В. МАРКОВСКАЯ

ВЛИЯНИЕ РЕБРА ЖЕСТКОСТИ НА ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МОМЕНТАМИ

(резюме)

В замкнутой форме получено решение задачи изгиба круглой изотропной плиты с подкрепленным краем под действием сосредоточенных моментов, приложенных к краю. Показано, что в точках приложения сосредоточенных моментов внутренние усилия имеют более слабые особенности, чем в неподкрепленной плите.

Л. О. СТАРОКАДОМСЬКИЙ

**ПРО НАБЛИЖЕНЕ РІШЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
МЕТОДОМ КОЛОКАЦІЇ І МЕТОДОМ ЗВЕДЕННЯ
ДО ЗАДАЧІ ЧЕБИШЕВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ**

Під наближеним рішенням рівняння

$$L(\mu) \equiv \delta \mu - \int_{-1}^1 \mu(x) N(x_0, x) dx = f(x_0) \quad (\delta = 0 \text{ або } 1) \quad (1)$$

розумітимемо визначення такої густини $\bar{\mu}$, щоб

$$|L(\bar{\mu}) - f| < \varepsilon. \quad (2)$$

Припустимо, що рівняння (1) має розв'язок і при цьому тільки одиний, тобто

$$\mu \equiv 0, \text{ якщо } f \equiv 0. \quad (3)$$

Тим чи іншим способом можна звести рівняння (1) з густиною μ до вигляду

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \psi_n(x_0) = f(x_0). \quad (4)$$

Для визначеності розглянемо спосіб заміни μ на $\bar{\mu}$:

$$\bar{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \varphi_n(x), \quad (5)$$

де $\{\varphi_n\}$ — якась повна система лінійно незалежних функцій. Тоді $\psi_n(x_0) = L(\varphi_n)$ і $\{\psi_n\}$ є повна система лінійно незалежних функцій, якщо виконується (3). Повнота системи $\{\varphi_n\}$ в L_2 , якщо $\{\varphi_n\}$ повна система в L_2 , як і лінійна незалежність, перетворюється безпосередньо. Якщо $\{\varphi_n\}$ система повна в просторі C_p , то $\{\psi_n\}$ є повною системою в просторі C_f всіх функцій f , що можуть бути подані виразом $L(\mu)$. Це також легко перевіряється.

1. ПРО МЕТОД КОЛОКАЦІЇ (ЗМІШАНИЙ МЕТОД) [1, 2]

Задаючи в рівності (4) набір M точок x_{0j} ($j=0, 1, \dots, M-1$), де $M \geq N$, одержимо алгебраїчну систему для визначення a_n

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \psi_{nj} = f_j \quad (j=0, 1, \dots, M-1). \quad (6)$$

При $M=N$ приходимо до методу колокації. Питання про збіжність і помилку цього методу розглядалось, наприклад в роботі [2], методами функціонального аналізу. Але слід зауважити, що метод колокації безпосередньо збігається з задачею інтерполювання функції $f(x)$ за системою $\{\psi_n\}$, і тоді стає зрозумілим, що питання про збіжність і похибку методу колокації є питанням про збіжність і похибку інтерполяційного методу, теорія якого досить розроблена. Зробимо зауваження, що впливають з теорії інтерполяції:

а) $\{\psi_n\}$, взагалі кажучи, не буде чебишевською системою, тому визначник системи (6) може бути близьким до нуля або дорівнювати йому. Це може сильно впливати на єдиність і стійкість розв'язку;

б) якщо навіть $\{\psi_n\}$ є системою Чебишева, колокація може привести до розбіжного процесу. Так буде, наприклад, для рівняння

$$\mu(x_0) - \int_{-1}^1 \mu(x) dx = f(x_0), \text{ де } f(x_0) = |x_0| \text{ або } f(x_0) = \frac{1}{1+25x_0^2} \text{ і ін.}$$

при виборі $\{\varphi_n\} = \left\{x^n - \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1}\right\}$, якщо точки x_{0j} будуть рівновіддаленими;

в) між різними сукупностями точок колокації x_{0j} перевагу має сукупність коренів полінома Чебишева $T_N(x_0)$. Дійсно, замінюючи

$$f(x_0) \text{ і } \Psi(x_0) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \psi_n(x_0) \text{ їх поліномами Лагранжа } f_L = \sum_{j=0}^{N-1} L_j(x_0) f_j$$

$$\text{і } \Psi_L = \sum_{j=0}^{N-1} L_j(x_0) \Psi_j, \text{ бачимо, що завдяки (6) } \Psi_L \equiv f_L \text{ і, значить,}$$

$$\varepsilon = \sup |\Psi - f| \leq \Delta \text{ const; } \Delta = \max \{\Delta_f, \Delta_\Psi\}, \quad (7)$$

де Δ_f, Δ_Ψ — похибки інтерполяцій f і Ψ за Лагранжем. Таким чином, справа звелася до Лагранжевої інтерполяції, для якої сукупність коренів $T_N(x_0)$ має перевагу перед іншими сукупностями.

2. ЗВЕДЕННЯ ДО ЗАДАЧІ ЧЕБИШЕВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ

Рішення рівняння (1) в розумінні (2) при користуванні (4) або (6) рівнозначне такій задачі: потрібно визначити такі $a_n = \bar{a}_n$, щоб помилка $\Delta = \max_{x_0} |\sum a_n \psi_n(x_0) - f(x_0)|$ була найменшою. Позначивши через $E_N(f)$ величину найкращого наближення за Чебишевим

$$E_N(f) = \min_{\{a_n\}} \max_{x_0} |\sum a_n \psi_n(x_0) - f(x_0)|, \quad (8)$$

приходимо до висновку, що задача наближеного рішення рівняння (1)

в розумінні (2) є задачею чебишевського наближення функції $f(x_0)$ узагальненим поліномом $\Psi_N = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \psi_n(x_0)$. Відомо, що задача чебишевського наближення (в наших умовах) завжди має рішення, причому завдяки повноті $\{\psi_n\}$ буде $E_N \rightarrow 0$. Слід зауважити, що $\bar{\mu} \rightarrow \mu$ при

$E_N \rightarrow 0$, якщо рівняння (1) стійке в розумінні (2). На основі сказаного наближене рішення (1) можна провадити методами досить розробленої теорії чебишевського наближення [див., наприклад, 3]. Оскільки цю останню задачу на $[-1, 1]$ можна звести з заданою точністю до рішення аналогічної задачі на точковій множині $\{x_{0j}\}$, то повертаємось до рішення системи (6) при $M > N$ за чебишевським принципом (8).

Не зупиняючись на відомих методах побудови такого рішення [3], відзначимо лише таке.

а. При $M = N + 1$ можна визначити $\bar{a}_n$ і відхилення $E_N^{(0)}$ з системи $(T_N(x_{0j}) = 0)$:

$$(-1)^j E_N^{(0)} + \sum \bar{a}_n \psi_{nj} = f_j. \quad (9)$$

Похибку Δ можна наближено оцінити, знаючи $E_N^{(0)}$ і порахувавши різницю $f(x_0) - \sum \bar{a}_n \psi_n(x_0)$ в проміжних точках. Відомими способами можна також оцінити різницю $E_N - E_N^{(0)}$.

б. Відомо, що задача чебишевського наближення зводиться до задачі середньостепеневого наближення, першим кроком якого є середнє квадратичне наближення.

Рішення системи (6) методом найменших квадратів провадиться шляхом заміни (6) на систему

$$\|\psi_{nj}\|' \|\psi_{nj}\| \hat{a} = \|\psi_{nj}\|' \hat{f}, \quad (10)$$

$\|\psi_{nj}\|$ і $\|\psi_{nj}\|'$, $\hat{a}$, $\hat{f}$ — відповідно матриця системи (6), транспонована матриця, стовпці невідомих $\bar{a}_n$ і відомих f_j . При достатньо великих M і визначнику системи (10), не близькому до нуля, цей спосіб дає досить добрі результати.

в. Більш загальними і потужними методами, що проходять і при поганій обумовленості (6), є α -алгоритм та інші, описані в монографії [3].

Зауваження. До системи (6) рівняння (1) можна звести ще так. Зобразимо $\bar{\mu}$ у вигляді інтерполяційного полінома

$$\bar{\mu}(x) = \frac{2}{N} \sum_{\alpha=0}^{N-1} \mu(x_\alpha) \left[\sum_{k=1}^{N-1} T_k(x_\alpha) T_k(x) + \frac{1}{2} \right], \quad (11)$$

де x_α — корені $T_N(x)$, тоді одержимо систему

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} \mu_\alpha \psi_{\alpha j} = f_j \quad (j = 0, 1, \dots, M-1), \quad (12)$$

більш придатну при рішенні рівняння (1) 1-го роду через те, що ψ_α не зменшуються з ростом α .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Изд-во иностр. л-ры, 1953.
2. Л. В. Канторович. Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи математических наук, III, вып 6, 1948.
3. Е. Я. Ремез. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Изд-во АН УССР, 1957.

Л. А. СТАРОКАДОМСКИЙ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ И МЕТОДОМ ПРИВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧЕ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

(р е з ю м е)

Рассмотрен метод коллокации (смешанный метод) решения интегральных уравнений и показано, что теория этого метода совпадает с теорией интерполирования. Предлагаются приближенные методы решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода путем сведения к задаче чебышевского приближения, теория которого достаточно хорошо разработана.

Л. О. СТАРОКАДОМСЬКИЙ

ПОТЕНЦІАЛ ПРОСТОГО ШАРУ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ 1-го РОДУ З ЛОГАРИФМІЧНОЮ ОСОБЛИВІСТЮ

1. Зведення до сингулярного інтегрального рівняння. Нехай в площині (x, y) проведено p розрізів $L_k = \overline{a_k b_k}$ (сукупність яких дає лінію $L = \sum_{k=1}^p L_k$), що параметрично задаються так:

$$x = x_k(s), y = y_k(s) \quad s_k \leq s \leq S_k \text{ на } L_k, \quad (1)$$

де s є будь-який параметр, наприклад довжина дуги. Будемо водночас користуватися комплексним зображенням точок (x, y) і $(x(s), y(s))$, $(s \in L)$, тобто $z = x + iy$, $t(s) = x(s) + iy(s)$. Припустимо, що індекс «+» («—») відповідає лівому (правому) околу точки $t \in L$, при обраному на L додатному напрямі. Введемо в розгляд потенціал простого шару $v(x_0, y_0)$ і видозмінений потенціал простого шару $u(x_0, y_0)$ з густинами $\mu(s)$ і $\overline{M}(s)$:

$$v(x_0, y_0) = \int_L \mu(s) N[x_0, y_0; x(s), y(s)] ds; \quad (2)$$

$$u(x_0, y_0) = \int_L \overline{M}(s) \frac{\partial}{\partial s} N[x_0, y_0; x(s), y(s)] ds, \quad (3)$$

де

$$N[x_0, y_0; x(s), y(s)] = l[x_0, y_0; x(s), y(s)] \ln r + n[x_0, y_0; x(s), y(s)]; \quad (4)$$

$$r \equiv r[x_0, y_0; x(s), y(s)] = |z_0 - t|; \quad (5)$$

$$\mu(s) = \mu_k(s), \quad \overline{M}(s) = \overline{M}_k(s) \text{ при } s \in L_k. \quad (6)$$

Для спрощення міркувань припустимо, що функції $x_k(s)$, $y_k(s)$ і $l(z_0, t)$, $n(z_0, t)$ належать до одного і того самого класу

$$x_k(s), y_k(s), l, n \in C_N(\lambda) \quad (7)$$

(для l, n належність (7) виконується по всіх змінних). Записом (7) позначуємо також, що N -похідна належить до $H(\lambda)$. Якщо функції x_k, y_k, l, n нескінченно диференційовані, то приймаємо $N = \infty$. Потенціали u і v зводяться один до одного інтегруванням по частинах, тому природно вважати

$$\overline{M}_k(s) = \int_{s_k}^s \overline{\mu}_k(s) ds. \quad (8)$$

Там, де потрібно, будемо вважати, що заміною

$$s = \frac{1}{2}(S_k + s_k) + \frac{1}{2}(S_k - s_k)\tau \quad (-1 \leq \tau \leq 1) \quad (9)$$

всі проміжки інтегрування зведені до $[-1, 1]$. Тепер зобразимо μ у вигляді

$$\mu_k(s) = -\overline{\mu}_k(s) + \alpha_k \sigma_k(s) \quad (s \in L_k), \quad (10)$$

де α_k — деякі константи, σ_k — функції такі, що потенціали

$$v_k = \int_{L_k} \sigma_k(s) N ds \quad (11)$$

належать на L класу $H(\lambda)$ і

$$l_k = \int_{L_k} \sigma_k(s) ds \neq 0, \quad (12)$$

а в іншому довільно обрані, наприклад у вигляді

$$\sigma_k = \frac{\sigma_k^{(1)}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} + \sigma_k^{(2)}(\tau) \arccos \tau + \sigma_k^{(3)}(\tau). \quad (13)$$

Зробимо тепер важливе для дальшого припущення (A): густина $\overline{M}$ на кінцях дуг L_k дорівнює нулеві:

$$\overline{M}(s_k) = \overline{M}(S_k) = 0. \quad (A)$$

При умові (A) і маючи на увазі (10), (11), одержимо

$$v(x_0, y_0) = -u(x_0, y_0) + \sum_{k=0}^p \alpha_k v_k(x_0, y_0), \quad (14)$$

де $\alpha_0 = 0$ або $\alpha_0 \neq 0$, $u_0 = 1$ залежно від умови, що накладається на $v(\infty)$. Так, у випадку $l=1$, $n=\ln a$ ($a \neq 1$) за формулою (2) одержимо логарифмічний потенціал, для якого найчастіше буде $|v(\infty)| < \infty$. Тоді $\alpha_0 \neq 0$, а на інші α_k накладається умова $\sum \alpha_k l_k = 0$. Якщо потенціал v є розв'язком якоїсь граничної задачі, то, прямуючи точку (x_0, y_0) до контура L , одержимо еквівалентні внаслідок (14) інтегральні рівняння 1-го роду:

$$\int_L \mu(s) N(s_0, s) ds = f_0(s_0); \quad (15)$$

$$\int_L \overline{M}(s) \frac{\partial}{\partial s} N(s_0, s) ds + \sum_{k=0}^p \alpha_k u_k(s_0) = f_0(s_0). \quad (16)$$

Зробимо тепер припущення (В): рівняння (15) має лише єдиний розв'язок, тобто

$$\mu \equiv 0, \text{ якщо } f_0 \equiv 0. \quad (17)$$

2. Дослідження рівнянь (15), (16). З умов (А); (В) і (12) випливає

$$\mu_k \equiv \bar{\mu}_k \equiv \bar{M}_k \equiv \alpha_k \equiv 0, \text{ якщо } f_0 \equiv 0. \quad (18)$$

Дослідження (15), (16) провадимо шляхом зведення (16) до сингулярного інтегрального рівняння

$$\begin{aligned} \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\bar{M}(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0 t) \bar{M}(t) dt &= f(t_0); \\ B(t_0) &= \pi i l(s_0, s_0); f(t_0) = f_0(s_0) - \sum_{k=0}^p \alpha_k v_k(s_0); \\ k(t_0 t) &= \pi i \left\{ l'_s \ln r + N'_s + \frac{l(s_0 s) - l(s_0, s_0)}{s-s_0} \left[(s-s_0) \frac{\partial \ln r}{\partial s} \right] - \right. \\ &\quad \left. - i l(s_0, s_0) \frac{\sin \alpha(s_0 s)}{r(s_0 s)} \right\} \left(\frac{dt}{ds} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

(інші позначення збігаються з позначеннями [1]). Запроваджуючи теорію сингулярних інтегральних рівнянь [1], зводимо (19) до рівняння Фредгольма II роду:

$$\bar{M}(t_0) + K^* k \bar{M} = f^*(t_0) \quad (20)$$

при умовах

$$\sum_k \alpha_k A_{jk} = B_j \quad (j=1, 2, \dots, p), \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \int_L \frac{t^{j-1} v_k(t) dt}{l(t, t) \sqrt{R(t)}}; \quad B_j = \int_L \frac{t^{j-1} [f_0 - k \bar{M}]}{l(t, t) \sqrt{R(t)}} dt; \\ K^* f &= - \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{l(t, t) \sqrt{R(t)} (t-t_0)}; \quad k \bar{M} = \frac{1}{\pi i} \int_L k(t t_1) \bar{M}(t_1) dt_1, \quad (22) \\ R(t) &= \prod_{k=1}^p (t-a_k)(t-b_k). \end{aligned}$$

Завдяки (18) система (21) має розв'язок і притому єдиний і, значить, (15), (16) еквівалентне (20). Знову завдяки (18) рівняння (20) має розв'язок і притому єдиний. З (21) α_k можна зобразити у вигляді лінійної комбінації правих частин B_j , що в свою чергу (див. (22)) зображені через f_0 і $\bar{M}$. Таким чином, підставляючи $\alpha_k = \alpha_k(f_0, \bar{M})$ в рівняння (20), одержимо

$$\overline{M}(t_0) + \sqrt{R(t_0)} \int_L \overline{M}(t_1) N_\omega(t_1, t_0) dt_1 = \sqrt{R(t_0)} F_\omega(t_0), \quad (23)$$

де N_ω, F_ω — відомі функції, причому $|N_\omega| < \text{const}$, $|F_\omega| < \text{const}$ і, значить, припущення (А) виправдане. Можна далі показати, що (20) або (23) мають лише дійсний розв'язок, збігаючись з розв'язком (16). Через те, що

$$\mu_k = -\frac{d\overline{M}_k}{ds} + \alpha_k \sigma_k, \quad (24)$$

і на основі вищесказаного робимо висновок: рівняння (15) при умові (В) має розв'язок при будь-якій правій частині f_0 . Рівняння (19) має розв'язок при будь-якому значенні f_0 при виконанні умов (А) і (В).

3. Властивості рішень μ і $\overline{M}$. Проводячи відомими методами аналізу дослідження (20) або (23), використовуючи формули

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln |\tau_1 - \tau| d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}(\tau - \tau_0)} = \pi \frac{\arccos \tau_0 - \eta(\tau_1 - \tau_0)}{\sqrt{1 - \tau_0^2}} \quad \left(\eta(\tau_1 - \tau_0) = \begin{cases} 0 & \tau_0 > \tau_1 \\ 1 & \tau_0 < \tau_1 \end{cases} \right),$$

$$\int_{\tau_0}^1 \frac{f(\tau, \tau_0)}{\sqrt{1 - \tau^2}} d\tau = f_1(\tau_0) \sqrt{1 - \tau_0^2} + f_2(\tau_0) \arccos \tau_0 + f_3(\tau_0);$$

$$f(\tau, \tau_0) \in C_r, f_i(\tau_0) \in C_{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \quad (i = 1, 2, 3),$$

одержимо

$$\overline{M}_k(\tau_0) = \overline{M}_{1k}(\tau_0) \sqrt{1 - \tau_0^2} + \overline{M}_{2k}(\tau_0) \arccos \tau_0 + \overline{M}_{3k}(\tau_0), \quad (25)$$

де $\overline{M}_{ik}(\tau_0) \in C_\infty$, якщо в (7) $N = \infty$.

Якщо $N < \infty$, то $\overline{M}_{1k} \in C_{N-3}$, $\overline{M}_{2k} \in C_{N-1}$, $\overline{M}_{3k} \in C_1$, але можливе дальше виділення особливостей з функції $\overline{M}_{3k}$, причому виявляється, що $\overline{M}_{3k}$ знову має вигляд (25). Таким чином, можливе зображення (25), де $\overline{M}_{1k} \in C_m$, $\overline{M}_{2k} \in C_l$, $\overline{M}_{3k} \in C_r$, причому m, l, r є числа максимально однорідні, що одержуються при послідовному зменшенні на 1 класів C_{N-3} , C_{N-1} і відповідному підвищенні класу C_1 в (25). Очевидно, далі, що

$$\mu_k(\tau_0) = \frac{\mu_{1k}(\tau_0)}{\sqrt{1 - \tau_0^2}} + \mu_{2k}(\tau_0) \arccos \tau_0 + \mu_{3k}(\tau_0), \quad (26)$$

де щодо μ_{ik} можемо повторити все, що говорилося щодо $\overline{M}_{ik}$ із зниженням на 1 порядку відповідних класів. При $N = \infty$ $\mu_{ik} \in C_\infty$. Відзначимо, що рівняння (20) або (23) будуть нестійкими відносно f_0 у рівномірному розумінні, значить, рівняння (16), а тим більше рівняння (15) будуть нестійкими в тому самому розумінні.

4. Дослідження $v(x_0 y_0)$, $u(x_0 y_0)$ та похідних від $v(x_0 y_0)$, $u(x_0 y_0)$ на L і поблизу L . Запишемо $u(x_0 y_0)$ у вигляді

$$\frac{u(z_0)}{l(z_0, t^0)} = \text{Re} \int_L \frac{\overline{M}(t) dt}{t - z_0} + v_1(z_0), \quad (27)$$

де $l(z_0, t^0) = l[x_0, y_0; x(s^0), y(s^0)]$ і $t^0 = x(s^0) + iy(s^0)$ є точка L , до якої прямує t_0 , а $v_1(z_0)$ зводиться до потенціалу (2) з обмеженою густиною (ми далі вважатимемо, що мають місце (A) (25), (26) і (24)). На основі (27) і (14) можемо відносно $u(x_0, y_0)$ і $v(x_0, y_0)$ твердити, що до них застосовані всі результати, одержані при вивченні інтеграла типу Коші [1, 2]. Наприклад, 1) $v(x_0, y_0)$ і $u(x_0, y_0)$ неперервно продовжуються на L , включаючи кінці, причому $v^+ = v^-$, $u^+ = u^-$; 2) $v(x_0, y_0)$ і $u(x_0, y_0)$ на L і поблизу L належать класу $H(\lambda)$ і т. д. [див. 1].

Для дослідження похідних від $v(x_0, y_0)$ і $u(x_0, y_0)$ зауважимо, що вірна рівність

$$\frac{1}{l} \frac{\partial v}{\partial z_0} \equiv \frac{1}{l(z_0, t^0)} \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} - i \frac{\partial v}{\partial y_0} \right) = - \int_L \frac{\mu(t)}{t' t - z_0} dt + v_2(x_0, y_0), \quad (28)$$

де $t' = \frac{dt}{ds}$, v_2 — є потенціал (2) з густиною μ . На основі теорії інтеграла типу Коші і формул (26), (28), (29)

$$\frac{\mu_k(t)}{t'} = \frac{\mu_{1k}}{\sqrt{t-c}} \sqrt{\frac{t-c}{1-\delta_c v}} \frac{1}{t'} + \frac{\mu^*(t)}{t'} \left(\delta_c = \begin{cases} -1 & c = a_k \\ 1 & c = b_k \end{cases} \right) \quad (29)$$

можемо одержати

$$\frac{1}{l} \frac{\partial v}{\partial z_0} = -\delta_L \pi \sqrt{S_k - s_k} \frac{\mu_{1k}}{\sqrt{r(z_0, c)}} i e^{i\theta(z_0, c)} + \delta_c \mu^*(c) e^{-ix} \ln(z_0 - c) + v(z_0), \quad (30)$$

де

$$\delta_L = \begin{cases} 0 & (x_0, y_0) \in L \\ 1 & (x_0, y_0) \notin L \end{cases}, \quad r(z_0, c) = |z_0 - c|, \quad x = \arg t'(c);$$

$$\Theta(z_0, c) = \frac{1}{4} [2x + 2\vartheta(z_0, c) - (1 + \delta_c) \pi]; \quad \vartheta(z_0, c) = \arg(z_0 - c); \quad (31)$$

$$\mu^* = \mu_{2k} \arg \cos \tau + \mu_{3k}; \quad \mu^* \in H.$$

На основі (28) і (29) можемо на похідні $\frac{\partial v}{\partial z_0}$, $\frac{\partial u}{\partial z_0}$ перенести всю теорію інтеграла типу Коші і зробити ряд висновків, з яких ми відзначимо лише такі.

1. Якщо $\frac{\mu_k}{t'} \in H$ на L (включаючи кінці), то $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ неперервно продовжується на L зліва і справа, причому $\frac{\partial v}{\partial z_0} \in H$ в лівому і правому околі точки $t^0 \in L$ і

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z_0} \right)^+ + \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} \right)^- = 2 \frac{\partial v}{\partial t^0}, \quad - \frac{t'(s^0)}{2\pi i l(t^0, t^0)} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z_0} \right)^+ - \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} \right)^- \right] = \mu(s^0). \quad (32)$$

Якщо μ задовольняє (26) і справедливі формули (24), (14), то вищесказане і формула (32) справедливі для $\frac{\partial v}{\partial z_0}$, $\frac{\partial u}{\partial z_0}$, за винятком околів кінців L_k .

2. З (30) впливає формула похідної по напрямку m в околі кінців a_k , b_k . Напрямок m збігається з напрямком $(z_0 - c)$.

$$\frac{\partial v}{\partial m} \equiv \frac{\partial x}{\partial x_0} \cos \vartheta + \frac{\partial y}{\partial y_0} \sin \vartheta = -l(z_0, c) \partial_L \sqrt{S_k - s_k} \frac{\mu_{1k}(c)}{\sqrt{r(z_0, c)}} \sin \Theta_1(z_0, c) + \\ + \partial_c l(z_0, c) \mu^*(c) \{ \ln |z_0 - c| \cos(\vartheta - \kappa) + \vartheta \sin(\vartheta - \kappa) \} + w(x_0, y_0), \quad (33)$$

де

$$\Theta_1(z_0, c) = \frac{1}{4} [2(\kappa - \vartheta) - (1 + \partial_c) \pi].$$

З (33) випливає: а) особливість типу $\frac{1}{\sqrt{r(z_0, c)}}$ зникає при підході до кінця «с» з боку «внутрішньої» дотичної, тобто при $\vartheta = \kappa$ для $c = a_k$ і $\vartheta = \kappa + \pi$ для $c = b_k$; б) похідна $\frac{\partial v}{\partial m}$ є багатозначною функцією, завдяки присутності множника ϑ у формулі (33). Якщо μ матиме особливість типу $(1 \pm \tau_c)^{-1}$, де $0 < \gamma < 1$, то висновки а) і б) відповідно узагальнюються.

5. Дослідження густини μ і потенціалу $v(x_0, y_0)$ поблизу кутової точки контура L . Припустимо, що контур L утворений в площині z прямими розрізами Ac і cB , що створюють кут $\alpha\pi$. Позначимо ліву сторону контура L через Bc_2A , а праву — Ac_1B . Відобразимо конформно площину z на площину w з прямолінійним розрізом $A'B'$, що має ліву сторону $B'c_2'A'$ і праву сторону — $A'c_1'B'$. Припустимо, що точки c і c' лежать у початку координат площин z і w відповідно. Користуючись відомими формулами відображення верхньої півплощини ζ на z і w , одержимо

$$z = \text{const} \frac{(\zeta - c_1'')^\alpha (\zeta - c_2'')^{2-\alpha}}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \bar{\zeta}_0)}; \quad w = \text{const} \frac{(\zeta - c_1')(\zeta - c_2')}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \bar{\zeta}_0)}, \quad (34)$$

звідки

$$\frac{dw}{dz} = (\zeta - c_1')^{1-\alpha} (\zeta - c_2')^{\alpha-1} \varphi(z), \quad (35)$$

причому

$$\varphi(c_1) = \frac{\text{const}}{\alpha}, \quad \varphi(c_2) = \frac{\text{const}}{2-\alpha}.$$

Якщо $z \rightarrow c$, залишаючись ліворуч (праворуч) L (що записується так: $z \rightarrow c_2(c_1)$, $\zeta \rightarrow c_2''(c_1'')$), то поблизу c одержимо

$$\zeta - c_2'' = (z - c)^{\frac{1}{2-\alpha}} \varphi_2(z); \quad \zeta - c_1'' = (z - c)^{\frac{1}{\alpha}} \varphi_1(z); \quad |\varphi_1|, |\varphi_2| < \text{const}, \quad (36)$$

звідки

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^+ = (z - c)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} \varphi_2(z); \quad \left(\frac{dw}{dz}\right)^- = (z - c)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \varphi_1(z). \quad (37)$$

Припустимо тепер, що в площині w за формулою (2) заданий потенціал $v(w)$ з густиною в околі точки $c'_{\mu_1}(\sigma) \in H$, що набуває на $L_w = A'B'$ якогось граничного значення, що також належить класу H в околі точки c' . За формулою (32) (точка $\tau \in L_w$)

$$\mu_1(\sigma) = -\frac{\tau'(\sigma)}{2\pi i l(\tau^0, \bar{\tau}^0)} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^+ - \left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^- \right]. \quad (38)$$

В площині z потенціалові $v(w)$ відповідає потенціал $v[w(z)] = v(z)$ з густиною $\mu(s)$. Природно припустити, що в точці $t=c$ $\mu(s)$ має особливість вигляду $|s-s_0|^{-\gamma}$, тобто

$$\frac{\mu(s)}{t'} = \frac{\mu_*(t)}{(t-c)^\gamma} \left(\frac{t-c}{|s-s_0|} \right)^\gamma \frac{1}{t'} \quad (0 \leq \gamma < 1). \quad (39)$$

Для підтвердження цього припущення і визначення показника γ скористаємося теорією інтеграла типу Коші. На основі цієї теорії і припущення (39)

$$\frac{\mu(s)}{t'} = -\frac{1}{2\pi i l(t^0, t^0)} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^+ - \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^- \right] + \varphi_0, \quad (40)$$

де φ_0 — відома обмежена функція. Зрівнюючи (40) і (38), на основі (37) можемо показати, що припущення (39) дійсно вірне, а показник γ знайдеться з рівності (маючи на увазі, що $\left(\frac{dv}{dz} \right)^\pm = \left(\frac{dv}{dw} \right)^\pm \left(\frac{dw}{dz} \right)^\pm$)

$$\frac{\mu(s)}{t'} = -\frac{1}{2\pi i l(t^0, t^0)} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^+ (t-c)^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} \varphi_2(t) - \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^- (t-c)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \varphi_1(t) \right] + \varphi_0. \quad (41)$$

Приймаючи $\alpha < 1$ і користуючись тим, що $\text{Im} \mu = 0$, а функція t' має розрив 1-го роду при $t=c$, одержимо

$$\mu_1(s) = \begin{cases} m_1(s) \cdot |s-s_c|^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} + \varphi_0 & (s \in L_{BC}); \\ m_2(s) \cdot |s-s_c|^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} + \varphi_0 & (s \in L_{AC}), \end{cases} \quad (42)$$

$$\text{де } -\frac{1}{2} < \frac{\alpha-1}{2-\alpha} \leq 0.$$

Неважко також написати вираз похідної $\frac{\partial v}{\partial z_0}$ поблизу кутової точки:

$$-\frac{1}{2\pi i l(z_0, c)} \frac{\partial v}{\partial z_0} = \begin{cases} \frac{e^{\gamma\pi i} m_2(c) - e^{-\gamma\pi i} m_1(c)}{2i \sin \gamma\pi} (z_0 - c)^{-\gamma} + \Phi_0 & \text{ліворуч } L \\ \frac{e^{\gamma\pi i} m_2(c) - e^{-\gamma\pi i} m_1(c)}{2i \sin \gamma\pi} (z_0 - c)^{-\gamma} + \Phi_0 & \text{праворуч } L, \end{cases} \quad (43)$$

де

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}, \quad |\Phi_0| < \frac{\text{const}}{|z_0 - c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 < \gamma.$$

6. Одержані результати можна застосувати для наближеного розв'язку задачі Діріхле на площині та в осесиметричному просторі з щілинами [див. 3].

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, 2-е изд., Физматгиз, 1962.
2. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, 2-е изд., М., 1964.
3. Л. А. Старокадомский. Решение задачи Дирихле для плоскости со щелями методом сингулярных интегральных уравнений. 1-ая республ. матем. конференция молодых исследователей, вып. 1. Изд-во АН УССР, стр. 606—616.

Л. А. СТАРОКАДОМСКИЙ

ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО РОДА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

(р е з ю м е)

Рассмотрены потенциал простого слоя (2) и видоизмененный потенциал простого слоя (3), с помощью которых решается внешняя задача Дирихле на плоскости и в осесимметрическом пространстве со щелями L_k путем сведения к интегральным уравнениям первого рода (15) и (16). Доказана разрешимость (15) при условии единственности решения (15). Исследованы свойства плотностей μ_k и $\bar{M}_k$ вблизи концов дуг L_k , свойства μ вблизи угловой точки контура, поведение потенциалов u и u и их первых производных вблизи линии L , включая концы, а также поведение u и первых производных u вблизи угловой точки.

А. І. КАРДАШ, О. М. КОСТОВСЬКИЙ, І. І. ЧУЛИК

МАЖОРАНТИ ТА ДІАГРАМИ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Метою даної роботи є введення для цілої раціональної функції багатьох змінних поняття мажоранти та діаграми Ньютона, аналогічно тому, як це було зроблено для функції однієї змінної [1, 2], вивчення їх властивостей та застосування отриманих результатів для виділення областей комплексних змінних, в яких ціла раціональна функція не набуває нульових значень. Для спрощення викладу будемо розглядати комплекснозначні цілі раціональні функції (многочлени) двох комплексних змінних.

§ 1. ПОБУДОВА ДІАГРАМИ НЬЮТОНА ЦІЛОЇ РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ n -ОГО СТЕПЕНЯ ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ. МАЖОРАНТА НЬЮТОНА. ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Побудова діаграми Ньютона. В даній роботі розглядатимуться цілі раціональні функції n -ого степеня

$$f(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in E} A_{\mu\nu} z^\mu w^\nu \quad (1.1)$$

над полем комплексних чисел. Через E позначимо множину пар (μ, ν) цілих невід'ємних індексів, відмінних від нуля коефіцієнтів функції (1.1), які зображають точку в координатній площині $\mu\nu$.

Будемо розглядати також цілу раціональну функцію, складену з модулів коефіцієнтів функції (1.1)

$$f_{\text{mod}}(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in E} a_{\mu\nu} z^\mu w^\nu, \quad (1.2)$$

де $|A_{\mu\nu}| = a_{\mu\nu}$.

Для кожної раціональної функції (1.1) зіставимо в координатній площині $\mu\nu$ опуклий багатокутник Q_f , який можна побудувати таким способом: а) будуюмо всі точки (μ, ν) з множини E , б) з'єднуємо попарно побудовані точки відрізками і дістанемо фігуру, яка складається з скінченного числа відрізків. Границю цієї фігури позначимо через L_f (або L), яка обмежує опуклий багатокутник Q_f (або Q). Нехай вершинами цього багатокутника будуть (μ_1, ν_1) , (μ_2, ν_2) , ..., (μ_t, ν_t) . Через $\bar{Q}_f$ позначимо багатокутник Q_f разом з його границею L_f і $(\mu, \nu) \in C_{\mu\nu}$.

Таким чином, кожній раціональній функції (1.1) можна зіставити єдиний многокутник $\bar{Q}_f$ з першої чверті координатної площини $\mu\nu$.

Розглянемо тепер систему координат $\mu\nu\xi$, в якій для кожного відмінного від нуля коефіцієнта $A_{\mu\nu}$ функції (1.1) побудуємо точку $P_{\mu\nu}$ з координатами μ , ν і $\xi = -\ln |A_{\mu\nu}| = \ln \frac{1}{a_{\mu\nu}}$. Точка $P_{\mu\nu}$ називається точкою зображення коефіцієнта $A_{\mu\nu}$ функції (1.1). Очевидно, що $S_{\mu\nu} = \text{пр } P_{\mu\nu}$. Візьмемо довільну трійку точок зображення

$P_{\mu_1\nu_1}$, $P_{\mu_2\nu_2}$, $P_{\mu_3\nu_3}$ і з'єднаємо їх полярно відрізками $P_{\mu_1\nu_1}P_{\mu_2\nu_2}$, $P_{\mu_2\nu_2}P_{\mu_3\nu_3}$, $P_{\mu_3\nu_3}P_{\mu_1\nu_1}$, а отриманий просторовий трикутник $P_{\mu_1\nu_1}P_{\mu_2\nu_2}P_{\mu_3\nu_3}$ позначимо символом $\Delta(P_{\mu_1\nu_1}, P_{\mu_2\nu_2}, P_{\mu_3\nu_3})$ або простіше — $\Delta(\mu_1, \nu_1; \mu_2, \nu_2; \mu_3, \nu_3)$; зокрема, деякі трикутники можуть вироджуватися у відрізки. Побудуємо тепер такі трикутники для всіх можливих трьох точок зображення, в результаті отримаємо просторову фігуру Φ , яка складається із скінченного числа многокутників.

Кожна пряма, що проходить через точку (α, β) многокутника $\bar{Q}_f$ і паралельна осі аплікату, перетинатиме фігуру Φ у скінченному числі точок. Позначимо через $B(\alpha, \beta, \kappa_{\alpha\beta})$ ту з точок, апліката якої буде найменшою. Множина точок $B_{\alpha\beta} = B(\alpha, \beta, \kappa_{\alpha\beta})$, де $(\alpha, \beta) \in \bar{Q}_f$, утворює поверхню δ , яка обмежує фігуру Φ знизу. З побудови фігури Φ випливає, що її границя δ є багатогранна відкрита поверхня, вершини якої перебувають в точках зображення коефіцієнтів функції (1.1). Поверхня δ називається діаграмою Ньютона функції (1.1) і позначається символом δ_f . Контур або край цієї поверхні δ_f позначимо символом $\mathfrak{B}_f$, а її грані та ребра — відповідно символами $\sigma(P_{\mu_1\nu_1}, \dots, P_{\mu_r\nu_r})$ і $\gamma(P_{k_1l_1}, P_{k_2l_2})$, або простіше — $\sigma(\mu_1, \nu_1; \dots; \mu_r, \nu_r)$ і $\gamma(k_1, l_1; k_2, l_2)$, де $P_{k_i l_i}$ — вершини грані σ , яка є многокутником. Очевидно,

$$\text{пр } \delta_f = \bar{Q}_f \text{ та } \text{пр } \mathfrak{B}_f = L_f, \quad (1.3)$$

Теорема 1.1. Діаграма Ньютона δ_f цілої раціональної функції (1.1) є відкритою багатогранною опуклою вниз поверхнею, для якої має місце рівність (1.3).

Багатогранна поверхня називається опуклою, якщо вона розміщена по одну сторону від площини будь-якої її грані, продовженої необмежено. Покажемо, що поверхня δ_f має таку властивість. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що поверхня δ_f не опукла вниз, тоді існує грань $\sigma_i = \sigma(\mu_1, \nu_1; \dots; \mu_r, \nu_r)$ така, що поверхня δ_f не розміщується по одну сторону від цієї грані, продовженої необмежено, отже, деяка грань σ_j цієї поверхні (або частина грані) розташована під площиною S , яка містить грань σ_i , тобто є принаймні одна вершина P_{kl} грані σ_j , яка лежить нижче від площини S . З'єднаємо точку зображення P_{kl} відрізками з усіма вершинами грані σ_i , тоді дістанемо просторові трикутники $\Delta(P_{kl}, P_{\mu_1\nu_1}, P_{\mu_2\nu_2})$, $\Delta(P_{kl}, P_{\mu_2\nu_2}, P_{\mu_3\nu_3})$, ..., $\Delta(P_{kl}, P_{\mu_{r-1}\nu_{r-1}}, P_{\mu_r\nu_r})$, які будуть лежати нижче від грані σ_i , а тому грань σ_i не може бути нижньою границею фігури Φ . Наше припущення неправильне. Теорема доведена.

Наслідок 1.1. а) Кожне ребро діаграми Ньютона δ_f , що не належить контурові $\mathfrak{B}_f$, є стороною тільки двох її граней. Ребро, яке належить краю $\mathfrak{B}_f$, належить тільки одній грані. б) Кожна грань діаграми δ_f є опуклим многокутником. в) Кожна вершина діаграми

δ_f є спільною вершиною для декількох граней (не менше від трьох), причому багатогранний кут, що примикає до однієї вершини, завжди є опуклим багатогранним кутом. г) Будь-який відрізок $B_{\alpha\beta} \in B_{\alpha_1\beta_1}$, що з'єднує дві довільні точки діаграми (зокрема, дві вершини її, що не належать одній грані), завжди лежить вище поверхні δ_f .

Точка зображення P_{kl} , яка знаходиться у вершині діаграми δ_f , називається вершинною точкою діаграми, а її індекси k і l називаються вершинними індексами.

Будь-яка точка зображення $P_{\mu\nu}$, яка не є вершиною, лежить на грані або ребрі діаграми δ_f , або розміщена вище неї. Якщо для точки зображення $P_{\mu\nu} = P(\mu, \nu, -\ln a_{\mu\nu})$ відповідну точку діаграми Ньютона позначити через $B_{\mu\nu} = B(\mu, \nu, \chi_{\mu\nu})$, то завжди

$$\xi = -\ln a_{\mu\nu} \geq \chi_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

Точка зображення $P_{\mu\nu}$ називається діаграмною точкою діаграми δ_f , якщо

$$\xi = -\ln a_{\mu\nu} = \chi_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

а її індекси μ і ν є діаграмними індексами.

Вершини P_{kl} , $P_{k\pm 1, l\pm 1}$, а також P_{kl} , $P_{k\pm 1, l}$, та P_{kl} , $P_{k, l\pm 1}$ називаються сусідніми вершинами. Ребра, що з'єднують дві сусідні вершини, називаються елементарними ребрами діаграми Ньютона. В протилежному випадку будемо називати ребро складним (неелементарним).

Спрямленим ребром називається таке ребро, на якому розміщено декілька елементарних ребер. Для того щоб складне ребро було спрямленим, необхідно й достатньо, щоб проекція цього ребра на площину $\mu\nu$ була паралельна осі абсцис або осі ординат, або утворювала кут $\pm 45^\circ$ з віссю абсцис.

Ребро, паралельне координатним площинам $\mu\xi$ чи $\nu\xi$, будемо називати орієнтованим, або правильним ребром діаграми. Вершина P_{kl} діаграми називається правильною вершиною, якщо грані, що прилягають до цієї вершини, утворюють чотиригранний кут з правильними ребрами.

Діаграма Ньютона δ_f називається регулярною, якщо всі її ребра елементарні або спрявлені. Очевидно, що якщо регулярна діаграма δ_f не має спрямлених ребер, то всі точки зображення є вершинами. Діаграма Ньютона, яка складається тільки з чотирьох граней, що утворюють правильну вершину в деякій точці зображення $P_{kl} ((k, l) \in \overline{Q}_f)$, називається найпростішою діаграмою Ньютона і позначається через $\delta_f^*(k, l)$.

Через кожне ребро контура $\mathfrak{B}_f$ діаграми проведемо півплощину, паралельну осі апдікат в додатному напрямі цієї осі. Отримаємо призматичну поверхню, обмежену знизу опуклою вниз багатогранною поверхнею δ_f ; тепер щодо кожної точки зображення контура $\mathfrak{B}_f$ можна сказати, чи є вона вершиною для багатогранного кута чи ні.

1.2. Нормальні раціональні функції. Мажоранта Ньютона цілої функції. Ціла раціональна функція

$$N(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in \overline{Q}_N} t_{\mu\nu} z^\mu w^\nu \quad (1.6)$$

з додатними коефіцієнтами називається нормальною на опуклому многокутнику $\overline{Q}_N$, якщо всі її точки зображення діаграмні. З ви-

значення впливає, що кожній відкритій опуклій вниз багатогранній поверхні, яка проектується на координатну площину $\mu\nu$ в деякий опуклий многокутник і абсциси і ординати вершин якої є цілі числа, відповідає єдиний нормальний многочлен (1.6).

Візьмемо тепер функцію (1.1) і побудуємо для неї многокутник Q_f та діаграму δ_f . Позначимо через $B(\mu, \nu, \kappa_{\mu\nu})$ точки багатогранної поверхні δ_f , абсциси і ординати якої є цілі додатні числа, причому $(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f$. Складемо тепер цілу раціональну функцію

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f} T_{\mu\nu} z^\mu w^\nu, \quad (1.7)$$

коефіцієнти якої обчислюються за формулами

$$T_{\mu\nu} = \exp(-\kappa_{\mu\nu}) > 0 \quad (\mu, \nu) \in \bar{Q}_f. \quad (1.8)$$

Згідно з визначенням, (1.7) є нормальною раціональною функцією на многокутнику $\bar{Q}_f$ і називається **мажорантою Ньютона** раціональної функції (1.1) і позначається $\mathfrak{M}_f(z, w)$.

Справді, $\mathfrak{M}_f(z, w)$ є нормальною мажорантою функції (1.1) $|A_{\mu\nu}| \leq T_{\mu\nu}$ $((\mu, \nu) \in \bar{Q}_f)$, що зразу впливає з нерівності (1.4). З нерівності (1.5) для діаграмних точок, зокрема для вершинних точок, можемо записати

$$a_{\mu\nu} = |A_{\mu\nu}| = T_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu) \in \bar{Q}_f. \quad (1.9)$$

Теорема 1.2. Якщо ціла раціональна функція (1.2) є нормальною, то

$$f_{\text{mod}}(z, w) \equiv \mathfrak{M}_f(z, w). \quad (1.10)$$

Справедливість теореми впливає з визначення $f_{\text{mod}}(z, w)$ та $\mathfrak{M}_f(z, w)$.

1.3. Числові нахили та відхилення мажоранти та діаграми Ньютона. Нехай для функції (1.1) вже побудована діаграма δ_f і визначена мажоранта (1.7). Відношення

$$R_{kl}(\mu) = \frac{T_{k-1, l}}{T_{kl}} \quad \text{і} \quad R_{kl}(\nu) = \frac{T_{k, l-1}}{T_{kl}} \quad (1.11)$$

називаються (k, l) -ми числовими нахилами мажоранти $\mathfrak{M}_f(z, w)$ в напрямі осей абсцис і ординат. Відношення

$$D_{kl}(\mu) = \frac{R_{k+1, l}(\mu)}{R_{kl}(\mu)} = \frac{T_{kl}^2}{T_{k-1, l} T_{k+1, l}} \quad \text{і} \quad D_{kl}(\nu) = \frac{R_{k, l+1}(\nu)}{R_{kl}(\nu)} = \frac{T_{kl}^2}{T_{k, l-1} T_{k, l+1}} \quad (1.12)$$

називаються (k, l) -ми відхиленнями мажоранти Ньютона відповідно в напрямі осей 0μ і 0ν .

З опуклості вниз багатогранної поверхні δ_f впливають такі нерівності:

$$R_{kl}(\mu) \leq R_{k+1, l}(\mu), \quad R_{kl}(\nu) \leq R_{k, l+1}(\nu), \quad (k, l) \in \bar{Q}_f \quad (1.13)$$

та

$$D_{kl}(\mu) \geq 1, \quad D_{kl}(\nu) \geq 1, \quad (k, l) \in \bar{Q}_f. \quad (1.14)$$

Нехай точка зображення P_{kl} є вершинною (або діаграмною) точкою діаграми δ_f . Проведемо через цю точку площину, паралельну площині $\mu\xi$, яка перетне багатогранний кут, що утворює вершину P_{kl} , по двох відрізках Γ_{kl}^+ і Γ_{kl}^- , кутові коефіцієнти яких ми позначимо відповідно через $\text{tg } \varphi_{kl}^+(\mu)$ і $\text{tg } \varphi_{kl}^-(\mu)$.

Величини

$$\tilde{R}_{k,l}^+(\mu) = \exp [\text{tg } \varphi_{kl}^+(\mu)] \text{ і } \tilde{R}_{kl}^-(\mu) = \exp [\text{tg } \varphi_{kl}^-(\mu)] \quad (1.15)$$

називаються числовими нахилами діаграми δ_f функції (1.1) в напрямі осі абсцис.

Відношення

$$\tilde{D}_{kl}(\mu) = \frac{\tilde{R}_{k,l}^+(\mu)}{\tilde{R}_{kl}^-(\mu)} = \exp [\text{tg } \varphi_{kl}^+(\mu) - \text{tg } \varphi_{kl}^-(\mu)] \quad (1.16)$$

називається (k, l) -м відхиленням діаграми δ_f функції (1.1)

Аналогічно визначаються числові нахили та відхилення в додатному напрямі осі ординат:

$$\tilde{R}_{k,l}^+(\nu) = \exp (\text{tg } \varphi_{kl}^+(\nu)), \quad \tilde{R}_{kl}^-(\nu) = \exp [\text{tg } \varphi_{kl}^-(\nu)]; \quad (1.17)$$

$$\tilde{D}_{kl}(\nu) = \frac{\tilde{R}_{k,l}^+(\nu)}{\tilde{R}_{kl}^-(\nu)} = \exp [\text{tg } \varphi_{kl}^+(\nu) - \text{tg } \varphi_{kl}^-(\nu)]. \quad (1.18)$$

З пункту г) наслідку 1.1 та опуклості вниз діаграми δ легко встановити справедливості таких нерівностей:

$$R_{kl}(\mu) \leq \tilde{R}_{kl}^-(\mu) \leq \tilde{R}_{kl}^+(\mu) \geq R_{k+1,l}(\mu); \quad (1.19)$$

$$R_{kl}(\nu) \leq \tilde{R}_{kl}^-(\nu) \leq \tilde{R}_{kl}^+(\nu) \leq R_{k,l+1}(\nu); \quad (1.20)$$

$$\tilde{D}_{kl}(\mu) \leq D_{kl}(\mu), \quad \tilde{D}_{kl}(\nu) \leq D_{kl}(\nu) \quad (1.21)$$

для кожної точки $B(k, l, \kappa_{kl})$ поверхні δ_f .

Теорема 1.3. Для того щоб

$$\tilde{R}_{kl}^-(\mu) = R_{kl}(\mu) \quad (k, l) \in \bar{Q}_f, \quad (1.22)$$

необхідно й достатньо щоб ні одна з проєкцій складних ребер на площину $\mu\nu$ не перетинала внутрішньої частини відрізка $C_{kl} C_{k-1,l}$. Аналогічне твердження має місце й для виконання рівності

$$\tilde{R}_{kl}^-(\nu) = R_{kl}(\nu) \quad (k, l) \in \bar{Q}_f. \quad (1.23)$$

Наслідок 1.2. Для того щоб

$$\tilde{D}_{kl}(\mu) = D_{kl}(\mu) \quad \text{або} \quad \tilde{D}_{kl}(\nu) = D_{kl}(\nu), \quad (1.24)$$

необхідно й достатньо, щоб проєкції складних ребер δ_f (якщо діаграма має такі ребра) на площину $\mu\nu$ не перетинали внутрішніх частин відрізків $C_{k-1,l} C_{kl}$, $C_{kl} C_{k+1,l}$ (або $C_{k,l-1} C_{kl}$, $C_{kl} C_{k,l+1}$).

Наслідок 1.3. Якщо поверхня δ_f є регулярною, то рівності (1.22)–(1.24) мають місце для кожної пари індексів (μ, ν) , для яких точка $(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f$.

Доведення теореми. Якщо ні одна з проєкцій складних ребер не перетинає внутрішньої частини відрізка $C_{kl} C_{k-1, l}$, то відрізок $B_{kl} B_{k-1, l}$ або є частиною ребра діаграми, або всіма своїми точками лежить на одній грані σ_i ; в обох випадках має місце рівність (1.22). Нехай тепер має місце (1.22). Припустимо, що проєкція деякого ребра діаграми перетинає відрізок $C_{kl} C_{k-1, l}$ в точці H , що лежить в середині цього відрізка і пр. $B=H$. Відрізок $B_{k-1, l} B$ не може бути ребром діаграми, тому що абсциса та ордината будь-якого із кінців ребра повинні бути цілими числами. Отже, відрізок $B_{k-1, l} B$ ділить деяку грань σ на дві частини. Тому точка $B_{k-1, l}$ лежить вище грані σ_i продовженої в усі боки необмежено. Виходить, що $\bar{R}_{kl}(\mu) > R_{kl}(\mu)$, а це суперечить припущенню. Теорема доведена.

1.4. Характеристики (параметри) ребристості діаграми Ньютона. Величини

$$\begin{aligned} D_{kl}^{++} &= \frac{T_{k+1, l} T_{k, l+1}}{T_{kl} T_{k+1, l+1}} = \frac{R_{k+1, l+1}(\mu)}{R_{k+1, l}(\mu)} = \frac{R_{k+1, l+1}(\nu)}{R_{k, l+1}(\nu)}; \\ D_{kl}^{+-} &= \frac{T_{k+1, l} T_{k, l-1}}{T_{kl} T_{k+1, l-1}} = \frac{R_{k+1, l-1}(\mu)}{R_{k+1, l}(\mu)} = \frac{R_{kl}(\nu)}{R_{k+1, l}(\nu)}; \\ D_{kl}^{-+} &= \frac{T_{k-1, l} T_{k, l+1}}{T_{kl} T_{k-1, l+1}} = \frac{R_{kl}(\mu)}{R_{k, l+1}(\mu)} = \frac{R_{k-1, l+1}(\nu)}{R_{k, l+1}(\nu)}; \\ D_{kl}^{--} &= \frac{T_{k-1, l} T_{k, l-1}}{T_{kl} T_{k-1, l-1}} = \frac{R_{kl}(\mu)}{R_{k, l-1}(\mu)} = \frac{R_{kl}(\nu)}{R_{k-1, l}(\nu)} \end{aligned} \quad (1.25)$$

називаються характеристиками або параметрами ребристості діаграми δ_f в околі точки C_{kl} (або в околі вершини P_{kl}). Під околom точки C_{kl} ми, як правило, будемо розуміти квадрат $C_{k-1, l-1} C_{k+1, l-1} C_{k+1, l+1} C_{k-1, l+1}$ з центром $C_{kl} = \text{пр } P_{kl}$.

Теорема 1.4. Для того, щоб вершина P_{kl} діаграми δ_f була правильною, необхідно й достатньо, щоб

$$D_{kl}^{++} \geq 1, D_{kl}^{+-} \geq 1, D_{kl}^{-+} \geq 1, D_{kl}^{--} \geq 1. \quad (1.26)$$

Доведення. Нехай $B(\mu, \nu, \kappa_{\mu\nu})$ — точка діаграми δ_f . Припустимо, що для вершини $P_{kl} = B_{kl}$ виконуються нерівності (1.26). Тоді з першої нерівності

$$\begin{aligned} D_{kl}^{++} &= \left[\exp\left(\ln \frac{1}{T_{kl}}\right) + \exp\left(\ln \frac{1}{T_{k+1, l+1}}\right) \right] : \left[\exp\left(\ln \frac{1}{T_{k+1, l}}\right) + \right. \\ &\left. + \exp\left(\ln \frac{1}{T_{k, l+1}}\right) \right] = \exp[(\kappa_{kl} + \kappa_{k+1, l+1}) - (\kappa_{k+1, l} + \kappa_{k, l+1})] \geq 1 \end{aligned}$$

впливає, що точка $B_{k+1, l+1}$ розташована на площині або вище площини S_1 , проведеної через точки B_{kl} , $B_{k+1, l}$, $B_{k, l+1}$. Покажемо тепер, що всі точки $B_{k+i, l+j}$ ($i, j \geq 0$) діаграми, а значить і точки зображення $P_{k+i, l+j}$ ($i, j \geq 0$, $(k+i, l+j) \in \bar{Q}_f$) лежать на площині або вище площини S_1 . Площини, проведені через точку B_{kl} паралельно координат-

ним площинам $\mu\xi$ та $\nu\xi$, перетинають поверхню δ_f по опуклих вниз лініях, тому точки $B_{k,l+j}$ та $B_{k+i,l}$ з δ_f лежать на площині або вище площини S_1 .

Візьмемо тепер довільну точку $B_{k+i,l+j}$ з δ_f та припустимо, що вона розташована нижче площини S_1 . Звідси випливає, що точка $B_{k+1,l+1}$ лежить вище трикутника $\Delta(B_{kl}, B_{k+1,l}, B_{k+i,l+j})$ (або трикутника $\Delta(B_{kl}, B_{k,l+1}, B_{k+i,l+j})$), які в свою чергу розміщені не вище діаграми δ_f згідно з властивістю г) наслідку 1.1. Отже, точка $B_{k+1,l+1}$ не може належати діаграмі δ_f . Наше припущення неправильне. Отже, всі точки $B_{k+i,l+j}$ ($i, j \geq 0$) розташовані на площині або вище площини S_1 .

Цілком аналогічно, використовуючи нерівності (1.26), доведемо, що всі точки $B_{k+i,l-j}$, $B_{k-i,l+j}$, $B_{k-i,l-j}$ ($i, j \geq 0$; $(k \pm i, l \pm j) \in \bar{Q}_f$) розміщені на площинах або вище відповідних площин S_2, S_3, S_4 , проведених через точки $B_{kl}, B_{k+1,l}, B_{k,l-1}$; $B_{kl}, B_{k,l-1}, B_{k-1,l}$; $B_{kl}, B_{k-1,l}, B_{k,l-1}$. Таким чином, всі точки $B_{\mu,\nu}$, а отже і всі точки зображення $P_{\mu,\nu}$

$(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f$, лежать всередині чотиригранного кута, утвореного площинами S_1, S_2, S_3, S_4 ; тому що, крім того, точки $B_{k,l+1}, B_{k+1,l}, B_{k,l-1}, B_{k-1,l}$ лежать на діаграмі δ_f , то кожний з просторових трикутників $\Delta(B_{kl}, B_{k+1,l}, B_{k,l+1})$; $\Delta(B_{kl}, B_{k+1,l}, B_{k,l-1})$; $\Delta(B_{kl}, B_{k,l+1}, B_{k-1,l})$; $\Delta(B_{kl}, B_{k-1,l}, B_{k,l-1})$ є гранню або складовою частиною грані діаграми δ_f , тобто вершина P_{kl} — правильна.

Доведемо тепер необхідність теореми. Припустимо, що вершина $P_{kl} = B_{kl}$ діаграми є правильна, тоді з трапецій $C_{k+1,l}, B_{k+1,l}, B_{k,l+1}, C_{k,l+1}$ та $C_{kl}, B_{kl}, B_{k+1,l+1}, C_{k+1,l+1}$ легко зауважити нерівності $x_{kl} + x_{k+1,l+1} \geq x_{k+1,l} + x_{k,l+1}$ бо точка $B_{k+1,l+1}$ розміщена вище площини S_1 , проведеної через точки $B_{kl}, B_{k+1,l}, B_{k,l+1}$. З останньої нерівності випливає $D_{kl}^{++} \geq 1$. Аналогічно доводиться решта нерівностей (1.26). Теорема доведена.

З доведення теореми випливає

Наслідок 1.4. Якщо діаграма δ_f є найпростішою, тобто складається тільки з чотирьох граней, які утворюють простий кут в деякій точці зображення P_{kl} , то всі параметри ребристості

$$D_{kl}^{++} = D_{kl}^{+-} = D_{kl}^{-+} = D_{kl}^{--} = 1 \quad (\mu, \nu) \in Q_f. \quad (1.27)$$

§ 2. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ МАЖОРАНТИ НЬЮТОНА ТА ЧИСЛОВИХ НАХИЛІВ І ВІДХИЛЕНЬ ДІАГРАМИ δ_f

Формули, які виражають коефіцієнти мажоранти Ньютона через модулі коефіцієнтів функції (1.1), є досить складними навіть для раціональної функції однієї змінної. Ще більш складні ці формули для раціональної функції багатьох змінних. Те ж саме можна сказати про формули, які виражають числові нахили та відхилення діаграми Ньютона.

2.1. Обчислення окремого коефіцієнта T_{kl} мажоранти Ньютона. Введемо позначення

$$h_{23}(k_1, l_1) = h_{123} = \begin{vmatrix} k_1 - k_2 & l_1 - l_2 \\ k_3 - k_2 & l_3 - l_2 \end{vmatrix},$$

тоді

$$h_{123} = -h_{132}, \quad h_{312} = -h_{213} = h_{123}.$$

Умови, необхідні й достатні для того, щоб точка $C_{kl} = C_{k_0 l_0}$ перебувала всередині трикутника $\Delta(C_{k_1 l_1}, C_{k_2 l_2}, C_{k_3 l_3})$ або належала

стороні чи вершині, як відомо, можна записати у вигляді таких нерівностей:

$$\begin{aligned} H_1 &= h_{23}(k, l) \cdot h_{23}(k_1, l_1) \geq 0; \\ H_2 &= h_{31}(k, l) \cdot h_{31}(k_2, l_2) \geq 0; \\ H_3 &= h_{12}(k, l) \cdot h_{12}(k_3, l_3) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Якщо $H_1=0$, $H_2 \neq 0$, $H_3 \neq 0$ або $H_1=0$, $H_2=0$, $H_3 \neq 0$, то точка C_{kl} лежить відповідно на стороні $C_{k_2 l_2} C_{k_3 l_3}$ або вершині $C_{k_3 l_3}$ трикутника. Якщо $H_1=H_2=H_3=0$, то вершини $C_{k_1 l_1}$, $C_{k_2 l_2}$, $C_{k_3 l_3}$ лежать на одній прямій.

Розглянемо просторовий трикутник, утворений точками зображення $P_{k_1 l_1}$, $P_{k_2 l_2}$, $P_{k_3 l_3}$, проекція якого на площину π дасть трикутник $\Delta(C_{k_1 l_1} C_{k_2 l_2} C_{k_3 l_3})$, вершини якого не лежать на одній прямій.

Нехай для точки $C_{kl} = C_{k_0 l_0}$ виконуються нерівності (2.1). Визначимо аплікату точки $P_{kl} = P(k, l, \xi_{kl})$ перетину трикутника $\Delta(P_{k_1 l_1} P_{k_2 l_2} P_{k_3 l_3})$ з прямою, паралельною осі аплікат $O\xi$, що проходить через точку C_{kl} . Рівняння площини, що проходить через точки зображення, $P_{k_1 l_1}$, $P_{k_2 l_2}$, $P_{k_3 l_3}$, можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} \mu - k_1 & \nu - l_1 & \xi - \xi_1 \\ k_2 - k_1 & l_2 - l_1 & \xi_2 - \xi_1 \\ k_3 - k_1 & l_3 - l_1 & \xi_3 - \xi_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu - k_1 & \nu - l_1 & \ln(a_{k_1 l_1} : t_{kl}) \\ k_2 - k_1 & l_2 - l_1 & \ln(a_{k_1 l_1} : a_{k_2 l_2}) \\ k_3 - k_1 & l_3 - l_1 & \ln(a_{k_1 l_1} : a_{k_3 l_3}) \end{vmatrix} = 0.$$

Визначаючи з цього рівняння коефіцієнт $t_{kl} = \exp(-\xi)$ і беручи до уваги, що

$$1 - \frac{h_{13}(k, l)}{h_{13}(k_2, l_2)} + \frac{h_{12}(k, l)}{h_{13}(k_2, l_2)} = \frac{h_{32}(k, l)}{h_{13}(k_2, l_2)},$$

отримаємо

$$t_{kl} = (a_{k_1 l_1}^{h_{32}(k, l)} a_{k_2 l_2}^{h_{31}(k, l)} a_{k_3 l_3}^{h_{12}(k, l)})^{\frac{1}{h_{12}(k_2, l_2)}}.$$

Нарешті, з визначення діаграми та мажоранти Ньютона отримаємо формулу для визначення коефіцієнта

$$T_{kl} = \max_{H_1, H_2, H_3 \geq 0} t_{kl}, \quad (2.2)$$

де максимальне значення береться по всіх трикутниках $\Delta(P_{k_1 l_1} P_{k_2 l_2} P_{k_3 l_3})$, для яких в (2.1) має місце хоч би одна строга нерівність.

2.2. Визначення окремих числових нахилів і відхилень діаграми Ньютона. Припустимо, що точки зображення функції (1.1) вже побудовані. Визначимо спочатку необхідні й достатні умови, щоб задана точка зображення $P_{kl}(k, l) \in \bar{Q}_f$ була діаграмною точкою. Візьмемо для цього дві довільні точки зображення $P_{k_1 l_1}$, $P_{k_2 l_2}$ для деяких $k_2 < k \leq k_1$ $[(k_1, l_1), (k_2, l_2) \in \bar{Q}_f]$ та визначимо тангенс кута φ між віссю Ov і відрізком $P_{kl} N$ перетину трикутника $\Delta(P_{kl} P_{k_1 l_1} P_{k_2 l_2})$ з площиною, яка проходить через точку зображення P_{kl} паралельно координатній площині $v\xi$. Введемо позначення $\mu_1 = k_1 - k$, $\mu_2 = k - k_2$, $\nu_1 = l_1 - l$, $\nu_2 = l - l_2$, де $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$, $\nu_1 \leq 0$, $\nu_2 \leq 0$. З простих геометричних міркувань одержимо

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_{kl, k_1 l_1, k_2 l_2}^+ (v) = \ln \left(\frac{a_{kl}^{\mu_1 + \mu_2}}{a_{k_1 l_1}^{\mu_1} a_{k_2 l_2}^{\mu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1}}.$$

Визначимо тепер

$$r_{kl}^+(\nu) = \min_{\substack{\mu_1 > 0, \mu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) < 0}} \exp [\operatorname{tg} \varphi_{kl, l_1, k_2, l_2}^+(\nu)] = \min_{\substack{\mu_1 > 0, \mu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) < 0}} \left(\frac{a_{kl}^{\mu_1 + \mu_2}}{a_{k_1 l_1}^{\mu_1} a_{k_2 l_2}^{\mu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2}}, \quad (2.3)$$

де $\frac{1}{k_2 - k_1} h_{12}(k, l) > 0$, але $k_2 - k_1 < 0$, отже, $h_{12}(k, l) < 0$.

Аналогічно встановимо

$$r_{kl}^-(\nu) = \max_{\substack{\mu_1 > 0, \mu_2 > 0 \\ h_{12}(k, l) > 0}} \left(\frac{a_{k_1 l_1}^{\mu_1} a_{k_2 l_2}^{\mu_2}}{a_{kl}^{\mu_1 + \mu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2}}, \quad (2.4)$$

де $\frac{1}{k_2 - k_1} h_{12}(k, l) < 0$, але $k_2 - k_1 < 0$, отже, $h_{12}(k, l) > 0$. Введемо величину

$$d_{kl}(\nu) = \frac{r_{kl}^+(\nu)}{r_{kl}^-(\nu)}. \quad (2.5)$$

Аналогічно знайдемо

$$r_{kl}^+(\mu) = \min_{\substack{\nu_1 > 0, \nu_2 > 0 \\ g_{12}(k, l) < 0}} \left(\frac{a_{kl}^{\nu_1 + \nu_2}}{a_{k_1 l_1}^{\nu_1} a_{k_2 l_2}^{\nu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2}}, \quad (2.6)$$

$$r_{kl}^-(\mu) = \max_{\substack{\nu_1 > 0, \nu_2 > 0 \\ g_{12}(k, l) > 0}} \left(\frac{a_{k_1 l_1}^{\nu_1} a_{k_2 l_2}^{\nu_2}}{a_{kl}^{\nu_1 + \nu_2}} \right)^{\frac{1}{\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2}}, \quad (2.7)$$

де $l_1 \geq l > l_2$, $\frac{1}{l_2 - l_1} g_{12}(k, l) = \frac{1}{l_1 - l_2} h_{12}(k, l)$

і

$$d_{kl}(\mu) = \frac{r_{kl}^+(\mu)}{r_{kl}^-(\mu)}. \quad (2.8)$$

Якщо $d_{kl}(\mu) \geq 1$ і $d_{kl}(\nu) \geq 1$, то точка зображення P_{kl} є діагiamoною. У цьому випадку

$$\tilde{R}_{kl}^-(\mu) = r_{kl}^-(\mu), \quad \tilde{R}_{kl}^-(\nu) = r_{kl}^-(\nu); \quad \tilde{R}_{kl}^+(\mu) = r_{kl}^+(\mu), \quad \tilde{R}_{kl}^+ = r_{kl}^+(\nu); \quad (2.9)$$

$$\tilde{D}_{kl}(\mu) = d_{kl}(\mu), \quad \tilde{D}_{kl}(\nu) = d_{kl}(\nu), \quad (2.10)$$

де праві частини визначаються за формулами (2.3) — (2.8).

Якщо не виконується хоч одна з нерівностей $d_{kl}(\mu) \geq 1$ і $d_{kl}(\nu) \geq 1$, то точка зображення P_{kl} не є діагiamoною і розміщена вище діагiamoми δ_f .

Розглянемо всі точки $C_{k_1 l_1}$ і $C_{k_2 l_2}$ з многокутника Q_f , відмінні від точки C_{kl} , для яких $h_{12}(k, l) = 0$, що означає, що точка C_{kl} лежить на відрізку $C_{k_1 l_1} C_{k_2 l_2}$. Позначимо через H_{kl} точку відрізка $P_{k_1 l_1} P_{k_2 l_2}$, абсциса якої дорівнює k , а ордината l ; тоді легко показати, що

$$C_{kl} H_{kl} = \ln (a_{k_1 l_1}^{-\mu_1} a_{k_2 l_2}^{-\mu_2})^{\frac{1}{\mu_1 + \mu_2}} = \ln (a_{k_1 l_1}^{-\nu_1} a_{k_2 l_2}^{-\nu_2})^{\frac{1}{\nu_1 + \nu_2}},$$

де

$$\mu_1 = k_1 - k > 0, \quad \mu_2 = k - k_2 > 0 \quad \text{і} \quad \nu_1 = l_1 - l > 0, \quad \nu_2 = l - l_2 > 0 \quad \text{або} \quad \nu_1 = l - l_1 < 0, \\ \nu_2 = l_2 - l < 0; \quad \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2}.$$

Рівність останніх співвідношень випливає з умови, що $h_{12}(k, l) = 0$. Значить, щоб при умові $d_{kl}(\mu) > 1$, $d_{kl}(\nu) > 1$ в точці зображення P_{kl} була вершина, необхідно й достатньо, щоб виконувалась нерівність $-\ln a_{kl} = \xi < C_{kl} H_{kl}$ для всіх пар точок $C_{k_1 l_1}$, $C_{k_2 l_2}$ з $\bar{Q}_f$, для яких $h_{12}(k, l) = 0$. Звідси одержимо

$$a_{kl} > (a_{k_1 l_1}^{\mu_1} a_{k_2 l_2}^{\mu_2})^{\frac{1}{\mu_1 + \mu_2}} = (a_{k_1 l_1}^{\nu_1} a_{k_2 l_2}^{\nu_2})^{\frac{1}{\nu_1 + \nu_2}}, \quad (2.11)$$

де

$$\mu_1 = k_1 - k > 0, \mu_2 = k - k_2 > 0 \text{ і } \nu_1 = l_1 - l > 0, \nu_2 = l - l_2 > 0 \text{ або } \nu_1 = l - l_1 < 0, \nu_2 = l_2 - l < 0. \quad (2.12)$$

Якщо $d_{kl}(\mu) = 1$, $d_{kl}(\nu) = 1$, то точка P_{kl} лежить на грані σ діаграми Ньютона. Якщо $d_{kl}(\mu) > 1$ і $d_{kl}(\nu) = 1$ (або $d_{kl}(\mu) = 1$ і $d_{kl}(\nu) > 1$), то точка зображення лежить на спрямленому орієнтованому (правильному) ребрі, яке паралельне координатній площині $v\xi$ (відповідно $\mu\xi$). Якщо ж $d_{kl}(\mu) > 1$, $d_{kl}(\nu) > 1$, то точка P_{kl} лежить на ребрі $P_{k_1 l_1} P_{k_2 l_2}$, яке не є правильним ребром, або точка P_{kl} є вершиною діаграми δ_f .

Звідси випливають теореми.

Теорема 2.1. Для того щоб точка зображення P_{kl} була діаграмною, необхідно й достатньо, щоб

$$\tilde{D}_{kl}(\mu) = d_{kl}(\mu) \geq 1, \tilde{D}_{kl}(\nu) = d_{kl}(\nu) \geq 1. \quad (2.13)$$

$$a_{kl} \geq (a_{k_1 l_1}^{\mu_1} a_{k_2 l_2}^{\mu_2})^{\frac{1}{\mu_1 + \mu_2}}$$

Теорема 2.2. Для того щоб точка зображення P_{kl} була вершиною, необхідно й достатньо, щоб

$$\tilde{D}_{kl}(\mu) = d_{kl}(\mu) > 1, \tilde{D}_{kl}(\nu) = d_{kl}(\nu) > 1 \quad (2.14)$$

і

$$a_{kl} > (a_{k_1 l_1}^{\mu_1} a_{k_2 l_2}^{\mu_2})^{\frac{1}{\mu_1 + \mu_2}}, \quad (2.15)$$

де $h_{12}(k, l) = 0$, при цьому повинні виконуватися нерівності (2.12) для всіх точок (k_1, l_1) , (k_2, l_2) многокутника $\bar{Q}_f$.

2.3. Наявність правильної вершини в точці зображення. Розглянемо необхідні й достатні умови, щоб в даній точці зображення була правильна вершина. Обчислення величин $r_{kl}^+(\nu)$, $r_{kl}^-(\nu)$, $r_{kl}^+(\mu)$ і $r_{kl}^-(\mu)$ за формулами (2.3)–(2.7) слід здійснювати двома етапами: а) обчислити $\tilde{r}_{kl}^+(\nu)$ і $\tilde{r}_{kl}^-(\nu)$ за формулами (2.3) і (2.4) з припущенням, що $\mu_1 > 0$ і $\mu_2 > 0$; б) обчислити $\tilde{r}_{kl}^+(\nu)$ і $\tilde{r}_{kl}^-(\nu)$ за допомогою тих самих формул, припускаючи, що $\mu_1 = 0$ і $\mu_2 > 0$; ці формули тепер запишуться простіше, а саме

$$\tilde{r}_{kl}^+(\nu) = \min_{\mu_1=0, \nu>0} \left(\frac{a_{kl}}{a_{k, l+\nu}} \right)^{1/\nu}, \quad \tilde{r}_{kl}^-(\nu) = \max_{\mu_1=0, \nu>0} \left(\frac{a_{k, l-\nu}}{a_{kl}} \right)^{1/\nu}.$$

Якщо $\tilde{r}_{kl}^+(\nu) \leq r_{kl}^+(\nu)$ або $\tilde{r}_{kl}^-(\nu) \geq r_{kl}^-(\nu)$, то в точці зображення P_{kl} вершина δ_f не може бути правильною. Якщо ж $\tilde{r}_{kl}^+(\nu) > r_{kl}^+(\nu)$ і $\tilde{r}_{kl}^-(\nu) <$

$< \tilde{r}_{kl}^-(\nu)$, то відрізки $P_{kl} B_{k, l-1}$ і $P_{kl} B_{k, l+1}$ є елементарними (або спрямленими) орієнтованими ребрами діаграми δ_f , які будуть паралельні координатній площині $v\xi$. За формулами (2.6) — (2.7) аналогічно обчислимо величини $\tilde{r}_{kl}^+(\mu)$, $\tilde{r}_{kl}^-(\mu)$ ($\nu_1, \nu_2 > 0$) і величини

$$\tilde{r}_{kl}^+(\mu) = \min_{\nu_1=0, \mu>0} \left(\frac{a_{kl}}{a_{k+\mu, l}} \right)^{1/\mu}, \quad \tilde{r}_{kl}^-(\mu) = \max_{\nu_1=0, \mu>0} \left(\frac{a_{k-\mu, l}}{a_{kl}} \right)^{1/\mu}.$$

Звідси випливає, що з точки зображення P_{kl} буде виходити чотири відрізки $P_{kl} B_{k, l-1}$, $P_{kl} B_{k, l+1}$, $P_{kl} B_{k-1, l}$, $P_{kl} B_{k+1, l}$, які є орієнтованими (правильними) ребрами δ_f , якщо одночасно виконуються нерівності

$$d_{kl}(\nu) > 1, \quad d_{kl}(\mu) > 1:$$

$$\tilde{r}_{kl}^+(\nu) > \tilde{r}_{kl}^+(\mu), \quad \tilde{r}_{kl}^-(\nu) < \tilde{r}_{kl}^-(\mu); \quad \tilde{r}_{kl}^+(\mu) > \tilde{r}_{kl}^+(\nu), \quad \tilde{r}_{kl}^-(\mu) < \tilde{r}_{kl}^-(\nu) \quad (2.16)$$

(при цьому слід зауважити, що кожен з цих відрізків може зображати частину спрямленого орієнтованого ребра діаграми). Неважко переконатися, що правильне й обернене твердження.

Для того, щоб при виконанні нерівностей (2.13) точка P_{kl} була правильною вершинсю діаграми, необхідно й достатньо, щоб всі точки зображення раціональної функції перебували не нижче чотирьох площин, які утворюють чотиригранний кут в точці P_{kl} і проходять через ребра $P_{kl} B_{k, l-1}$, $P_{kl} B_{k, l+1}$, $P_{kl} B_{k+1, l}$, $P_{kl} B_{k-1, l}$. Цей чотиригранний кут утворює найпростішу багатогранну поверхню, спрямовану опуклістю вниз δ_f^* .

Виведемо тепер аналітичну умову, яка показує, коли точка зображення $P_{k+\mu, l+\nu}$ ($\mu, \nu \leq 0$; $(k+\mu, l+\nu) \in \overline{Q_f}$) лежить не нижче поверхні δ_f^* , яка утворює правильний кут в точці P_{kl} . Нехай нормальний многочлен, що відповідає найпростішій поверхні δ_N^* , є

$$N^*(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in \overline{Q_N}} T_{\mu\nu}^* z^\mu w^\nu.$$

Точки зображення найпростішої поверхні будемо позначати через $B_{\mu\nu}^* = B^*(\mu, \nu, \xi_{\mu\nu})$, де $\xi_{\mu\nu} = -\ln T_{\mu\nu}^*$. Тому що всі точки діаграмні, то $B_{\mu\nu}^* = P_{\mu\nu}^*$. Через те, що правильне ребро поверхні δ_N^* проходить через точки B_{kl}^* , $B_{k, l-1}^*$, $B_{k, l+1}^*$, $B_{k-1, l}^*$ і $B_{k+1, l}^*$ діаграми δ_f , то ці точки збігаються відповідно з точками B_{kl}^* , $B_{k, l-1}^*$, $B_{k, l+1}^*$, $B_{k-1, l}^*$, $B_{k+1, l}^*$ поверхні δ_N^* , отже,

$$T_{kl} = T_{kl}^*, \quad T_{k, l-1} = T_{k, l-1}^*, \quad T_{k, l+1} = T_{k, l+1}^*, \quad T_{k-1, l} = T_{k-1, l}^*, \\ T_{k+1, l} = T_{k+1, l}^*. \quad (2.17)$$

Записуючи рівняння площини, що проходить через точки зображення B_{kl}^* , $B_{k+1, l}^*$, $B_{k, l+1}^*$, неважко показати, що точка зображення $P_{k+\mu, l+\nu}$ ($\mu > 0, \nu > 0$) заданої раціональної функції розміщуватиметься не нижче проведеної площини, якщо виконується нерівність

$$T_{k+\mu, l+\nu} \leq T_{k+1, l}^\mu T_{k, l+1}^\nu : T_{kl}^{\mu+\nu-1}.$$

Аналогічні нерівності дістанемо і для точок $P_{k+\mu, l+\nu}$ ($\mu > 0, \nu < 0$;

$\mu < 0, \nu > 0; \mu < 0, \nu < 0$). Враховуючи (2.17), ці нерівності можна записати в загальному вигляді так:

$$T_{k+\mu, l+\nu} \leq \frac{T_{k+\text{sign } \mu, l}^{|\mu|} T_{k, l+\text{sign } \nu}^{|\nu|}}{T_{kl}^{|\mu|+|\nu|-1}}. \quad (2.18)$$

Звідси теорема

Теорема 2.3. Для того щоб точка зображення P_{kl} функції (1.1) була правильною вершиною, необхідно й достатньо, щоб одночасно виконувались нерівності (2.18), причому остання нерівність виконувалась би для всіх точок зображення цієї функції.

На закінчення цього параграфу зробимо такі зауваження. Коефіцієнти $T_{\mu\nu}(\mu, \nu) \in Q_f$ мажоранти Ньютона (1.7) можна визначити за формулами (2.2), коефіцієнти $T_{\mu\nu}(\mu, \nu) \in L_f$ визначаються так само, як це робилось для функції однієї змінної [1]. Знаючи коефіцієнти мажоранти $\mathfrak{M}_f(z, w)$, ми за формулами (1.11) і (1.12) легко обчислимо числові нахили і відхилення δ_f , а також побудуємо всі точки $B_{\mu\nu}$ діаграми з цілочисловими значеннями μ і ν .

§ 3. ВИДІЛЕННЯ ПОЛІЦИЛІНДРІВ, В ЯКИХ ЦІЛА РАЦІОНАЛЬНА ФУНКЦІЯ $f(z, w)$ НЕ МОЖЕ НАБУВАТИ НУЛЬОВИХ ЗНАЧЕНЬ

Застосуємо тепер теорію мажорант і діаграм Ньютона, викладену вище, для виділення областей в площинах комплексних змінних z і w , в яких $f(z, w)$ не має нулів. У даній роботі ми розглянемо найпростіший випадок, коли $A_{00} \neq 0$.

3.1. Основна функція. За припущенням, $A_{00} \neq 0$, а тому що точка S_{00} лежить у вершині опуклого многокутника $\bar{Q}_f$, то, згідно з визначенням діаграми Ньютона, можна записати

$$|A_{00}| = a_{00} = T_{00}, |A_{\mu\nu}| = a_{\mu\nu} \leq T_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu) \in \bar{Q}_f. \quad (3.1)$$

З (1.11) і (1.12) знаходимо

$$\frac{T_{\mu\nu}}{T_{00}} = \prod_{i=0}^{\mu-1} \left(\frac{T_{i+1,0}}{T_{i0}} \right) \prod_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{T_{\mu, j+1}}{T_{\mu j}} \right) = R_{10}^{-\mu}(\mu) \prod_{i=1}^{\mu-1} D_{i0}^{-\mu+i}(\mu) R_{\mu 1}^{-\nu}(\nu) \prod_{j=1}^{\nu-1} D_{\mu j}^{-\nu+j}(\nu), \quad (3.2)$$

або інакше

$$\frac{T_{\mu\nu}}{T_{00}} = \prod_{j=0}^{\nu-1} \left(\frac{T_{0, j+1}}{T_{0j}} \right) \prod_{i=0}^{\mu-1} \left(\frac{T_{i+1, \nu}}{T_{i\nu}} \right) = R_{01}^{-\nu}(\nu) \prod_{j=1}^{\nu-1} D_{0j}^{-\nu+j}(\nu) R_{1\nu}^{-\mu}(\mu) \prod_{i=1}^{\mu-1} D_{i\nu}^{-\mu+i}(\mu). \quad (3.3)$$

Припустимо, що z і w є коренями (1.1), тоді, ізолюючи коефіцієнт A_{00} в другий бік рівності та беручи до уваги (3.1) і (3.2) або (3.3), отримаємо

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f} \left| \frac{A_{\mu\nu}}{A_{00}} \right| x^\mu y^\nu \leq \sum_{(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f} \frac{T_{\mu\nu}}{T_{00}} = x^\mu y^\nu = \\ &= \sum_{(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f} \left[\prod_{i=1}^{\mu-1} D_{i0}^{-\mu+i}(\mu) \left(\frac{x}{R_{10}(\mu)} \right) \prod_{j=1}^{\nu-1} D_{\mu j}^{-\nu+j}(\nu) \left(\frac{y}{R_{\mu 1}(\nu)} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

де $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, $x = |z|$, $y = |w|$.

Зробимо заміну $x = \frac{R_{10}(\mu)}{u}$ і $y = \frac{R_{01}(\nu)}{v}$, тоді, в силу позначень (1,25), нерівність (3.4) можна переписати так:

$$0 \leq -1 + \sum_{\substack{(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}} \prod_{i=0}^{\mu-1} D_{i0}^{-\mu+i}(\mu) u^{-\mu} \prod_{j=0}^{\nu-1} D_{\mu j}^{-\nu+j}(\nu) v^{-\nu} \frac{1}{(D_{00}^{++} D_{10}^{++} \dots D_{\mu-1,0}^{++})^\nu}, \quad (3.5)$$

де D_{i0}^{++} — параметри ребристості діаграми δ_f .

Кожній парі індексів μ і ν , $(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f$ в силу (1.14) можна зіставити пару цілих невід'ємних чисел $\tau_{\mu 0}$ і $\eta_{\mu \nu}$ таких, що будуть виконуватися нерівності

$$D_{\mu 0}(\mu) \geq u_0^{\tau_{\mu 0}}(\mu, 0) \in \bar{Q}_f; \quad D_{\mu \nu}(\nu) \geq v_0^{\eta_{\mu \nu}}(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f, \quad (3.6)$$

де u_0 і v_0 — фіксовані додатні числа, більші від одиниці.

Нерівність (3.5), згідно з (3.6), тепер може бути записана так:

$$0 \leq -1 + \sum_{(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f} b_{\mu \nu} u^{-\sum_{i=1}^{\mu-1} (\mu-i) \tau_{i0}} v^{-\sum_{j=1}^{\nu-1} (\nu-j) \eta_{\mu j}} = H(u, v), \quad (3.7)$$

де $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, $u = u_0$, $v = v_0$;

$$b_{\mu \nu} = \begin{cases} (D_{00}^{++} D_{10}^{++} \dots D_{\mu-1,0}^{++})^{-\nu}, & \text{якщо } D_{00}^{++} D_{10}^{++} \dots D_{\mu-1,0}^{++} < 1 \\ 1, & \text{якщо } D_{00}^{++} D_{10}^{++} \dots D_{\mu-1,0}^{++} \geq 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

тобто завжди $1 \leq b_{\mu \nu} \leq \infty$. (3.9)

Функція

$$H(u, v) = -1 + \sum_{\substack{(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}} b_{\mu \nu} u^{-\alpha_{\mu 0}} v^{-\beta_{\mu \nu}}, \quad (3.10)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu 0} &= \mu + \sum_{i=1}^{\mu-1} (\mu-i) \tau_{i0} \geq \mu \\ \beta_{\mu \nu} &= \nu + \sum_{j=1}^{\nu-1} (\nu-j) \eta_{\mu j} \geq \nu \end{aligned} \quad (\mu, \nu) \in \bar{Q}_f, \quad (\mu, \nu) \neq (0, 0), \quad (3.11)$$

називається основною функцією в методах, за допомогою яких виділяються області змінних, де ціла раціональна функція не перетворюється в нуль.

Якщо при виводі (3.4) замість (3.2) використати (3.3), то основна функція запишеться так:

$$H(u, v) = -1 + \sum_{\substack{(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}} b_{\mu \nu} u^{-\alpha_{\mu \nu}} v^{-\beta_{0 \nu}}, \quad (3.12)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu\nu} &= \mu + \sum_{i=1}^{\mu-1} (\mu - i) \tau_{i\nu} \geq \mu \\ \beta_{0\nu} &= \nu + \sum_{j=1}^{\nu-1} (\nu - j) \eta_{0j} \geq \nu \end{aligned} \quad (\mu, \nu) \in \bar{Q}_f, (\mu, \nu) \neq (0, 0). \quad (3.13)$$

і де

$$\begin{aligned} 1 &\leq b_{\mu\nu} \leq \infty, \\ b_{\mu\nu} &= \begin{cases} (D_{00}^{++} D_{01}^{++} \dots D_{0, \nu-1}^{++})^{-\mu}, & \text{якщо } D_{00}^{++} D_{01}^{++} \dots D_{0, \nu-1}^{++} < 1 \\ 1 & , \text{якщо } D_{00}^{++} D_{01}^{++} \dots D_{0, \nu-1}^{++} \geq 1. \end{cases} \\ D_{\mu\nu}(\mu) &\geq u^{\tau_{\mu\nu}}, D_{0\nu} \geq v^{\eta_{0\nu}} \quad (0, \nu) \in \bar{Q}_f, (\mu, \nu) \in \bar{Q}_f. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Примітка. При визначенні параметрів ребристості за формулами (1.25) може трапитися, що треба знати коефіцієнти мажоранти (1.7) точок $(k+1, l+1)$, $(k+1, l)$, $(k, l+1)$, які лежать зовні многокутника $\bar{Q}_f$. У цьому випадку такі коефіцієнти слід вважати нульовими або треба розглядати мажоранту $\mathfrak{M}_f^*(z, w)$ на многокутнику $\bar{Q}_f^*$, який вміщає всередині себе многокутник $\bar{Q}_f$, про що буде сказано нижче.

3.2. Дослідження основної функції. Для того, щоб показники степенів $\tau_{\mu 0}$ і $\eta_{\mu\nu}$ набували тільки цілих невід'ємних значень в (3.6) для відхилень, які задовольняють (1.14), було прийнято, що основи степенів u_0 і v_0 більші за одиницю.

Зробивши це зауваження, визначимо тепер області зміни змінних, для яких основна функція (3.10) або (3.12) набуває від'ємних значень $H(u, v) \leq 0$. Зробити це для довільного опуклого многокутника $\bar{Q}_f$, на якому задана функція (3.10), в загальному випадку дуже важко, тому що ті області u і v , в яких основна функція набуває від'ємних значень, істотно залежать від форми та розташування прямокутника $\bar{Q}_f$. Тому замість опуклої вниз багатогранної поверхні δ_f -діаграми Ньютона, заданої на многокутнику $\bar{Q}_f$, можна розглядати опуклу вниз багатогранну поверхню δ_f^* на більшому многокутнику $\bar{Q}_f^*$, який вміщає в собі многокутник $\bar{Q}_f$. Причому на многокутнику $\bar{Q}_f^*$ поверхні δ_f і δ_f^* збігаються. Ззовні многокутника $\bar{Q}_f$ опукла вниз поверхня δ_f продовжується довільно на многокутник $\bar{Q}_f^*$. Відповідно й мажоранта Ньютона (1.7) розглядається на многокутнику $\bar{Q}_f^*$.

В даній роботі домовимося вважати, що многокутник є прямокутником з вершинами в точках C_{00} , C_{p0} , C_{0q} і C_{pq} . Якщо через n_1 і n_2 позначити найбільші показники μ і ν змінних z і w в (1.1), то, очевидно,

$$p \geq n_1, q \geq n_2. \quad (3.15)$$

Основна функція (3.10), задана на прямокутнику Q_f^* , може бути записана так:

$$H(u, v) = -1 + \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu, v) \neq (0, 0)}}^p \sum_{\nu=0}^q b_{\mu\nu} u^{-\alpha_{\mu 0}} v^{-\beta_{\mu\nu}}, \quad (3.16)$$

де $b_{\mu\nu}$, $\alpha_{\mu 0}$, $\beta_{\mu\nu}$ визначаються за формулами (3.8) і (3.11).

Можна вважати, що $n_1 > 0$ і $n_2 > 0$, бо при $n_1 = 0$ (або $n_2 = 0$) ціла раціональна функція залежить тільки від одної змінної, а такі функції були вивчені в роботах [1, 2].

Кожен доданок (3.16), за винятком першого, рівного мінус одиниці, є додатним, значить, щоб $H(u, v) \leq 0$, необхідно й достатньо, щоб суми

$$\varphi(u) = \sum_{i=0}^p u^{-\alpha_{i0}} \text{ і } \psi(v) = \sum_{j=1}^q v^{-\beta_{j0}} \quad (3.17)$$

були менші за одиницю. Звідси, в силу (3.9) і (3.10), дістаємо, що u і v , для яких $H(u, v) \leq 0$, повинні задовольняти нерівності

$$u > 1, v > 1. \quad (3.18)$$

Якщо $\varphi(u_0) < 1$, то для додатних значень v основна функція $H(u_0, v)$ в (3.16) строго спадає від ∞ до $-1 + \varphi(u_0) < 0$. Отже, вона перетворюється в нуль тільки при одному додатному значенні $v_0 > 1$, причому

$$\varphi(v_0) < 1 \text{ і } H(u_0, v) < 0 \text{ при } v > v_0 > 1. \quad (3.19)$$

При $\psi(v_0) < 1$ так само знайдемо єдине значення $u_0 > 1$, при якому $H(u, v_0) = 0$ і

$$\varphi(u_0) < 1, H(u, v_0) < 0 \text{ при } u > u_0 > 1. \quad (3.20)$$

Припустимо тепер, що на прямокутнику Q_f^* задана ще функція

$$\tilde{H}(u, v) = -1 + \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu, v) \neq (0, 0)}}^p \sum_{\nu=0}^q \tilde{b}_{\mu\nu} u^{-\tilde{\alpha}_{\mu 0}} v^{-\tilde{\beta}_{\mu\nu}},$$

причому $\tilde{\alpha}_{\mu 0} \geq \alpha_{\mu 0}$, $\tilde{\beta}_{\mu\nu} \geq \beta_{\mu\nu}$, $\tilde{b}_{\mu\nu} \leq b_{\mu\nu}$ для всіх точок $(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f^*$, де знак строгої нерівності зустрічається хоч би раз. Якщо $\varphi(u_0) < 1$, $\tilde{\varphi}(u_0) < 1$ і $H(u_0, v_0) = \tilde{H}(u_0, v_0) = 0$, то завжди

$$v_0 > \tilde{v}_0, \quad (3.21)$$

так само з $\psi(v_0) < 1$, $\tilde{\psi}(v_0) < 1$ і $H(u_0, v_0) = \tilde{H}(u_0, v_0) = 0$ випливає

$$u_0 > \tilde{u}_0. \quad (3.22)$$

3.3. Основні теореми.

Теорема 3.1. Цілі невід'ємні показники $\tau_{\mu 0}$ і $\tau_{\mu\nu}$ степенів в нерівностях (3.6) (або (3.14)) завжди можна підібрати так, що ці нерівності будуть виконуватися для всіх відхилень мажоранти (1.7) заданої функції (1.1). В цих нерівностях основа степеня u_0 (або v_0) береться довільно, але з умовою, що $\varphi(u_0) < 1$; значення v_0 — це додатний корінь основної функції $H(u_0, v) = 0$ в (3.16).

Якщо допустити тепер, що коефіцієнт A_{00} функції (1.1) і всі D_{j0}^{++} ($i, 0$) $\in \bar{Q}_f^*$ відмінні від нуля, то функція $f(z, w)$ не може набувати нульових значень у відкритому поліциліндрі з центром в точці $(0, 0)$:

$$|z| < \frac{R_{10}(\mu)}{u_0} \quad \text{і} \quad |w| < \frac{R_{01}(\nu)}{v_0}, \quad (3.23)$$

де $R_{10}(\mu)$ і $R_{01}(\nu)$ — числові нахили мажоранти $\mathfrak{M}_f(z, w)$.

Д о в е д е н н я. Справді, нерівності (3.6) і (3.14) завжди будуть виконуватися, якщо покласти $\tau_{\mu 0}$ і $\eta_{\mu \nu}$ рівними нулеві. Припустимо тепер від супротивного, що $f(\tilde{z}, \tilde{w}) = 0$ при $|\tilde{z}| < \frac{R_{10}(\mu)}{u_0}$ і $|\tilde{w}| < \frac{R_{01}(\nu)}{v_0}$. Покладемо $\tilde{u}_0 = \frac{R_{10}(\mu)}{|\tilde{z}|}$ і $\tilde{v}_0 = \frac{R_{01}(\nu)}{|\tilde{w}|}$. Звідси $\tilde{u}_0 > u_0$ і $\tilde{v}_0 > v_0$, значить, згідно з нерівністю (3.19), можемо записати

$$H(u_0, \tilde{v}_0) = -1 + \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}}^p \sum_{\substack{\nu=0}}^q b_{\mu \nu} u_0^{-\alpha_{\mu 0}} \tilde{v}_0^{-\beta_{\mu \nu}} < 0,$$

якщо замінити в $H(u_0, \tilde{v}_0)$, u_0 на більшу величину $\tilde{u}_0$, то

$$\sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}}^p \sum_{\substack{\nu=0}}^q b_{\mu \nu} \tilde{u}_0^{-\alpha_{\mu 0}} \tilde{v}_0^{-\beta_{\mu \nu}} < \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}}^p \sum_{\substack{\nu=0}}^q b_{\mu \nu} u_0^{-\alpha_{\mu 0}} \tilde{v}_0^{-\beta_{\mu \nu}}$$

і, значить, $H(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0) < 0$, що суперечить основній нерівності (3.7). Теорема доведена.

П р и м і т к а. Показники $\tau_{\mu 0}$ і $\eta_{\mu \nu}$ в нерівностях (3.6) слід брати відмінними від нуля для більшого по змозі числа індексів (μ, ν) з $\bar{Q}_f^*$, тому що в цьому випадку радіуси кіл в (3.23) будуть більшими. Це неважко зауважити з нерівностей (3.21) і (3.22).

Припустимо, що коефіцієнт A_{0n} при w^n в функції (1.1) n -ого степеня відмінний від нуля. Застосовуючи до функції $w^n f\left(z, \frac{1}{w}\right)$ теорему (3.1), дістанемо, що функція $f(z, w)$ не може набувати нульових значень, для модулів змінних якої одночасно виконуються нерівності

$$|z| < \frac{R_{1n}(\mu)}{u_0}, \quad |w| < \frac{R_{0n}(\nu)}{v_0}. \quad (3.24)$$

Аналогічно, якщо $A_{n0} \neq 0$, то функція $f(z, w)$ не набуває нульового значення для змінних, модулі яких одночасно задовольняють умови

$$|z| > \frac{R_{n0}(\mu)}{u_0}, \quad |w| < \frac{R_{n1}(\nu)}{v_0}. \quad (3.25)$$

Якщо функція $f(z, w)$ має коефіцієнт $A_{n_1 n_2} \neq 0$, де $n_1 + n_2 = n$, причому всі інші доданки $A_{\mu \nu} z^\mu w^\nu$ мають $\mu \leq n_1$ і $\nu \leq n_2$, то, застосовуючи теорему (3.1) до функції $z^{n_1} w^{n_2} f\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right)$, одержимо, що функція $f(z, w)$

не може набувати нульових значень для змінних, модулі яких задовольняють одночасно умову

$$|z| > R_{n_1, n_2}(\mu) u_0, \quad |w| > R_{n_1, n_2}(\nu) v_0. \quad (3.26)$$

Нарешті, якщо $A_{0n_2} \neq 0$, а всі інші доданки $A_{\mu, \nu} z^\mu w^\nu$ функції (1.1) n -ого степеня мають $\nu \leq n_2$, то нерівності (3.24) можна замінити нерівностями

$$|z| < \frac{R_{1n_2}(\mu)}{u_0}, \quad |w| > R_{0n_2}(\nu) v_0. \quad (3.27)$$

Якщо ж $A_{n,0} \neq 0$, а всі доданки $A_{\mu, \nu} z^\mu w^\nu$ мають $\mu \leq n_1$, то нерівності (3.25) можна замінити нерівностями

$$|z| > R_{n,0}(\mu) u_0, \quad |w| < \frac{R_{n,1}(\nu)}{v_0}. \quad (3.28)$$

3.4. Заміна основної функції $H(u, v)$ більш простою функцією $H^*(u, v)$. У попередніх рубриках даного параграфа за значенням u_0 ($\varphi(u_0) < 1$) доводилось визначати додатний корінь v_0 основної функції $H(u_0, v)$ в (3.16). Ще більші труднощі виникають при складанні основної функції (3.16), тому що треба виконати велику обчислювальну роботу для обчислення коефіцієнтів $b_{\mu, \nu}$ цієї функції, а для цього треба визначити коефіцієнти мажоранти $T_{\mu, \nu}$ і характеристики ребристості діаграми D_{10}^{++} . Цих труднощів можна уникнути, хоч при цьому отримаємо більш грубі результати.

Для цього замінімо мажоранту (1.7) функції (1.1), в якій $A_{00} \neq 0$, нормальною мажорантою

$$\mathfrak{M}_f^*(z, w) = \sum_{\mu=0}^p \sum_{\nu=0}^q T_{\mu, \nu}^* z^\mu w^\nu, \quad (3.29)$$

де

$$T_{00} = T_{00}^*, \quad T_{\mu, \nu} \leq T_{\mu, \nu}^* \quad (\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^*, \quad (3.30)$$

$\overline{Q}_f^*$ — прямокутник з вершинами $C_{00}, C_{p0}, C_{0q}, C_{pq}$.

Нерівності (3.4) в цьому випадку можуть бути переписані так:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sum_{\substack{(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^* \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}} \frac{T_{\mu, \nu}^*}{T_{00}^*} x^\mu y^\nu \leq \sum_{\substack{(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^* \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}} \frac{T_{\mu, \nu}^*}{T_{00}^*} x^\mu y^\nu = \\ &= \sum_{\substack{(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^* \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}} \left[\prod_{i=1}^{\mu-1} D_{i0}^{*- \mu + i}(\mu) \left(\frac{x}{R_{10}^*(\mu)} \right)^\mu \prod_{j=1}^{\nu-1} D_{\mu j}^{*- \nu + j}(\nu) \left(\frac{y}{R_{\mu \nu}^*(\nu)} \right)^\nu \right]. \end{aligned}$$

Поклавши $x = \frac{R_{10}^*(\mu)}{u}$, $y = \frac{R_{01}^*(\nu)}{v}$ і використовуючи замість нерівностей (3.6) нерівності

$$D_{\mu 0}^*(\mu) \geq u_{0\mu 0}^*, \quad D_{\mu \nu}^* \geq v_{0\mu \nu}^* \quad (\mu, 0) \in \overline{Q}_f^*, \quad (\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^*, \quad (3.31)$$

отримаємо

$$0 \leq -1 + \sum_{\substack{(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}} b_{\mu, \nu}^* u^{-\mu} v^{-\nu} = H^*(u, v), \quad (3.32)$$

де $b_{\mu, \nu}$ визначаються аналогічно формулі (3.8) і задовольняють нерівності (3.9).

Для функції (3.32) мають місце нерівності (3.18) — (3.22), а також справедлива теорема (3.1), в якій тільки треба замінити числові нахили $R_{10}(\mu)$ і $R_{01}(\nu)$ в (3.23) відповідно через числові нахили $R_{10}^*(\mu)$ і $R_{01}^*(\nu)$ нормальної мажоранти (3.29).

В цій роботі братимемо нормальну мажоранту (3.29) найпростішою, а саме — будемо розглядати мажоранту $\mathcal{M}_f^*(z, w)$, в якій діаграма δ_f^* — найпростіша, тобто складається з чотирьох граней, що утворюють кут у вершині P_{kl} . Тут беремо $k=0$, $l=0$, тому діаграма δ_f^* буде складатися з однієї грані, яка утворює в точці P_{00} правильний кут. Тому що точка C_{00} належить контуру многокутника $\bar{Q}_f$, то два правильні ребра збігаються з віссю аплікату.

Якщо діаграма Ньютона δ_f утворює в точці зображення правильний кут, тобто просторовий трикутник $\Delta(B_{00}B_{01}B_{10})$ належить грані σ діаграми δ_f , то за діаграму δ_f^* мажоранти (3.29) можна брати площину, що проходить через точки $P_{00}=B_{00}$, B_{01} , B_{10} . У цьому випадку $R_{10}^*(\mu)=R_{10}(\mu)$ і $R_{01}^*(\nu)=R_{01}(\nu)$. Якщо ж вершина P_{00} діаграми δ_f неправильна, то замість діаграми δ_f^* мажоранти (3.29) беремо довільну площину, яка проходить через точку P_{00} , причому всі точки зображення $P_{\mu, \nu}$, $(\mu, \nu) \in \bar{Q}_f$ розміщені не нижче цієї площини. В останньому випадку

$$R_{10}^*(\mu) \leq R_{10}(\mu), \quad R_{01}^*(\nu) \leq R_{01}(\nu).$$

Теорема 3.1 для випадку, який розглядається, запишеться так.

Теорема 3.2. Якщо для цілої раціональної функції (1.1) з коефіцієнтом $A_{00} \neq 0$ нормальна мажоранта (3.29) має найпростішу діаграму δ_f^* , для якої при $k=l=0$ виконується (3.30), то функція $f(z, w)$ не може перетворюватися в нуль у відкритому поліциліндрі з центром в точці $(0, 0)$

$$|z| < \frac{R_{10}^*(\mu)}{u_0}, \quad |w| < \frac{R_{01}^*(\nu)}{v_0}. \quad (3.33)$$

де

$$v_0 = 1 + \frac{u_0}{u_0 - 2} \quad (u_0 > 2, \quad v_0 > 2), \quad (3.34)$$

$R_{10}^*(\mu)$ і $R_{01}^*(\nu)$ — числові нахили нормальної мажоранти (3.29).

Доведення. Згідно з умовою теореми діаграма δ_f^* мажоранти (3.29) є найпростішою, причому виконуються нерівності (3.30), отже, діаграма δ_f^* складається з однієї грані, що виходить з точки P_{00} ; проекція цієї грані на площину $\mu\nu$ збігається з $\bar{Q}_f^*$. Оскільки прямокутник $\bar{Q}_f^*$ може бути довільним, тільки б він вмещав в собі многокутник

$\overline{Q}_f$, то ми візьмемо його таким, що збігається з першим квадрантом площини $\mu\nu$, тобто покладемо $p=\infty$ і $q=\infty$. Згідно з визначенням, для простішої діаграми δ_f^* маємо $D_{\mu\nu}^*(\mu)=D_{\mu\nu}^*(\nu)=1$ $(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^*$. Крім того, в силу наслідку 1.4 одержимо рівності $D_{\mu\nu}^{++}=1$ $(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^*$. Звідси отримаємо, що всі $\alpha_{\mu 0}^*=\mu$, $\beta_{\mu\nu}^*=\nu$ і $b_{\mu\nu}=1$ $(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f^*$. Таким чином, основне рівняння запишеться так:

$$H(u, v) = -1 + \sum_{\substack{\mu=0 \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}}^{\infty} u^{-\mu} \sum_{\substack{\nu=0 \\ (\mu, \nu) \neq (0, 0)}}^{\infty} v^{-\nu} = -2 + \\ + \left(1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \dots\right) = -2 + \frac{u}{u-1} \cdot \frac{v}{v-1}; \\ \varphi(u) = \sum_{\mu=1}^{\infty} u^{-\mu}, \quad \psi(v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} v^{-\nu}.$$

Якщо $\varphi(u_0) < 1$, $\psi(v_0) < 1$, то $u_0 > 2$, $v_0 > 2$.

З цих нерівностей випливає (3.34). Доведення того факту, що $f(z, w)$ не може перетворюватися в нуль при змінних, модулі яких задовольняють нерівності (3.33), здійснюється аналогічно доведенню теореми 3.1.

У даній роботі було розглянуто для простоти випадок, коли $A_{00} \neq 0$. Це обмеження не є істотним. Коефіцієнт A_{00} може дорівнювати нулю, але в цьому випадку в основній теоремі два круги в (3.23) замінюються кругом і кільцем.

Очевидно, що якщо $f(z, w)$ не може набувати нульових значень при виконанні нерівностей (3.23) або (3.33), то нульових значень не може набирати й система рівнянь, в яку входить ця функція.

Примітка. Якщо в теоремі (3.2) розглядати скінченний прямокутник $\overline{Q}_f^*$ з вершинами C_{00} , C_{p0} , C_{0q} , C_{pq} , то в теоремі (3.2) треба рівність (3.34) замінити основною функцією

$$H(u, v) = -2 + \sum_{\mu=0}^p u^{-\mu} \sum_{\nu=0}^q v^{-\nu} = -2 + \left(1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} + \dots\right); \\ \varphi(u) = \sum_{\mu=1}^p u^{-\mu}, \quad \psi(v) = \sum_{\nu=1}^q v^{-\nu}, \quad (3.35)$$

Нехай маємо систему

$$f(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f} A_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu} \quad (A_{00} \neq 0); \\ g(z, w) = \sum_{(\mu, \nu) \in \overline{Q}_f} B_{\mu\nu} z^{\mu} w^{\nu} \quad (B_{00} \neq 0) \quad (3.36)$$

цілих раціональних функцій.

Застосовуючи теорему (3.1) або (3.2) до функції $f(z, w)$, а потім до функції $g(z, w)$, можемо неоднозначно знаходити радіуси кіл (3.23) (або (3.33)) $\tilde{r}_1, \tilde{r}_1$ і $\tilde{r}_2, \tilde{r}_2$, такі, що функція $f(z, w)$ не може набувати нульових значень, коли одночасно виконуються нерівності $|z| < \tilde{r}_1, |w| < \tilde{r}_2$, а функція $g(z, w)$ не може перетворюватися в нуль, коли $|z| < \tilde{r}_1, |w| < \tilde{r}_2$. Звідси теорема.

Теорема 3.3. Система рівнянь (3.36) при $A_{00} \neq 0, B_{00} \neq 0$ не може мати кореня (z_1, w_1) , що задовольняє нерівності

$$|z_1| < r_1, |w_1| < r_2,$$

де $r_1 = \min(\tilde{r}_1, \tilde{r}_1), r_2 = \max(\tilde{r}_2, \tilde{r}_2)$ або $r_1 = \max(\tilde{r}_1, \tilde{r}_1), r_2 = \min(\tilde{r}_2, \tilde{r}_2)$.

Краще в основних функціях $H(u, v), H(U, V)$, складених для функцій $f(z, w)$ і $g(z, w)$, змінну u_0 і U_0 обирати так, щоб $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Ostrowski. Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries Laurent, Acta Math., 72, 1940.
2. О. М. Костовський. Узагальнення теореми Островського про локалізацію по модулях нулів рядів Лорана. Вісн. ЛДУ, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.

А. И. КАРДАШ, А. Н. КОСТОВСКИЙ, И. И. ЧУЛИК

МАЖОРАНТЫ И ДИАГРАММЫ НЬЮТОНА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(резюме)

В данной работе строится аппарат мажорант и диаграмм Ньютона для целой рациональной функции двух комплексных переменных, исследуются их общие свойства. Вводится понятие числовых наклонов и отклонений в направлении координатных осей, а также понятие ребристости диаграммы Ньютона. Предлагаются формулы для определения основных характеристик диаграммы и мажоранты Ньютона.

В качестве приложения полученных результатов строятся полицилиндры, в которых целая рациональная функция не может принимать нулевых значений.

А. І. ПИЛИПОВИЧ

ПРО КОНСТРУКТИВНУ ПОТУЖНІСТЬ ПЛОЩИНОГРАФА

У процесі виготовлення моделей різних просторових форм важливою ланкою є розпилювання, яке можна розглядати як геометричні побудови площинсграфом — приладом, який будує в просторі площини. Виникає питання про конструктивну потужність цього приладу, якщо він використовується при певних умовах. Використання всякого комплексу інструментів для розв'язування конструктивної задачі супроводиться встановленням скінченної послідовності основних (для даного комплексу) побудов, виконання яких приводить до побудови шуканої фігури. Такими основними побудовами для комплексу площинсграф і сферограф [1] є наступні: 1) побудова площини, 2) побудова сфери, 3) побудова довільного скінченного числа спільних точок двох побудованих фігур, якщо такі точки існують, 4) побудова довільних точок, які належать або не належать побудованій фігурі. Можливість виконання цих побудов обґрунтовується системою прийнятих аксіом [2].

Якщо припустити, що просторова фігура складається із скінченного числа точок, які її визначають, прямих, відрізків, променів, кіл, дуг, граней, сферичних поверхонь або їх частин, то має місце така теорема, аналогічна теоремі Штейнера:

Теорема 1. *Якщо геометрична задача на побудову просторової фігури, визначеної скінченим числом точок, розв'язується за допомогою площинсграфа і сферографа, то її можна розв'язати одним лише площинсграфом, якщо в конструктивному просторі побудовано сферу Ω і відмічено її центр — точку O .*

При розв'язуванні конструктивної задачі за допомогою даного комплексу інструментів точки одержуємо лише при виконанні таких побудов:

1) побудова спільних точок: а) двох прямих, б) прямої і кола, в) прямої і площини, г) прямої і сфери, д) двох кіл, е) кола і площини, є) кола і сфери;

2) побудова довільного скінченного числа точок, які належать: а) прямій, б) колу, в) площині, г) сфері;

3) побудова точки, яка не належить заданій фігурі.

Для виконання побудов 1-а, 1-в, 2-а, 2-в досить мати лише площинсграф. Отже, для доведення теореми залишається показати, що й інші побудови 1—3 можуть бути виконані одним площинсграфом, якщо в конструктивному просторі побудована сфера Ω і відмічений її центр O , а саме:

(1-б) побудова спільних точок даної прямої заданого кола;

(1-г) побудова спільних точок даної прямої і заданої сфери;

(1-д) побудова спільних точок двох заданих кіл;

- (1-е) побудова спільних точок даної площини і заданого кола;
- (1-е) побудова спільних точок заданого кола і заданої сфери;
- (2-б) побудова довільного скінченного числа точок, які належать заданому колу;
- (2-г) побудова довільного скінченного числа точок, які належать заданій сфері;

3) побудова довільної точки, яка не належить заданій фігурі. Використовуючи згадану сферу, розв'яжемо площинографом спочатку декілька допоміжних задач.

Задача 1. На даній прямій відкласти послідовно два довільні рівні між собою відрізки.

Через дану пряму a і центр сфери Ω проводимо площину γ , яка перетне сферу по колу ω (рис. 1). Оберемо на прямій a довільну точку

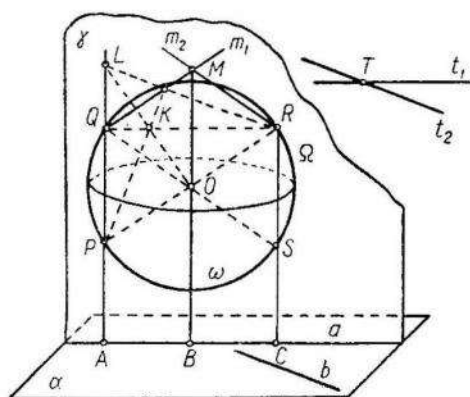


Рис. 1.

А і проведемо деяку січну LA , яка перетне коло ω в точках P і Q . Побудуємо точки R, S , симетричні точкам P і Q відносно центра O . Знаючи середину діаметра PR , через точку Q проведемо пряму m_1 , паралельну цьому діаметру, як показано на рис. 1. Також проведемо пряму m_2 , паралельну діаметру QS . Нехай M — точка перетину прямих m_1 і m_2 . Тоді пряма $OM \parallel PQ \parallel RS$. Якщо OM перетинає пряму a в точці B , а RS — в точці C , то $AB = BC$. Задача розв'язується одним площинографом, тому що вимагає проведення лише прямих ліній, які можна одержати як результат перетину площин.

Задача 2. Через точку провести пряму, паралельну даній прямій.

Нехай дано пряму a і точку T . На прямій a відкладемо послідовно два рівні відрізки $AB = BC$ (рис. 1). Знаючи середину B відрізка AC , через точку T , як відомо [3], можна провести пряму $t_1 \parallel a$.

Задача 3. Даний відрізок поділити навпіл.

Спочатку проводимо пряму, паралельну даному відрізкові (задача 2), після чого, як відомо, задача розв'язується.

Задача 4. Через точку провести площину, паралельну даній площині.

Нехай дано площину α і точку T (рис. 1). В площині α оберемо дві непаралельні прямі a і b . Через точку T проведемо прямі t_1 і t_2 , відповідно паралельні прямим a і b (задача 2). Площина, визначена прямими t_1 і t_2 , є шуканою.

Задача 5. Через точку P провести пряму, перпендикулярну до площини α .

Через точку O (центр сфери Ω) проведемо площину β , паралельну до площини α (задача 4). Нехай площина β перетне сферу Ω по колу ω_1 (рис. 2). Оберемо в площині β довільний діаметр AB кола ω_1 і побудуємо в цій площині діаметр CD , перпендикулярний до AB . Для цього на колі ω_1 (рис. 2, а) оберемо довільну точку R , через яку проведемо хорду RQ , паралельну AB (задача 2). В перетині прямих AR і BQ визначиться така точка S , що пряма SO перпендикулярна до AB .

Через діаметр AB проведемо довільну площину γ , яка перетне сферу по колу ω_2 . Побудуємо в цьому колі ω_2 діаметр KF , перпендику-

лярний до AB . Прямі CD і KF визначають площину δ , перпендикулярну прямій AB . Отже, площини δ і β , або δ і α , перпендикулярні. Нехай площина δ перетне сферу Ω по колу ω_3 . Через точку K , яка належить колу ω_3 , проведемо хорду KN цього кола, паралельну CD . Через N і O проведемо діаметр NL . Тоді хорда KL перпендикулярна площині β . Знаючи середину E хорди KL , проведемо через точку P пряму a , паралельну прямій KL (задача 2). Пряма a перпендикулярна площині α .

Задача 6. Через точку P провести площину, перпендикулярну даній прямій l .

Через точку O (рис. 2) проведемо пряму $AB \parallel l$ (задача 2). Побудуємо площину $\delta \perp AB$, як це зроблено в попередній задачі. Площина, що проходить через точку P паралельно площині δ , є шуканою і може бути побудована (задача 4).

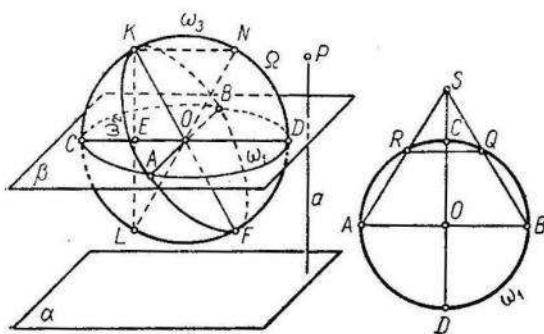


Рис. 2.

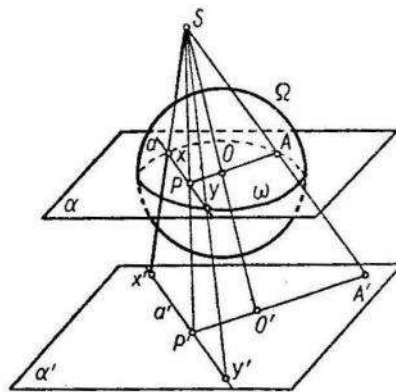


Рис. 3.

Задача 7. В даній площині α побудувати перпендикуляр до даної в цій площині прямої a .

Побудуємо площину β , перпендикулярну прямій a (задача 6). Лінія перетину площин α і β є шуканою.

Після розв'язання цих допоміжних задач можемо приступити до виконання згаданих побудов.

Побудова (1-б). Побудувати спільні точки даної прямої a' і заданого кола ω' , які знаходяться в площині α' .

Нехай коло ω' задане центром O' і точкою A' (рис. 3). Через центр сфери Ω проведемо площину α , паралельну площині α' (задача 4). Тоді коло ω перетину площини α з сферою Ω є гомотетичним (перспективно-подібним) до кола ω' з центром гомотетії S , який легко побудувати. Нехай пряма a (гомотетична прямій a') перетинає коло ω в точках X і Y , які є гомотетичними до шуканих точок X' і Y' . Знаючи точки X і Y , можна легко побудувати шукані точки X' і Y' .

Якщо дана пряма не лежить в площині заданого кола, то знайдемо точку X' перетину цієї прямої з площиною заданого кола і перевіримо, чи точка X' лежить на цьому колі, наприклад, методом гомотетії.

Побудова (1-г). Побудувати спільні точки даної прямої a' і заданої сфери Ω' .

Будемо вважати задану сферу Ω' гомотетичною сфері Ω . Нехай сфера Ω' задається центром O' і однією точкою A' . Провівши через точку O пряму OA , паралельну прямій $O'A'$, визначимо точку перетину A цієї прямої з сферою Ω . Знаючи точки O і O' , A і A' , побу-

дуємо центр гомотетії S . Побудувавши пряму a , гомотетичну прямій a' , визначимо точки X і Y перетину прямої a з сферою Ω . Точки X' і Y' , гомотетичні точкам X і Y , є шуканими і можуть бути побудованими.

Побудова (1-д). Побудувати спільні точки двох заданих кіл.

Нехай в площині α задано два кола $O_1(R_1)$ і $O_2(R_2)$. Побудувавши радикальну вісь цих кіл [3], знайдемо точки її перетину з заданим колом (побудова 1-б), які й будуть шуканими. Але побудова радикальної осі є можливою на основі задачі 7, а тому задача може бути розв'язана.

Якщо кола $O_1(R_1)$ і $O_2(R_2)$ задані в різних площинах α_1 і α_2 , то спочатку знайдемо точки A, B перетину кола $O_2(R_2)$ з площиною α_1 (наступна побудова (1-е)), а потім перевіримо, чи ці точки лежать на колі $O_1(R_1)$, наприклад, чи пряма AB перетинає коло $O_1(R_1)$ в точках A, B , чи в якихось інших точках (побудова (1-б)).

Побудова (1-е). Побудувати спільні точки даної площини α і заданого кола, яке лежить в площині β .

Побудувавши лінію перетину l площин α і β , визначимо точки перетину прямої l і заданого кола (побудова (1-б)), які й будуть шуканими.

Побудова (1-е). Побудувати спільні точки заданої сфери Ω_1 і заданого кола ω_2 .

Нехай сфера Ω_1 задана центром O_1 і точкою A_1 (тобто радіусом $R_1=O_1A_1$), а коло ω_2 — центром O_2 і точкою A_2 (тобто радіусом $R_2=O_2A_2$), і розміщене воно в площині α , яка перетинає сферу Ω_1 по якомусь колу ω_1 . Якщо замість кола $\omega_2(O_2, R_2)$ уявити собі сферу $\Omega_2(O_2, R_2)$ і побудувати радикальну площину β сфер Ω_1 і Ω_2 (задача аналогічна побудові (1-д) і може бути виконана на основі задач 7 і 6), то лінія перетину l площини α з площиною β буде радикальною віссю кіл ω_2 і ω_1 . Точки перетину прямої l і заданого кола ω_2 (побудова (1-б)) є шуканими точками.

Побудова (2-б). Побудувати довільне скінченне число точок, які належать заданому колу.

Для розв'язання задачі використаємо побудову (1-б) спільних точок заданого кола і довільно проведеної прямої в площині заданого кола.

Побудова (2-г). Побудувати довільне скінченне число точок, які належать заданій сфері.

Побудова виконується аналогічно попередній.

Побудова 3. Побудувати точку, яка не належить заданій фігурі.

Нехай фігура задається скінченним числом точок, прямих, кіл, граней, сферичних поверхонь, які є заданими. Оберемо довільні дві точки з заданої сукупності точок і проведем через них пряму l . Знайдемо всі точки перетину даної прямої l з заданими прямими, колами, сферами, гранями і відмітимо їх на цій прямій. Тоді довільна точка прямої l , яка не належить до числа відмічених точок, не належить і заданій фігурі.

Теорема доведена.

Якщо на поверхні сфери Ω обрати область S , яка має такі властивості: а) границя області є крива без вузлів, б) дана область S містить пару точок сфери Ω , симетричних відносно її центра O , причому хоч би одна з них є всередині області, то має місце така теорема:

Теорема 2. *Всяка площина, яка проходить через центр сфери Ω , перетне область S по дузі великого кола.*

Ця теорема є очевидною, тому що всяка площина, що проходить через центр сфери, поділяє сферу на дві рівні частини, але область S

не вміщається на півсфері, а тому ця площа перетне область S по дузі великого кола. Ця дуга може виявитись як завгодно малою.

На основі теореми М. Болтовського і теореми 2 сферу Ω з відміченим її центром O в теоремі 1 можна замінити областю S з відміченим її центром O , тобто має місце така теорема:

Теорема 3. *Якщо геометрична задача на побудову просторової фігури, визначеної скінченим числом точок, розв'язується за допомогою площинографа і сферографа, то її можна розв'язати одним лише площинографом, якщо в конструктивному просторі побудовано частину S сферичної поверхні з відміченим її центром — точкою O , якщо область S задовольняє згадані вище умови.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Л. Б у й м о л а. Деякі питання геометрографії n -мірного евклідового простору. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.
2. А. І. П и л и п о в и ч. Про геометричні побудови в просторі. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.
3. Б. И. А р г у н о в, М. Б. Б а л к. Геометрические построения на плоскости. М., 1957.

А. И. ПИЛИПОВИЧ

О КОНСТРУКТИВНОЙ МОЩНОСТИ ПЛОСКОГРАФА

(ре з ю м е)

Рассматривается вопрос о возможности решения конструктивных задач в пространстве с помощью одного плоскографа, если в пространстве построена сфера с отмеченным ее центром или некоторая ее часть.

Доказываются соответствующие теоремы, аналогичные теоремам Штейнера и М.-Болтовского.

В. А. ГАЛАЗЮК

ПРО ОДИН НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЛАМЕ

Нехай дано диференціальне рівняння Ламе [1] у формі

$$y'' - \left[\lambda - \mu k^2 \frac{1}{dn^2(\beta, k')} \right] y = 0, \quad 0 \leq \beta \leq 2K', \quad (1)$$

де $dn(\beta, k')$ — еліптична функція Якобі [1]; k і k' — відповідно модуль і додатковий модуль еліптичної функції; K' — повний еліптичний інтеграл першого роду, який відповідає модулю k' , λ і μ — довільні комплексні числа. До стандартної Якобієвої форми [1] рівняння (1) може бути приведене заміною змінних $\beta = i(\alpha + K)$, де K — повний еліптичний інтеграл першого роду, який відповідає модулю k . Для рівняння (1) відомі [1] розв'язки в тому випадку, коли $n(n+1) = \mu$, де $h=0, 1, 2, \dots$

Запропонований спосіб розв'язку рівняння (1) при довільних комплексних μ полягає в тому, що в певних інтервалах зміни змінної β розв'язки рівняння (1) можуть бути зображені наближено через функції Мат'є [2] або через функції Лежандра [3].

1. Розглянемо випадок, коли $0 \leq \beta \ll K'$. Використаємо відоме співвідношення [1]

$$\frac{cn(\alpha, k)}{dn(\alpha, k)} \Big|_{\alpha=i\beta} = \frac{1}{dn(\beta, k')}, \quad (2)$$

а потім функцію $\frac{cn^2(\alpha, k)}{dn^2(\alpha, k)}$ розкладемо в ряд Фур'є, отримаємо

$$k^2 \frac{cn^2(\alpha, k)}{dn^2(\alpha, k)} = \frac{K-E}{K} - \frac{2\pi^2}{K^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos \frac{n\pi\alpha}{K}, \quad (3)$$

де E — повний еліптичний інтеграл другого роду, а $q = \exp\left(-\pi \frac{K'}{K}\right)$.

Ряд (3) збігається при

$$0 \leq \frac{\pi\alpha}{K} < i \frac{\pi K'}{K}. \quad (4)$$

З врахуванням співвідношення (2) і рівності (3) рівняння (1) можна записати у вигляді

$$y'' - \left[a + 8\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \operatorname{ch} 2n\psi \right] y = 0, \quad (5)$$

де, згідно з (4),

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \psi &= \frac{\pi\beta}{2K} < \frac{\pi K'}{2K} \\ a &= \left(\lambda - \frac{K-E}{K} \mu \right) \frac{4K^2}{\pi^2} \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

З [1] відомо, що якщо $0 \leq k < 1$, то $q \ll 1$. Тому, якщо вважати, що $\beta = pK'$, де $0 \leq p < 1$, і знехтувати в знакозмінному ряді рівняння (5) членами порядку

$$\frac{q^{1-p}(1+q^{4p})}{(1+q^2)(1+q^{2p})} \quad (7)$$

в порівнянні з одиницею, отримаємо рівняння Мат'є [2]

$$y'' - [a - 2h \operatorname{ch} 2\psi] y = 0, \quad (8)$$

де $h = 4\mu q / (1 - q^2)$. Розв'язки рівняння Мат'є добре вивчені в роботі [2]. Більш точні розв'язки рівняння (5) можна отримати, користуючись методами теорії збурень [4], якщо за незбурене рівняння взяти рівняння Мат'є (8).

2. Для того, щоб отримати розв'язки рівняння (1) в околі точки $\beta = K'$, зробимо в рівнянні (5) заміну змінних

$$\psi = \frac{\pi K'}{2K} - \xi. \quad (9)$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$y'' - \left[a + 8\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \operatorname{ch} 2n\xi + 4\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2n\xi} \right] y = 0. \quad (10)$$

Якщо просумувати ряд, який містить експоненціальну функцію, то отримаємо

$$y'' + \left[\frac{\mu}{\operatorname{ch}^2 \xi} - a + 8\mu \sum_{n=1}^{n-1} (-1)^n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \operatorname{ch} 2n\xi \right] y = 0. \quad (11)$$

Якщо вважати, що $\xi = \frac{\pi K'}{2K} (1-p')$, де $0 \leq p' \leq 2$, і в рівнянні (11) знехтувати членами порядку

$$\frac{q^{2p} [1 + q^{2(1-p)}] [1 + q^{(1-p)}]^2}{1 - q^2} \quad (12)$$

в порівнянні з одиницею, то отримаємо таке диференціальне рівняння:

$$y'' + \left[\frac{\nu(\nu+1)}{\operatorname{ch}^2 \xi} - m^2 \right] y = 0, \quad (13)$$

де $\nu(\nu+1) = \mu$, $m^2 = a$.

Загальний розв'язок рівняння (13) запишеться у вигляді

$$y = C_1 P_y^m(\operatorname{th} \xi) + C_2 Q_y^m(\operatorname{th} \xi), \quad (14)$$

де $P_y^m(\operatorname{th} \xi)$ і $Q_y^m(\operatorname{th} \xi) \in [3]$ відповідно приєднані функції Лежандра першого і другого роду.

Більш точні розв'язки рівняння (11) можна отримати, користуючись методами теорії збурень [4], якщо за незбурене рівняння взяти рівняння Лежандра (13).

ЛІТЕРАТУРА

1. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, т. 2. М., 1963.
2. Н. В. Мак-Лаклан. Теория и приложения функций Матье. М., 1953.
3. Е. В. Гобсон. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., 1952.
4. Ф. М. Морс, П. Фешбах. Методы теоретической физики. М., 1960.

В. А. ГАЛАЗЮК

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ

(резюме)

В работе предлагается приближенный способ решения дифференциального уравнения Ламе при произвольных комплексных значениях входящих в него параметров. Показано, что в определенных интервалах изменения независимой переменной дифференциальное уравнение Ламе может быть приближенно приведено к дифференциальному уравнению Матье или к дифференциальному уравнению присоединенных функций Лежандра.

Б. В. ВАЛЬКО, И. В. ЛЮДКЕВИЧ, Л. О. РОМАНІВ

РОЗРАХУНОК ПОЛЯ І ТРАЄКТОРІЙ ЕЛЕКТРОННО-ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ З ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

Розглянемо електронно-оптичну систему, що складається з трьох циліндрів, причому два з них закриті по боках, а третій, середній, — відкритий. Меридіальний переріз цієї системи з врахуванням симетрії відносно осі OZ і її розміри вказані на рис. 1. На крайніх електродах задається потенціал $u=1$, а на середньому $u=0$.

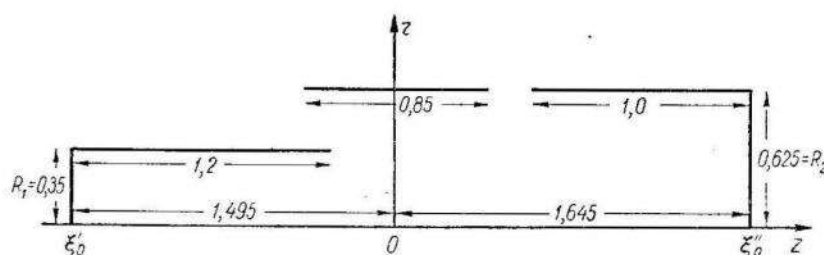


Рис. 1.

Задача знаходження потенціалу такої системи, згідно з роботами [1], [2], зводиться до визначення невідомої густини $q(s)$ з інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Дане інтегральне рівняння розв'язуємо наближено, і труднощі при обчисленнях залежать від способу зображення густини $q(s)$. Як показали приклади розрахунку електронних лінз, найбільш ефективно зображення густини у вигляді суми кільцевих зарядів на кінцях електродів і неперервно розподілених густин. Тоді потенціал у будь-якій точці $M(r, z)$ для електронно-оптичної системи, показаної на рис. 1, можна зобразити так:

$$\begin{aligned}
 u(r, z) = & \int_{-1.495}^{-0.295} q_1(\xi) \frac{K(r, z, R_1, \xi) d\xi}{V(R_1 + r)^2 + (\xi - z)^2} + \int_{-0.425}^{0.425} q_2(\xi) \frac{K(r, z, R_2, \xi) d\xi}{V(R_2 + r)^2 + (\xi - z)^2} + \\
 & + \int_{0.645}^{1.645} q_3(\xi) \frac{K(r, z, R_2, \xi) d\xi}{V(R_2 + r)^2 + (\xi - z)^2} + \int_0^{R_1} q_4(R) \frac{K(r, z, R, \xi_0') dR}{V(R + r)^2 + (z - \xi_0')^2} + \\
 & + \int_0^{R_2} q_5(R) \frac{K(r, z, R, \xi_0'') dR}{V(R + r)^2 + (z - \xi_0'')^2} + \sum_{j=1}^6 C_j \frac{K(r, z, R_j, z_j)}{V(R_j + r)^2 + (z - z_j)^2} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$R_j = \begin{cases} R_1, & j = 1, 2 \\ R_2, & j = 3, 4, 5, 6, \end{cases}$$

де $q_1(\xi)$, $q_2(\xi)$, $q_3(\xi)$, $q_4(R)$ і $q_5(R)$ — неперервно розподілені густини вигляду

$$\begin{aligned} q_1(\xi) &= d_1 + \sum_{k=1}^4 \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (z_k - \xi)^2}; \\ q_2(\xi) &= d_2 + \sum_{k=8,9} \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (z_k - \xi)^2}; \\ q_3(\xi) &= d_3 + \sum_{k=13}^{16} \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (z_k - \xi)^2}; \\ q_4(R) &= d_4 + \frac{a_{17} b_{17}}{b_{17}^2 + (R - R_1)^2}; \\ q_5(R) &= d_5 + \frac{a_{18} b_{18}}{b_{18}^2 + (R - R_2)^2}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}, \quad k^2 = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + (z-\xi)^2}.$$

Тут a_k , d_k і c_j — довільні лінійні параметри; b_k — довільні наперед задані нелінійні параметри; z_k — точки, обрані на електродах; R і ξ — циліндричні координати довільної точки на електроді; z_j — точки на кінцях електродів.

Далі розв'язуємо систему ($n=23$) лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаних задоволенням граничних умов в наперед заданих точках, які повинні бути точками **максимального потенціалу** від відповідних густин (2), і перевіряємо граничні умови в проміжних точках. Перевірка граничних умов у проміжних точках дає можливість судити про точність наближеного розв'язку для потенціалу $u(r, z)$, значення якого наведені в таблиці.

r_i	z_i	$u(r_i, z_i)$	r_i	z_i	$u(r_i, z_i)$
0,125	-1,470	1,003447	0,650	-0,106	-0,000470
0,325	-1,445	0,999268	0,650	+0,106	-0,000208
0,325	-1,295	1,000655	0,600	+0,845	1,002361
0,325	-1,045	1,000096	0,600	+1,245	0,999959
0,325	-0,745	1,000464	0,600	+1,595	0,999195
0,325	-0,495	0,998413	0,250	+1,620	0,999963

Траєкторії розглядуваної електронно-оптичної системи задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2u_0} \cdot \frac{\partial u(r, z)}{\partial r};$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{2u_0} \cdot \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} \quad (3)$$

в безрозмірних координатах. Застосовуючи екстраполяційну формулу Адамса—Штермера

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= 2z_k - z_{k-1} + h^2 \left(\frac{7}{6} z_k'' - \frac{5}{12} z_{k-1}'' + \frac{1}{3} z_{k-2}'' - \frac{1}{12} z_{k-3}'' \right); \\ r_{k+1} &= 2r_k - r_{k-1} + h^2 \left(\frac{7}{6} r_k'' - \frac{5}{12} r_{k-1}'' + \frac{1}{3} r_{k-2}'' - \frac{1}{12} r_{k-3}'' \right), \end{aligned} \quad (4)$$

одержуємо траєкторії цієї системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. В. Валько, Й. В. Людкевич, І. О. Прусов. Розрахунок електростатичного поля системи електродів малої товщини методом нелінійних параметрів. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 1, 1965.
2. Б. В. Валько, І. О. Прусов, Л. О. Романів. Осесиметричний потенціал систем електродів малої товщини. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-матем., вип. 2, 1965.

Б. В. ВАЛЬКО, Й. В. ЛЮДКЕВИЧ, Л. Е. РОМАНІВ

РАСЧЕТ ПОЛЯ И ТРАЕКТОРИИ ОДНОЙ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

(резюме)

В работе решается одна конкретная задача электронной оптики методом нелинейных параметров, сущность которого заключается в представлении поля потенциалом простого слоя и в специальном представлении плотности в виде линейной комбинации некоторых функций, содержащих параметры, от которых они зависят нелинейным образом.

О. В. БЛАЖНІЄВСЬКА

ВПЛИВ РІДИНИ НА ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ

Розглянемо круглу пружну пластинку, закріплену певним чином у безмежному жорсткому екрані, що з одного боку стикається з ідеальною стисливою рідиною. Пластинка здійснює вільні коливання малої порівняно з її лінійними розмірами амплітуди. Тоді рух рідини, викликаний коливаннями пластинки, як відомо [1], визначається потенціалом швидкостей Φ , що задовольняє хвильове рівняння

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0,$$

де Δ — оператор Лапласа; c — швидкість поширення звукових хвиль у рідині.

Оберемо циліндричну систему координат (r, θ, z) з початком у центрі пластинки і віссю z , перпендикулярною до площини пластинки, та розглядатимемо лише усталені осесиметричні коливання, для яких нормальні зміщення пластинки

$$w^*(r, t) = w(r) e^{-i\omega t}$$

і відповідно потенціал швидкостей

$$\Phi(r, z, t) = \varphi(r, z) e^{-i\omega t}.$$

У цьому випадку $\varphi(r, z)$ задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi = 0. \quad (1)$$

Тут $k = \frac{\omega}{c}$.

Крім того, повинні виконуватися такі умови:

1) гранична умова

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} i\omega w(r) & r \geq a \\ 0 & r < a, \end{cases} \quad (2)$$

де a — радіус пластинки;

2) умови випромінювання Зоммерфельда на безмежності

$$\begin{aligned} \varphi &= O\left(\frac{1}{r}\right) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} - ik\varphi &= O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Коливання пластинки описуються рівнянням

$$\frac{\partial^4 w^*}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w^*}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w^*}{\partial r} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} = \frac{p}{D}, \quad (4)$$

де h — товщина пластинки; ρ — густина матеріалу пластинки; D — циліндрична жорсткість; p — гідродинамічний тиск.

Використовуючи інтеграл Коші, одержимо, що

$$p = -\rho_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{z=z_0} = i\rho_0 \omega \varphi(r, z)|_{z=0} e^{-i\omega t},$$

де ρ_0 — густина рідини.

Пластинка закріплена таким чином, що на контурі $r=a$ виконуються умови

$$w(r) = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Як відомо [2], умови (5) означають, що зміщення пластинки та головна кривина поверхні пластинки вздовж лінії закріплення дорівнюють нулеві.

Використовуючи функцію Гріна для рівняння Гельмгольца (1) з крайовими умовами (2), (3), одержимо, що

$$\varphi(r, z) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} w(\rho) \frac{e^{ikR_1}}{R_1} d\psi \rho d\rho,$$

де

$$R_1 = \sqrt{R^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \psi + z^2}.$$

Використавши інтеграл Зоммерфельда [3]

$$\frac{e^{ik\sqrt{R^2+z^2}}}{\sqrt{R^2+z^2}} = \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{t^2-k^2}z}}{\sqrt{t^2-k^2}} J_0(tR) t dt \quad (z \geq 0),$$

де $J_0(tR)$ — функція Бесселя першого роду, і враховуючи теорему додавання для циліндричних функцій нульового порядку, одержимо

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho \cos \psi + z^2}}}{\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho \cos \psi + z^2}} d\psi = \int_0^\infty \frac{te^{-\sqrt{t^2-k^2}z}}{\sqrt{t^2-k^2}} J_0(tr) J_0(t\rho) dt.$$

Отже, для функції $\varphi(r, z)$ дістанемо такий вираз:

$$\varphi(r, z) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_0^a \int_0^\infty \frac{t J_0(tr) J_0(t\rho)}{\sqrt{t^2-k^2}} \rho w(\rho) e^{-\sqrt{t^2-k^2}z} \cdot dt d\rho,$$

а для гідродинамічного тиску на пластинку —

$$p = \frac{\rho_0 \omega^2}{2\pi} \int_0^a \int_0^\infty \frac{t J_0(tr) J_0(t\rho)}{\sqrt{t^2-k^2}} \rho w(\rho) dt d\rho. \quad (6)$$

Таким чином, задача про усталені, осесиметричні коливання пластинки в контакті з водою, згідно з (4), (6), зводиться до розв'язання інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - w^2 \frac{\rho h}{D} w =$$

$$= \frac{\rho_0 \omega^2}{D} \int_0^a w(\rho) \left[\int_0^\infty \frac{t J_0(tr) J_0(t\rho)}{V t^2 - k^2} dt \right] \rho d\rho \quad (7)$$

з крайовими умовами (5).

Застосуємо до рівняння (7) інтегральне перетворення Ханкеля з скінченими границями [2]

$$\bar{w}(\alpha_i a) = \int_0^a w(r) J_0(\alpha_i r) r dr, \quad (8)$$

де $\alpha_i a$ — корінь рівняння $J_0(\alpha_i a) = 0$.

З (8) маємо

$$w(r) = \frac{2}{a^2} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{w}(\alpha_j a) \frac{J_0(\alpha_j r)}{[J_1(\alpha_j a)]^2}.$$

Для визначення трансформант $\bar{w}(\alpha_i a)$ одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$[(\alpha_i a)^4 - (\beta a)^4] \bar{w}(\alpha_i a) = \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \bar{w}(\alpha_j a), \quad (9)$$

в яких прийняті такі позначення:

$$(\beta a)^4 = \frac{\omega^2 \rho h a^4}{D} — \text{хвильове число}; \quad (10)$$

$$C_{ij} = 2 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{a}{h} \right) (\beta a)^4 \frac{(\alpha_i a)(\alpha_j a) J_1(\alpha_i a)}{J_1(\alpha_j a)} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\infty \frac{J_0(V t^2 + k^2 a^2) dt}{[\alpha_i^2 a^2 - (ka)^2 - t^2][\alpha_j^2 a^2 - (ka)^2 - t^2]} - \right.$$

$$\left. - i(ka) \int_0^1 \frac{J_0^2(ka \sqrt{1-t^2}) dt}{[\alpha_i^2 a^2 + k^2 a^2 (t^2 - 1)][\alpha_j^2 a^2 + k^2 a^2 (t^2 - 1)]} \right\} =$$

$$= 2 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{a}{h} \right) (\beta a)^4 \frac{(\alpha_i a)(\alpha_j a) J_1(\alpha_i a)}{J_1(\alpha_j a)} [\text{Re } C_{ij}^0 + i \text{Im } C_{ij}^0]. \quad (11)$$

Умова існування нетривіальних розв'язків системи (9) дає частотне рівняння.

Обчислити коефіцієнти C_{ij} в замкнутому вигляді для випадку довільного параметра (ka) не вдається. У зв'язку з цим розглянемо

декілька випадків. Спочатку прийнемо, що $ka=0$, тобто будемо вважати, що рідина нестислива. У цьому випадку коефіцієнти C_{ij} є дійсними і обчислюються в замкнутому вигляді, а саме:

$$C_{ij} = 2 \left(\frac{\rho_0 a}{\rho h} \right) (\beta a)^4 (\alpha_i a) (\alpha_j, a) \frac{J_i(\alpha_i a)}{J_i(\alpha_j a)} \cdot \frac{4}{\pi} \times \\ \times \frac{{}_2F_3 \left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -a^2 \alpha_i^2 \right) - {}_2F_3 \left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -a^2 \alpha_j^2 \right)}{(\alpha_j a)^2 - (\alpha_i a)^2}$$

при $i \neq j$;

$$C_{ii} = 2 \left(\frac{\rho_0 a}{\rho h} \right) (\beta a)^4 (\alpha_i a)^2 \frac{32}{27\pi} {}_2F_3 \left(2, 2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; -a^2 \alpha_i^2 \right),$$

де

$${}_2F_3(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2, \beta_3; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k}{(\beta_1)_k (\beta_2)_k (\beta_3)_k} \frac{z^k}{k!}$$

узагальнена гіпергеометрична функція.

Для одержання числових значень цих функцій корисно використати їх зображення через циліндричні функції півцілого порядку:

$${}_2F_3 \left(1, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -a^2 \alpha_i^2 \right) = \frac{\pi}{2\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[J_{k+\frac{1}{2}}(\alpha_i a) \right]^2}{2k+1}, \\ {}_2F_3 \left(2, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; -a^2 \alpha_i^2 \right) = \frac{27\pi}{32(\alpha_i a)^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[J_{k+\frac{1}{2}}(\alpha_i a) \right]^2}{2k+1} - \\ - \frac{27\pi}{32} J_{\frac{1}{2}}(\alpha_i a) J_{-\frac{1}{2}}(\alpha_i a) + \frac{27}{16(\alpha_i a)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{k+\frac{1}{2}}(\alpha_i a) J_{k+\frac{3}{2}}(\alpha_i a)}{(2k+1)(2k+3)}$$

Останні співвідношення одержуються з (10), якщо використати інтегральні зображення для функцій Бесселя першого роду нульового порядку і відомий розклад

$$\sin(2\alpha t \cos \psi) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(2\alpha t) \cos(2k+1)\psi.$$

Систему рівнянь (9) можна розв'язувати методом послідовних наближень. В першому наближенні одержимо значення хвильового числа $(\beta a)^4$, якщо прийнемо, що всі недіагональні елементи частотного визначника дорівнюють нулеві. У цьому випадку

$$\omega(r) = A J_0(\alpha_i r); (A = \text{const}); (i=1, 2, 3, \dots),$$

тобто форми коливань пластинки в рідині збігаються з формами коливань у вакуумі, а відповідні хвильові числа виражаються так:

$$(\beta_i a)^4 = \frac{(\alpha_i a)^4}{1 + 2 \left(\frac{\rho_0 a}{\rho h} \right) (\alpha_i a)^2 \frac{32}{27\pi} {}_2F_3 \left(2, 2; \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; -a_i^2 \alpha_i^2 \right)}.$$

Якщо ввести позначення

$$x_i = \frac{64 (\alpha_i a)^2}{27\pi} {}_2F_3 \left(2, 2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -a_i^2 \alpha_i^2 \right),$$

то частота власних коливань пластинки в контактi з рiдиною буде

$$\omega_i = \frac{\omega_{0i}}{\sqrt{1 + x_i \frac{\rho_0 a}{\rho h}}}, \quad (12)$$

де ω_{0i} — частота коливань пластинки у вакуумi.

Формула (12) аналогiчна вiдомiй формулi, одержанiй Лембом [4] для основного тону жорстко закрiпленої круглої пластинки. Якщо методом Лемба обчислити найнижчу частоту коливань для пластинки з умовами закрiплення (5), обравши форму коливань пластинки у виглядi $w(r) = A \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^3$, то одержимо

$$\omega_1 = \frac{\omega_{01}}{\sqrt{1 + 0,59278 \left(\frac{\rho_0 a}{\rho h} \right)}}. \quad (13)$$

Як вiдомо, наближена формула (13) дає значення основної частоти, яке дещо вище вiд точного значення.

Обчислимо значення хвильового числа для сталїної пластинки при $\frac{a}{h} = 28$. З формули (13) одержуємо для основної частоти $(\beta_1 a)^2 = 3,2700$.

Згiдно з формулою (12), маємо $(\beta_1 a)^2 = 3,0149$.

Якщо обмежитися визначником n -го порядку ($n \geq 2$), то у вiдповiдному n -ому наближеннi одержуємо такi значення величини $(\beta a)^2$, яка пропорцiональна вiдповiднiй частотi:

№ тону	I наближ.	II наближ.	III наближ.	IV наближ.	V наближ.	VI наближ.
1	3,0149	3,0136	3,0135	3,0135	3,0135	3,0135
2	21,815	22,409	22,397	22,396	22,395	22,395
3	60,223		61,211	61,188	61,186	61,184
4	118,34			119,69	119,65	119,64
5	196,26				197,81	197,78
6	293,98					295,76

Вiдноснi помилки δ_i мiж першим i шостим наближеннями вiдповiдно для i -го тону ($i = 1, 2, \dots, 6$) такi: $\delta_1 = 0,0475\%$; $\delta_2 = 2,59\%$; $\delta_3 = 1,57\%$; $\delta_4 = 1,08\%$; $\delta_5 = 0,767\%$; $\delta_6 = 0,602\%$.

Як видно, частоти коливань, обчисленi за формулою (13), не вiдрiзняються вiд точних бiльше нiж на δ_i ; а двi першi частоти можуть бути одержанi з практично достатньою точнiстю з визначника другого порядку.

Розглянемо тепер випадок, коли параметр $ka \neq 0$ малий ($ka < 1$), тобто низькочастотнi коливання пластинки в стисливiй рiдинi. Коли зовнiшнiм середовищем є вода, а пластинка сталїна, то

$$(ka)^2 = 1,07717 \left(\frac{h}{a} \right)^2 (\beta a)^4. \quad (14)$$

У цьому випадку розкладемо коефіцієнти C_{ij}^0 (11) по степенях малого параметра (ka) :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} C_{ij}^0 &= \frac{1}{(\alpha_j a)^2 - (\alpha_i a)^2} \left\{ [B_{0j} - B_{0i}] - (ka)^2 [B_{1j} - B_{1i}] + \right. \\ &\quad \left. + (ka)^4 [B_{2j} - B_{2i}] - \dots \right\}; \\ \operatorname{Im} C_{ij}^0 &= \frac{ka}{(\alpha_j a)^2 - (\alpha_i a)^2} \left\{ - \left[\frac{1}{(\alpha_i a)^2} - \frac{1}{(\alpha_j a)^2} \right] + (ka)^2 \left[\frac{1}{3\alpha_i^2 a^2} - \frac{1}{3\alpha_j^2 a^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3(\alpha_i a)^4} + \frac{2}{3(\alpha_j a)^4} \right] - (ka)^4 \cdot \frac{8}{15} \left[\frac{1}{(\alpha_i a)^6} - \frac{1}{(\alpha_j a)^6} - \frac{1}{2(\alpha_i a)^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(\alpha_j a)^4} + \frac{3}{32(\alpha_i a)^2} - \frac{3}{32(\alpha_j a)^2} \right] + \dots \left\}; \\ \operatorname{Im} C_{ii}^0 &= ka \left\{ - \frac{1}{(\alpha_i a)^4} + (ka)^2 \left[\frac{1}{3(\alpha_i a)^4} - \frac{4}{3(\alpha_i a)^6} \right] - \right. \\ &\quad \left. - (ka)^4 \left[\frac{3}{(\alpha_i a)^8} - \frac{8}{(\alpha_i a)^6} + \frac{3}{32(\alpha_i a)^4} \right] \frac{8}{15} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} B_{0n} &= \int_0^\infty \frac{J_0^2(t) dt}{t^2 - (\alpha_n a)^2}; \\ B_{1n} &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{u du}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^\infty \frac{J_1(2ut)}{t(t^2 - \alpha_n^2 a^2)} dt + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^\infty \frac{J_0(2ut)}{(t^2 - \alpha_n^2 a^2)^2} dt, \\ B_{2n} &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^\infty \frac{J_2(2ut)}{t^3(t^2 - \alpha_n^2 a^2)} dt + \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^\infty \frac{J_1(2ut) dt}{t(t^2 - \alpha_n^2 a^2)^2} + \\ &\quad + \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^\infty \frac{J_0(2ut) dt}{(t^2 - \alpha_n^2 a^2)^3} \quad (n = i, j) \end{aligned}$$

і т. д.

Всі інтеграли, що входять в C_{ij}^0 , виражаються через узагальнені гіпергеометричні функції. Значення коефіцієнтів C_{11}^0 , C_{12}^0 , C_{21}^0 , C_{22}^0 такі:

$$C_{11}^0 = 0,064535 - (ka)^2 0,010564 + (ka)^4 0,0015327 - \dots + i(ka) [-0,029900 + (ka)^2 0,0030731 - (ka)^4 0,00016798 + \dots];$$

$$C_{12}^0 = C_{21}^0 = 0,0060703 - (ka)^2 0,0029655 + (ka)^4 0,00066490 - \dots + i(ka) [-0,0056747 + (ka)^2 0,0011132 - (ka)^4 0,000083334 + \dots];$$

$$C_{22}^0 = 0,0042933 - (ka)^2 0,0005905 + (ka)^4 0,00024305 - \dots + \\ + i(ka)[-0,0010770 + (ka)^2 0,00031188 - (ka)^4 0,000036856 + \dots]$$

Оскільки C_{ij} — поліноми відносно (ka) з комплексними коефіцієнтами, то корені частотного рівняння будуть комплексними. Отже,

$$\omega_i = \omega_i^{(1)} + i\omega_i^{(2)}. \quad (15)$$

Амплітуда коливань згасає, згідно з (15), як $e^{-\omega_i^{(2)} t}$, а відповідна частота буде $\omega_i^{(1)}$. Як і у випадку нестисливої рідини, ω_i ($i=1, 2$) з практично достатньою точністю можна обчислити з визначника другого порядку. Якщо при цьому обмежитися лінійними членами розкладу коефіцієнтів по (ka) , то одержимо $\omega_1^{(1)} = 3,0110$, $\omega_2^{(1)} = 22,264$.

Якщо обмежитися квадратами розкладу по (ka) , то матимемо $\omega_1^{(1)} = 3,0131$, $\omega_2^{(1)} = 22,465$.

Порівняння з одержаними раніше частотами показує, що неврахування стисливості рідини при обчисленні перших двох частот осесиметричних коливань дає помилки, не більші ніж відповідно $\delta_1 = 0,312\%$, $\delta_2 = 0,583\%$.

Розглянемо, нарешті, випадок, коли $ka > 1$. Відомо, що в цьому випадку гідродинамічний тиск на пластинку можна взяти рівним

$$p = -\rho_0 c \frac{\partial w^*(r, t)}{\partial t} = i\omega\rho_0 c w(r),$$

і рівняння коливань набуде вигляду

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\omega^2 \rho h + i\omega\rho_0 c}{D} w = 0.$$

Розв'язком цього рівняння, що задовольняє умову (5), буде функція

$$w(r) = A J_0(\alpha_i r).$$

Частота визначається із співвідношення

$$\frac{\omega_i^2 \rho h a^4 + i\omega_i \rho_0 c a^4}{D} = (\alpha_i a)^4,$$

або

$$\omega_i = -i \frac{c}{2a} \left(\frac{\rho_0 a}{\rho h} \right) \pm \sqrt{\omega_{0i}^2 - \frac{c^2}{4a^2} \left(\frac{\rho_0 a}{\rho h} \right)^2}. \quad (16)$$

Отже, у випадку високочастотних коливань амплітуда згасає за законом $e^{-\frac{c}{2a} \left(\frac{\rho_0 a}{\rho h} \right) t}$, а частота коливань буде

$$\omega_i^{(1)} = \sqrt{\omega_{0i}^2 - \frac{c^2}{4a^2} \left(\frac{\rho_0 a}{\rho h} \right)^2}.$$

Для пластинки, яка розглядалась вище, матимемо

№ тону	Значення $\frac{\omega_i^{(1)}}{\omega_{oi}}$	
	З врахуванням стисливості	Без врахування стисливості
4	0,93740	0,86046
5	0,97612	0,88719
6	0,98894	0,90567

Тут частота ω_i без врахування стисливості рідини відповідає VI наближенню $(\beta_i a)^2$, наведеному раніше для нестисливої рідини, ω_{oi} — відповідна частота коливань у вакуумі.

Неврахування стисливості рідини при обчисленні частоти коливань i -го тону ($i=4, 5, 6$) дає такі помилки:

$$\delta_4 = 8,19\%, \delta_5 = 9,11\%, \delta_6 = 8,41\%.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Х. Ламб. Гидродинамика. М., 1948.
2. И. Снеддон. Преобразование Фурье. М., 1955.
3. А. Скучик. Основы акустики. М., 1953.
4. Н. Lamb. Proceedings of the Royal Soc. of London, v. 98, 1920.

О. В. БЛАЖИЕВСКАЯ

ВЛИЯНИЕ ЖИДКОСТИ НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

(резюме)

В статье рассматриваются свободные колебания круглой определенной образом закрепленной в жестком экране пластинки в контакте с идеальной жидкой средой. Определен спектр частот в случае идеальной несжимаемой жидкости.

Исследуется влияние сжимаемости жидкости в случае низкочастотных и высокочастотных колебаний.

В. З. ЖДАН

ОБОЛОНКИ ОБЕРТАННЯ НА ПРУЖНОМУ КОНТУРІ

Напружений і деформований стан оболонки обертання визначається основними величинами [1]

$$u, w, \Theta, N, Q, M, v, S, \quad (1)$$

де u — переміщення вздовж меридіана оболонки; w — переміщення в напрямі нормалі; Θ — кут повороту меридіана; N — меридіональна нормальна сила; Q — узагальнена поперечна сила; M — меридіональний згинальний момент; v — переміщення вздовж дотичної до паралелі; S — узагальнена зсувна сила.

Одним із способів їх визначення є побудова і розв'язання системи диференціальних рівнянь на основі рівнянь рівноваги елемента середньої поверхні оболонок, фізичних рівнянь і деформацій цієї поверхні.

Якщо зобразити поверхневе навантаження у вигляді гармонічного ряду в кільцевому напрямі, то властивості оболонки обертання як циклічної системи дають можливість здійснити розділення змінних у вказаній системі і звести розв'язання задачі до інтегрування системи звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь [2]. Одержана таким чином система диференціальних рівнянь вміщує в загальному випадку вісім рівнянь першого порядку (або шість рівнянь при осесиметричному навантаженні оболонки), в яких невідомими є амплітудні значення основних функцій (1), що визначаються.

У відповідності з цим далі фігуруватимуть тільки названі амплітудні значення, що відповідають дії n -го члена гармонічного розкладу поверхневого навантаження (індекс n у випадках, коли це не викличе непорозуміння, не вживається). Для одержання розв'язку, що відповідає дії повного поверхневого навантаження, необхідно взяти суму наслідків розрахунку оболонки від дії окремих членів розкладу поверхневого навантаження. Символічно систему основних диференціальних рівнянь задачі можна записати у вигляді одного звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$W'(\alpha) = F(\alpha) W(\alpha) + T(\alpha), \quad (2)$$

де $W(\alpha)$ та $W'(\alpha)$ — матриця-стовпець, складена із основних невідомих функцій (1), та її перша похідна по меридіональній змінній (α); $F(\alpha)$ — квадратна матриця в загальному випадку восьмого порядку, елементи якої, що залежать від геометрії оболонки, є коефіцієнтами системи основних диференціальних рівнянь задачі; $T(\alpha)$ — матриця-стовпець, складена із компонент поверхневого навантаження.

Інтеграл рівняння (2) символічно зображається у вигляді

$$W(\alpha) = G(\alpha) W(\alpha_0) + W^*(\alpha), \quad (3)$$

де $W^*(\alpha)$ — окремі розв'язки функцій (1), що залежать від поверхневого навантаження; $G(\alpha)$ квадратна матриця восьмого порядку із змінними елементами, спосіб побудови якої визначається структурою матриці $F(\alpha)$.

Так, для конічної оболонки лінійно-змінної товщини і циліндричної оболонки постійної товщини, системи основних диференціальних рівнянь яких мають постійні коефіцієнти [2], матриця $G(\alpha)$ зображається рядом

$$G(\alpha) = J + (\alpha - \alpha_0) F + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2!} F^2 + \frac{(\alpha - \alpha_0)^3}{3!} F^3 + \dots = e^{(\alpha - \alpha_0) F}. \quad (4)$$

Тут J — одинична матриця.

Загальний розв'язок (3) задачі побудовано з точністю до 8 (або 6 у випадку осесиметричної задачі) сталих інтегрування — матриця-стовпець $W(\alpha_0)$, якими обрано значення невідомих функцій у довільному меридіональному перерізі оболонки. Будемо в наступному цей переріз суміщати з одним із її країв.

Вказаний розв'язок набуває означеності тільки після підпорядкування його конкретним умовам, що задані на краях оболонки. Ці умови характеризуються видом опирання країв. Так, якщо край оболонки вільний і завантажений силами і моментами

$$N = \bar{N}, \quad Q = \bar{Q}, \quad S = \bar{S}, \quad M = \bar{M}, \quad (5)$$

то невідомими є лінійні і кутові переміщення u, w, v, Θ .

Якщо ж задані переміщення краю

$$u = \bar{u}, \quad w = \bar{w}, \quad v = \bar{v}, \quad \Theta = \bar{\Theta}, \quad (6)$$

то зусилля N, Q, M, S — невідомі. Наприклад, при жорсткому защемленні усі величини (6) дорівнюють нулеві.

Покажемо хід визначення невідомих крайових функцій у цих простих випадках. Нехай на вузькому краї оболонки задано умови (5), а на широкому — умови (6). Оберемо широкий край як початковий переріз і запишемо загальний розв'язок (3) для кінцевого перерізу*, тобто вузького краю

$$W_l = G_l W_0 + W_l^*, \quad (7)$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} u_l \\ w_l \\ \Theta_l \\ \bar{N}_l \\ \bar{Q}_l \\ \bar{M}_l \\ v_l \\ \bar{S}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & g_{17} & g_{18} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} & g_{27} & g_{28} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} & g_{37} & g_{38} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & g_{46} & g_{47} & g_{48} \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & g_{56} & g_{57} & g_{58} \\ g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} & g_{65} & g_{66} & g_{67} & g_{68} \\ g_{71} & g_{72} & g_{73} & g_{74} & g_{75} & g_{76} & g_{77} & g_{78} \\ g_{81} & g_{82} & g_{83} & g_{84} & g_{85} & g_{86} & g_{87} & g_{88} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{w}_0 \\ \bar{\Theta}_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ \bar{v}_0 \\ S_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_l^* \\ w_l^* \\ \Theta_l^* \\ N_l^* \\ Q_l^* \\ M_l^* \\ v_l^* \\ S_l^* \end{pmatrix}, \quad (8)$$

* Величини, що відносяться до початкового краю, тут і далі відмічаються індексом «0», а що відносяться до кінцевого краю — індексом «l».

Видозмінимо матриці-стовпці W_0 і W_l таким чином:

$$W_0 = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{w}_0 \\ \tilde{\theta}_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ \tilde{v}_0 \\ S_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{w}_0 \\ \tilde{\theta}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{v}_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ 0 \\ S_0 \end{pmatrix} = \tilde{W}_0 + X_0; \quad W_l = \begin{pmatrix} u_l \\ w_l \\ \theta_l \\ \tilde{N}_l \\ \tilde{Q}_l \\ \tilde{M}_l \\ v_l \\ \tilde{S}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{N}_l \\ \tilde{Q}_l \\ \tilde{M}_l \\ 0 \\ \tilde{S}_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_l \\ w_l \\ \theta_l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_l \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{W}_l + X_l. \quad (8-a)$$

Тепер символами X_0 і X_l позначено невідомі, що підлягають визначенню. Перетворимо систему (8) до такого вигляду:

$$\begin{pmatrix} g_{14} & g_{15} & g_{16} & g_{18} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{24} & g_{25} & g_{26} & g_{28} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_{34} & g_{35} & g_{36} & g_{38} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ g_{44} & g_{45} & g_{46} & g_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{54} & g_{55} & g_{56} & g_{58} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{64} & g_{65} & g_{66} & g_{68} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{74} & g_{75} & g_{76} & g_{78} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ g_{84} & g_{85} & g_{86} & g_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ S_0 \\ -u_l \\ -w_l \\ -\theta_l \\ -v_l \end{pmatrix} = -W_l^* - G_l \tilde{W}_0 + \tilde{W}_l. \quad (9)$$

Введемо матриці B_0 і B_l . Матриця B_0 — її елементи b_{1i} , b_{2j} , b_{3k} і b_{4m} — дорівнюють одиниці (i, j, k, m — фіксовані числа, що збігаються із номерами відповідно першого, другого, третього і четвертого ненульового елементу матриці X_0), інші її елементи дорівнюють нулю. Матриця B_l — її елементи b_{5i} , b_{6j} , b_{7k} і b_{8m} — дорівнюють одиниці (тепер i, j, k, m — фіксовані числа, що збігаються із номерами відповідно першого, другого, третього і четвертого ненульового елемента матриці X_l), інші її елементи дорівнюють нулю.

Таким чином,

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Перетворення (7) в (9) здійснене за допомогою таких дій: множенням матриць B_0 і B_l відповідно на матриці-стовпці W_0 і W_l ; мно-

женням матриці G_l справа на матрицю B_0^T , транспоновану щодо матриці B_0 , і додаванням її до матриці B_l^T , транспонованої щодо матриці B_l .

Перелічені перетворення зображаються формулою

$$(G_l B_0^T + B_l^T)(B_0 X_0 - B_l X_l) = \sim - (W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l), \quad (11)$$

або

$$\bar{G}R = - (W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l). \quad (12)$$

Система (9) являє собою систему алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої з урахуванням запису (12) дорівнює

$$R = -\bar{G}^{-1}(W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l). \quad (13)$$

Тепер визначаємо матриці X_0 і X_l :

$$X_0 = B_0^T R = -B_0^T \bar{G}^{-1}(W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l); \quad (14)$$

$$X_l = -B_l^T R = B_l^T \bar{G}^{-1}(W_l^* + G_l \tilde{W}_0 - \tilde{W}_l), \quad (15)$$

а після цього — за формулами (8-а) — матриці W_0 і W_l .

Проте здебільшого задано такі граничні умови задачі розрахунку оболонок, що жодна з восьми величин (1) в крайових перерізах попереду невідома (підкріплення країв пружними кільцями, спирання оболонок на пружні основи і т. д.). В таких випадках з'являється необхідність встановлювати деякі співвідношення між вказаними крайовими величинами, що задовольняли б конкретні граничні умови.

Зупинимося на випадках, коли краї оболонки підкріплюються пружними кільцями. Для виведення розрахункових формул використаємо такий прийом: кільце відділяється від оболонки, і її вплив компенсується прикладанням до кільця сил і моментів. Ця група зусиль включається до системи зовнішніх силових факторів, що діють на кільце. Потім визначаються переміщення і деформації кільця, до виразів яких входять вже і крайові зусилля оболонки. І, нарешті, з умов сумісності деформацій кільця і краю оболонки, що прилягає до нього, встановлюються співвідношення між крайовими зусиллями і переміщеннями, що характеризують задані граничні умови.

Попереду розглянемо опір кругового циліндричного кільця радіуса r_k при навантаженнях, розподілених вздовж його кола. Довільний закон зміни навантажень вздовж осі кільця замінюється гармонічним рядом по кутовій змінній β . Далі фігурують лише амплітудні значення навантажень. У загальному випадку на кільце діють: p_k — вертикальне навантаження (позитивне при напрямі зверху вниз); t_k — тангенціальне навантаження (позитивне при напрямі в бік зростання кута β , тобто проти годинникової стрілки відносно центра кільця); q_k — радіальне навантаження (позитивне при напрямі до центра); m_k — моментне навантаження в діаметральних площинах (позитивне при напрямі по годинниковій стрілці, якщо дивитись вздовж кола в бік зростання кута β); g_k — моментне навантаження в площині кільця (позитивне при напрямі по годинниковій стрілці, якщо дивитися на кільце зверху).

Переміщення точок осі кільця характеризуються: w_k — радіальними переміщеннями (позитивними при напрямі до центра); u_k — верти-

кальними переміщеннями (позитивними при напрямі зверху вниз); v_k — тангенціальними переміщеннями (позитивними при напрямі в бік зростання кутової координати β).

Закручування кільця визначається поворотом (кутом кручення) в діаметральних площинах Θ_k , позитивним при напрямі по годинниковій стрілці, якщо дивитися вздовж кола в бік зростання β . Вказані переміщення і деформації кільця, на яке не накладено зовнішні зв'язки, залежать від навантажень, що діють на нього [3, 4]:

А. Осесиметричне навантаження ($n=0$).

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{r_k^2}{EF_k} q_k; \\ \Theta_k &= \frac{r_k^2}{EI_k} m_k. \end{aligned} \quad (16)$$

Б. Антисиметричне навантаження ($n=1$).

$$\begin{aligned} u_k - r_k \Theta_k &= \frac{r_k^2}{E} \left[\frac{f r_k^2}{(1+f) I_k} + \frac{2,4(1+\nu)}{F_k} \right] p_k; \\ w_k - v_k &= \frac{r_k}{EF_k} (g_k + r_k q_k). \end{aligned} \quad (17)$$

При цьому із умов рівноваги кільця виходять такі співвідношення між амплітудними значеннями зовнішніх навантажень:

$$r_k p_k = -m_k, \quad q_k = -t_k. \quad (18)$$

В. Завантаження загального вигляду ($n \geq 2$)

$$\begin{pmatrix} u_k \\ \Theta_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & 0 & 0 & 0 \\ z_{12} & z_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{33} & z_{34} & z_{35} \\ 0 & 0 & nz_{33} & z_{33} & z_{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ m_k \\ q_k \\ t_k \\ g_k \end{pmatrix}, \quad (19)$$

або символічно *

$$V_k = Z_k Y_k. \quad (20)$$

Розглянемо тепер сумісну роботу оболонки і кільця, що підкріплює її край. Цей край приймемо за початковий переріз і відповідно до цього всі величини будемо відзначати індексом «0». У крайовому перерізі оболонки діють її внутрішні зусилля N_0, Q_0, M_0, S_0 ; до кільця ж прикладено зовнішні навантаження $p_{k,0}^*, t_{k,0}^*, q_{k,0}^*, m_{k,0}^*, g_{k,0}^*$.

Відокремимо оболонку від кільця і врахуємо її вплив, приклавши до кільця зусилля N_0, Q_0, M_0, S_0 із відповідними знаками.

Враховуючи в загальному випадку ексцентричність кріплення оболонки до кільця, одержуємо значення повного поверхневого навантаження, що прикладено до нього:

* Значення величин z_{ij} наведено в роботах [3] і [4].

$$\begin{pmatrix} p_{k,0} \\ m_{k,0} \\ q_{k,0} \\ t_{k,0} \\ g_{k,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 1 & 0 \\ -\sin \delta & -\cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{0,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ S_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{k,0}^* \\ m_{k,0}^* \\ q_{k,0}^* \\ t_{k,0}^* \\ g_{k,0}^* \end{pmatrix}, \quad (21)$$

або

$$Y_{k,0} = K_0 \bar{X}_0 + Y_{k,0}^*. \quad (22)$$

Тут позначено: $e_{0,1}$ — відстань від волокна кільця, де кріпиться оболонка, до вертикальної осі, що проходить через центр ваги його поперечного перерізу; $e_{0,2}$ — відстань від цього волокна до горизонтальної осі, що проходить через ту саму точку; δ — кут між віссю обертання оболонки і дотичною до її меридіана в крайовому перерізі.

Елементи матриці K_0 дорівнюють:

$$\begin{aligned} k_{21} &= \cos \delta e_{0,1} + \sin \delta e_{0,2}; \\ k_{22} &= -\sin \delta e_{0,1} + \cos \delta e_{0,2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Умови сумісності деформацій кільця і краю оболонки висловлюються такими співвідношеннями:

$$w_{k,0} - e_{0,2} \Theta_{k,0} = -u_0 \sin \delta - w_0 \cos \delta, \quad (24)$$

$$u_{k,0} + e_{0,1} \Theta_{k,0} = u_0 \cos \delta - w_0 \sin \delta, \quad (25)$$

$$\Theta_{k,0} = \Theta_0, \quad (26)$$

$$v_{k,0} = v_0. \quad (27)$$

Тепер легко сформулювати граничні умови задачі при підкріпленні краю оболонки кільцем, на яке не накладені зовнішні зв'язки.

А. Осесиметричне навантаження ($n=0$). У цьому випадку, крім умов сумісності деформацій (24) і (26), повинна виконуватися умова рівноваги кільця у вертикальній площині

$$p_{k,0} = 0. \quad (28)$$

Розкриваючи умови (24), (26) і (28) за допомогою формул (16) і (21), приходимо до таких співвідношень:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \Theta_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{ctg} \delta & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{ctg} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{63} & -c_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \\ \Theta_0 \\ N_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{Q}_0 \\ \tilde{M}_0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

або, символічно,

$$W_0 = C_0 X_0 + \bar{W}_0. \quad (30)$$

Елементи матриць C_0 і $\bar{W}_0$ дорівнюють

$$c_{13} = \csc \delta e_{0,2}, \quad c_{14} = \frac{\csc^2 \delta r_{k,0}^2}{EF_{k,0}},$$

$$c_{63} = -\frac{EI_{k,0}}{r_{k,0}^2}, \quad (31)$$

$$\tilde{u}_0 = \frac{\csc \delta r_{k,0}^2}{EF_{k,0}} (\operatorname{ctg} \delta p_{k,0}^* - q_{k,0}^*), \quad \tilde{Q}_0 = \csc \delta p_{k,0}^*,$$

$$\tilde{M}_0 = (-\operatorname{ctg} \delta e_{0,2} + e_{0,1}) p_{k,0}^* - m_{k,0}^*. \quad (32)$$

Б. Антисиметричне завантаження ($n=1$). У цьому випадку повинні виконуватися умови сумісності деформацій (24)–(27) і умови рівноваги кільця (18). Розкриваючи ці умови за допомогою співвідношень (17) і (21), одержуємо розрахункові залежності для випадку, що розглядається:

$$\begin{vmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ v_0 \\ S_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{tg} \delta & c_{13} & c_{14} & -\operatorname{tg} \delta c_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{54} & c_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\operatorname{sc} \delta & -c_{73} & -c_{74} & c_{74} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \delta & \cos \delta & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ w_0 \\ \theta_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{u}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{v}_0 \\ \bar{S}_0 \end{vmatrix}, \quad (33)$$

або

$$W_0 = C_0 X_0 + \bar{W}_0. \quad (34)$$

Елементи матриць C_0 і W_0 визначаються за формулами

$$c_{13} = \operatorname{sc} \delta r_{k,0}, \quad c_{14} = \frac{r_{k,0}^2}{E} \left[\frac{f r_{k,0}^2}{(1+f) I_{k,0}} + \frac{2,4(1+\nu)}{F_{k,0}} \right], \quad c_{54} = \cos \delta r_{k,0},$$

$$c_{55} = \sin \delta r_{k,0}, \quad c_{73} = \operatorname{tg} \delta r_{k,0}, \quad c_{74} = \sin \delta \left(c_{14} - \frac{r_{k,0}^2}{EF_{k,0}} \right),$$

$$c_{75} = \cos \delta \left(\operatorname{tg}^2 \delta c_{14} + \frac{r_{k,0}^2}{EF_{k,0}} \right); \quad (35)$$

$$\bar{u}_0 = \operatorname{sc} \delta c_{14} p_{k,0}^*, \quad \bar{M}_0 = -m_{k,0}^* - r_{k,0} p_{k,0}^*, \quad \bar{S}_0 = -t_{k,0}^* - q_{k,0}^*,$$

$$\bar{v}_0 = -\operatorname{tg} \delta c_{14} p_{k,0}^* - \frac{r_{k,0}}{EF_{k,0}} (g_{k,0}^* + e_{0,1} t_{k,0}^* + r_{k,0} q_{k,0}^*). \quad (36)$$

В. Завантаження загального вигляду ($n \geq 2$). У цьому випадку кільце перебуває під дією системи самоврівноважених завантажень, тому необхідно задовольнити тільки умови сумісності деформацій кільця і оболонки.

Виключивши із співвідношень (19) величини Y_k за допомогою виразів (21) і використавши після цього умови сумісності деформацій (24)–(27), одержуємо основні формули для даного випадку.

$$\begin{vmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \theta_0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ v_0 \\ S_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} & 0 & c_{18} \\ 0 & 0 & 0 & c_{24} & c_{25} & c_{26} & 0 & c_{28} \\ 0 & 0 & 0 & c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{18} & c_{28} & 0 & 0 & c_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_0 \\ Q_0 \\ M_0 \\ 0 \\ S_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{w}_0 \\ \bar{\theta}_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{v}_0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (37)$$

або

$$W_0 = C_0 X_0 + \bar{W}_0. \quad (38)$$

Елементи матриць C_0 і $\bar{W}_0$ дорівнюють

$$\begin{aligned} c_{14} &= \cos^2 \delta z_{11} + n \sin^2 \delta z_{33}, \quad c_{15} = -\sin \delta \cos \delta (z_{11} - \operatorname{tg} \delta z_{33}), \\ c_{16} &= \cos \delta z_{12}, \quad c_{18} = -\sin \delta z_{33}, \quad c_{24} = \sin \delta \cos \delta (z_{11} - n z_{33}), \\ c_{25} &= \sin^2 \delta (z_{11} + \operatorname{ctg} \delta z_{33}), \quad c_{26} = -\sin \delta z_{12}, \\ c_{28} &= -\cos \delta z_{33}, \quad c_{36} = z_{22}, \quad c_{78} = z_{34}; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= \cos \delta (z_{11} p_{k,0}^* + z_{12} m_{k,0}^*) - \sin \delta (n z_{33} q_{k,0}^* + z_{33} t_{k,0}^* + z_{45} g_{k,0}^*), \\ \bar{w}_0 &= -\sin \delta (z_{11} p_{k,0}^* + z_{12} m_{k,0}^*) - \cos \delta (n z_{33} q_{k,0}^* + z_{33} t_{k,0}^* + z_{45} g_{k,0}^*), \\ \bar{\theta}_0 &= z_{12} p_{k,0}^* + z_{22} m_{k,0}^*, \\ \bar{v}_0 &= z_{33} q_{k,0}^* + z_{34} t_{k,0}^* + z_{35} g_{k,0}^*. \end{aligned} \quad (40)$$

Вище були розглянуті випадки підкріплення краю оболонки пружним коловим циліндричним кільцем, вільним від зовнішніх зв'язків.

Якщо ж на кільце накладаються зв'язки, що перешкоджають деяким його переміщенням, наприклад вертикальним, у власній площині, або кутовим, то ці окремі обставини необхідно враховувати при визначенні переміщень кільця і складанні умов сумісності деформацій кільця і краю оболонки.

При формулюванні граничних умов оболонок на пружній основі описаний прийом також повністю придатний: оболонка відокремлюється від основи, і її вплив компенсується прикладанням до неї крайових зусиль. Від їх дії визначаються з урахуванням пружних властивостей основи її деформації, які будуть і деформаціями краю оболонки. Ця обставина приводить до встановлення необхідних співвідношень між крайовими зусиллями і переміщеннями оболонки, що характеризують конкретні граничні умови.

У всіх перелічених випадках розрахункові залежності мають такий же вигляд, як і при вільному кільці, тобто (30), (34), (38). Специфіка кожного виду крайових умов враховується при цьому матрицями C і $\bar{W}$.

Вкажемо тепер шлях визначення невідомих ще крайових величин. Нехай на кожному краї оболонки задано такі умови, що жодна з цих величин невідома.

Запишемо загальний розв'язок (3) щодо кінцевого краю

$$W_l = G_l W_0 + W_l^* \quad (41)$$

і застосуємо відповідні залежності типу (30), (34), (38):

$$C_l X_l + \bar{W}_l = G_l (C_0 X_0 + \bar{W}_0) + W_l^*. \quad (42)$$

Тепер у запис (42) входить в загальному випадку лише вісім невідомих величин (матриці-стовпці X_0 і X_l). Для їх визначення легко скласти систему алгебраїчних рівнянь

$$(G_l C_0 B_0^T + C_l B_l^T)(B_0 X_0 - B_l X_l) = -(W_l^* + G_l \bar{W}_0 - \bar{W}_l), \quad (43)$$

або

$$\bar{G}R = -(W_l^* + G_l \bar{W}_0 - \bar{W}_l). \quad (44)$$

Матриці B_0 і B_l будуються аналогічно матрицям (10). Із (44) знаходимо

$$R = -\bar{G}^{-1}(W_l^* + G_l \bar{W}_0 - \bar{W}_l), \quad (45)$$

а після цього — матриці X_0 та X_l :

$$X_0 = B_0^T R = -B_0^T \bar{G}^{-1}(W_l^* + G_l \bar{W}_0 - \bar{W}_l); \quad (46)$$

$$X_l = -B_l^T R = B_l^T \bar{G}^{-1}(W_l^* + G_l \bar{W}_0 - \bar{W}_l) \quad (47)$$

і по одній з формул (30), (34), (38) — матриці W_0 і W_l .

Порівнюючи структуру формули (11) із структурою формули (43), помічаємо, що перша є окремим випадком другої, оскільки в ній матриці C_0 і C_l вироджуються в одиничні матриці.

Підводячи підсумки, відзначимо, що виразом (43) характеризуються в загальному випадку різноманітні граничні умови задачі розрахунку оболонок обертання. При цьому матриці C_0 і C_l описують пружні властивості країв (пружні кільця, пружна основа, вільний або жорстко зашкелений край і т. ін.), а матриці $\bar{W}_0$ і $\bar{W}_l$ — дію на краї зовнішніх навантажень (моментів у різних площинах та сил у різних напрямках). Вирази граничних умов задач в конкретних випадках зображаються відповідними окремими записами загальних співвідношень (43).

ЛІТЕРАТУРА

1. В. В. Новожилов. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1962.
2. В. З. Ждан. Матричная форма расчета конструктивно-ортотропных оболочек вращения. Труды Киев. политехн. ин-та, т. 43. К., 1963.
3. А. И. Сегаль. Практические методы расчета тонкостенных конических оболочек. Расчет пространственных конструкций, вып. II. М.—Л., 1951.
4. А. И. Сегаль. Некоторые итоги решения циклических задач. Расчет пространственных конструкций, вып. III. М., 1955.

В. З. ЖДАН

ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ НА УПРУГОМ КОНТУРЕ

(резюме)

Рассмотрены граничные условия задачи расчета упругих оболочек вращения. На основе общего принципа совместности деформаций построены общие расчетные формулы для формулировки граничных условий при подкреплении краев оболочек упругими кольцами — для свободных и защемленных краев, при опирании оболочек на упругие основания и т. д.

НАУКОВА ХРОНІКА

Захист кандидатських дисертацій на Вченій раді
механіко-математичного факультету Львівського ордену Леніна
державного університету у 1965 р.

Дисертант	Тема дисертації	Опоненти	Дата захисту
Скрипник І. В.	A-гармонічні форми на рімановому просторі	Доктор фіз.-мат. наук Данилюк І. І. Канди- дат фіз.-мат. наук По- тягайло Д. Б.	I. IV
Пелех Б. Л.	Дослідження деяких пи- тань теорії і розра- хунку оболонок і пла- стин на основі уза- гальнення кінема- тичних гіпотез Кірго- фа—Лява	Доктор фіз.-мат. наук Ворович І. І. Док- тор техн. наук Флей- шман Н. П. Кандидат фіз.-мат. на- ук Подстригач Я. С.	I. XII
Гече Ф. И.	Деякі теореми про ріст цілих функцій і век- тор функцій багатьох комплексних змінних і їх застосування	Доктор фіз.-мат. наук Іванов В. К. Кандидат фіз.-мат. наук Ронкін Л. Й.	27. XII

З М І С Т

С. В. Дениско, О. І. Приходська. Δ -поверхні прямолінійної конгруенції	3
Д. В. Грилицький, Я. М. Кізіма. Сумісне кручення круглого циліндричного стержня і півпростору для частинного випадку анізотропії	8
Г. Л. Буймола. Деякі питання геометрії графічної площини	15
С. П. Гавеля, В. М. Косарчин. Про один спосіб розрахунку скінченно деформованих пологих оболонок	21
З. В. Зарицька. Зображення деяких функцій двох змінних у вигляді границі послідовності операторів	27
Т. О. Мельник. Про одну складову задачу для гіперболічних і параболічних рівнянь вищого порядку	31
Г. П. Губанов, Б. В. Ковальчук. Асимптотична оцінка залишку при наближенні неперервних періодичних функцій сумами типу Бернштейна	37
Є. І. Луць. Спрощення основних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка. Т. Л. Мартинович. Впресовка замкнутого стержня в криволінійний отвір анізотропної пластинки	41
Т. Л. Мартинович, Б. М. Кордуба. Розрахунок електростатичного поля системи циліндрів	47
Є. С. Дорожовський, В. Г. Костенко. Еліптична дисторсія електронної лінзи	56
Н. П. Флейшман, Л. Й. Ощипко. Згин тонкої неоднорідної плити з круглим опорним ребром жорсткості	60
Н. П. Флейшман, О. В. Марковська. Вплив ребра жорсткості на згин круглої плити зосередженими моментами	67
Л. О. Старокадомський. Про наближене рішення інтегральних рівнянь методом колокації і методом зведення до задачі Чебишевського наближення	76
Л. О. Старокадомський. Потенціал простого шару та інтегральне рівняння 1-го роду з логарифмічною особливістю	85
А. І. Кардаш, О. М. Костовський, І. І. Чулик. Мажоранти та діаграми Ньютона функцій багатьох змінних	89
А. І. Пилипович. Про конструктивну потужність площинографа	97
В. А. Галазюк. Про один наближений метод розв'язання диференціального рівняння Ламе	117
Б. В. Валько, Й. В. Людкевич, Л. О. Романів. Розрахунок поля і траєкторій електронно-оптичної системи з осью симетрії	122
О. В. Блажиевська. Вплив рідини на вільні коливання пружної круглої пластинки	125
В. З. Ждан. Оболонки обертання на пружному контурі	128
	136

Редактор Ф. О. Гріншпосн
Технічний редактор А. В. Малявко
Коректор М. В. Візгерт

Вестник Львовского ордена Ленина
государственного университета
им. Ивана Франко.

Серия механико-математическая.

Выпуск 3.

(На украинском языке).

БГ 10253. Здано до набору 15. VIII 1966 р. Під-
писано до друку 14. VI 1967 р. Формат 70x108^{1/16}.
Друк. папір № 2. Паперов. арк. 4,875. Умов. друк.
арк. 13,65. Обл.-вид. арк. 9,6. Тираж 550. Ціна 67 к.
Зам. 1338.

Видавництво Львівського державного університе-
ту. Львів, Університетська, 1.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласно-
го управління по пресі. Львів, Стефаника, 11.

Вводится понятие Δ-поверхности прямолинейной конгруэнции. Это образованная лучами конгруэнции поверхность, обладающая таким свойством: если каждый луч конгруэнции повернуть вокруг его начала в некоторой плоскости на один и тот же угол φ, то линейный элемент Δ-поверхности изменится на бесконечно малую выше первого порядка малости относительно φ.

Линия пересечения поверхности Δ с опорной поверхностью называется линией δ.

Доказываются следующие предложения.

Прямолинейная конгруэнция не может содержать в себе более двух однопараметрических семейств поверхностей Δ.

Плоскость, проходящая через луч конгруэнции и касательную к линии δ, перпендикулярна к плоскости вращения луча.

Рассматриваются также специальные поверхности Δ.

Рассматривается задача о совместном кручении стержня и полупространства для случая разных цилиндрически ортотропных материалов. Для решения задачи применяются метод Фурье и интегральное преобразование Ханкеля. Получены формулы для всех величин, характеризующих напряженно-деформированные состояния стержня и полупространства.

В статье рассматривается ограниченный «кусоч» евклидовой плоскости с основными геометрическими элементами в ней. Автор называет его плоскостью α_1 . Причем, каждой точке A_i' множества E' евклидовых точек плоскости α_1 ставится во взаимно однозначное соответствие «кружочек» A_i постоянного достаточно малого радиуса ω_0 , с центром в этой точке: $A_i(A_i')$ множество E таких «кружочков» называется графической плоскостью α , а каждый «кружочек» в отдельности — графической точкой.

Кроме графических точек, в графической плоскости рассматриваются графические линии как геометрические места графических точек.

Вводятся понятия абсолютной и графической инцидентности этих образов, понятие координат графической точки. Три графические не инцидентные между собой графические точки $A_i(x_i y_i)$, $B_k(x_k y_k)$ и $C_j[\mu x_i + (1 - \mu)x_k; \mu y_i + (1 - \mu)y_k]$ графически инцидентны одной прямой при

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ \mu x_i + (1 - \mu)x_k & \mu y_i + (1 - \mu)y_k & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, если $0 \leq \mu \leq 1$, то графическая точка C_j описывает графический отрезок $A_i B_k$. Точке A_i соответствует значение $\mu=1$, а точке B_k — $\mu=0$.

Вводится понятие расстояния между двумя графическими точками и величины угла между двумя графическими прямыми. В графической плоскости «геометрические элементы» имеют физический характер, и взаимные отношения их контролируются опытом.

Рассматриваются аксиомы графической плоскости и некоторые логические выводы из них.

УДК 539. 311.

Об одном способе расчета конечно деформируемых пологих оболочек
Гавеля С. П., Косарчин В. Н.
Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.,
1967 г., вып. 3, 21—28.

Построен алгоритм нахождения перемещений тонкой полой оболочкой с учетом нелинейных членов, происходящих только от прогибов. Эффективность алгоритма достигается посредством распространения некоторых результатов Я. Б. Лопатинского, позволяющего привести задачу к рекуррентным задачам Дирихле, решаемым с помощью интегральных уравнений.

Конкретно рассмотрен случай, когда оболочка заполняет в плоскости криволинейных координат ее срединной поверхности прямоугольник с эллиптическим отверстием. На контуре прямоугольника выполнены условия шарнирного закрепления: край отверстия зашпелен. Возможны и другие варианты граничных условий и форм отверстия.

Решение представляется в двойных тригонометрических рядах.

УДК 517. 512

Представление некоторых функций двух переменных в виде предела последовательности операторов. Зрицкая З. В. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 28—31.

В работе рассматриваются линейные положительные операторы $B_{nm}(f; x, y)$ Баскакова-Волкова, обобщенные на двумерное пространство. Показывается, что во всякой точке Лебега функции $f(x, y)$ операторы (2) сходятся к $f(x, y)$.

УДК 517. 934

Об одной составной задаче для гиперболических и параболических уравнений высшего порядка. Мельник Т. Е. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 32—37.

Рассматривается задача о «склеивании» решений гиперболических и параболических уравнений произвольного четного порядка. Комбинируя метод характеристик для гиперболических уравнений и известные представления решений параболических уравнений, задача приводится к решению системы интегральных уравнений Волтера второго рода, к которым применим метод последовательных приближений.

УДК 517. 512.

Асимптотическая оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций суммами типа Бернштейна. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 38—41.

Устанавливается асимптотическая оценка верхней грани при приближении непрерывных периодических функций класса KN^a суммами типа Бернштейна, построенными на базе полиномов, наилучшей в заданной системе точек. Полученная оценка переносится на двумерный случай.

УДК 539. 311

Упрощение основных уравнений теории оболочек типа Тимошенко. Лунь Е. И. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 42—47.

Приводятся разрешающие системы дифференциальных уравнений, которые получаются из основных уравнений теории оболочек типа Тимошенко и применимы к оболочкам нулевой гауссовой кривизны, к пологим оболочкам и к оболочкам, в которых напряженное состояние достаточно быстро изменяется в направлении хотя бы одной из координатных линий.

УДК 517. 9

Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие анизотропной пластинки. Мартынович Т. Л. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 48—56.

Рассматривается задача об упругом равновесии анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, в которое впрыснут замкнутый стержень произвольного поперечного сечения, симметричного относительно срединной плоскости пластинки. Внешний контур стержня до деформации отличается от контура отверстия пластинки на величину допустимых упругих перемещений. Предполагается, что стержень касается пластинки по всему краю отверстия. Трением между пластинкой и стержнем пренебрегается. В основу расчета стержня положена гипотеза нормального жесткого сечения. Граничные условия задачи выражены в функциях комплексного переменного. В качестве примера рассмотрена бесконечная анизотропная пластинка с круговым отверстием, в которое впрыснуто упругое кольцо. Для случая ортотропной пластинки при одноосном растяжении на бесконечности приводится числовой пример.

УДК 517.9 : 538.3

Расчет электростатического поля системы цилиндров. Мартинovich Т. Л., Кордуба Б. М. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 57—60.

Рассматривается задача распределения потенциала внутри системы электродов в виде трех цилиндров с общей осью вращения и известными на них потенциалами. Задача решается методом прямых с повышенной точностью аппроксимации дифференциального оператора конечно-разностным аналогом. Решение ищется в виде линейной комбинации модифицированных функций Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Задача доведена до числа.

УДК 517.9:621.3.032.26

Эллиптическая дисторсия электронной линзы. Дорожовский Е. С., Костенко В. Г. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 61—67.

В работе приводится схема нахождения потенциала электронной линзы, мало отличающейся от осесимметричной (случай эллиптической дисторсии). Рассматриваемая линза состоит из трех кусков цилиндрических поверхностей. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{4}{r^2} u_1 = 0$$

с разрывными граничными условиями на упомянутых цилиндрических поверхностях.

Поле потенциала в случае симметричной эллиптической дисторсии электронной линзы с использованием метода возмущений, может быть представлено в виде

$$u(r, z, \theta) = u_0(r, z) + \lambda u_1(r, z) \cos 2\theta + O(\lambda^2),$$

где $u_0(r, z)$ — потенциал осесимметричной линзы; λ — параметр возмущения. В случае несимметричной эллиптической дисторсии достаточно ввести два параметра возмущения.

Схема приближенного решения основана на использовании собственных функций дискретного аргумента. Приводится численный пример.

УДК 539.384

Изгиб тонкой неоднородной плиты с круглым опорным ребром жесткости. Флейшман Н. П., Ощипко Л. И. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 68—76.

Решена задача о произвольном изгибе круглой плиты, свободно опертой по внутреннему опорному ребру жесткости. Решение записывается через комплексные потенциалы, для определения которых используются условия опирания, подкрепления и сопряжения на ребре, а также условия первой основной задачи на внешнем контуре плиты. Методом интегралов типа Коши задача свелась к системе двух алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных разложения искомых функций в комплексные ряды Фурье. Рассмотрен числовой пример изгиба плиты сосредоточенной силой, приложенной в точке внутри опорного кольца.

УДК 517.9:621.3.032.26

Расчет поля и траекторий электронно-оптической системы с осевой симметрией. Валько Б. В., Людкевич И. В., Романів Л. Е. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 126—128.

В работе рассматривается метод приближенного расчета электростатического поля системы электродов малой толщины. Поле представляется потенциалом простого шара, а неизвестная плотность задается в виде линейной комбинации функций, содержащих в себе произвольные нелинейные параметры. Такое представление плотности дало возможность добиться лучшего удовлетворения граничных условий при небольшом количестве неизвестных параметров. По найденному полю строятся траектории методом Адамса—Штермера.

УДК 531,6 : 539,3

Влияние жидкости на свободные колебания упругой круглой пластинки. Блажиевская О. В. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 129—136.

В статье рассматриваются свободные колебания круглой определенным образом закрепленной в жестком экране пластинки в контакте с идеальной жидкой средой. Определен спектр частот в случае идеальной несжимаемой жидкости.

Исследуется влияние сжимаемости жидкости в случае низкочастотных и высокочастотных колебаний.

УДК 624.074

Оболочки вращения на упругом контуре. Ждан В. З. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 137—146.

Рассмотрены граничные условия задачи расчета упругих оболочек вращения. На основе общего принципа совместности деформаций построены общие расчетные формулы для формулировки граничных условий при подкреплении краев оболочек упругими кольцами, — для свободных и защемленных краев, при опирании оболочек на упругие основания и т. д.

В замкнутой форме получено решение задачи изгиба круглой изотропной плиты с подкрепленным краем под действием сосредоточенных моментов, приложенных к краю. Показано, что в точках приложения сосредоточенных моментов внутренние усилия имеют более слабые особенности, чем в неподкрепленной плите.

В статье показано, что теория метода коллокации для линейных интегральных уравнений 1-го и 2-го рода совпадает с теорией интерполирования свободного члена по некоторой возникающей системе функций, в силу чего известные факты теории интерполирования переносятся на теорию метода коллокации.

Далее показано, что нахождение приближенного решения μ интегрального уравнения 1-го или 2-го рода $L(\mu) = f$ в смысле малости $|L(\mu) - f|$ непосредственно сводится к задаче Чебышевского приближения f по некоторой системе функций $\psi_k = L(\varphi_k)$, где φ_k — некоторая полная система функций. Предлагается применение некоторых методов задачи Чебышевского приближения к определению приближенного решения интегральных уравнений.

Рассмотрены потенциал простого слоя $v = \int \mu(s) N ds$ и видоизмененный потенциал простого слоя $u = \int_L M(s) \frac{\partial N}{\partial s} ds$, связанные друг с другом формулой интегрирования по частям. Ядро $N[x_0, y_0, x(s), y(s)]$ имеет логарифмическую особенность. Контур L есть кусочногладкая линия без точек самопересечения. Доказана разрешимость уравнения $v|_L = f$ при условиях: $f \in C_n(\lambda)$ ($n \geq 0$); L — достаточно гладкая линия; единственность решения уравнения $v|_L = f$.

Исследованы свойства плотностей μ и M вблизи концов линии L , вблизи угловых точек L и поведение потенциалов v , u и их производных в окрестностях указанных точек и вблизи L . Даются формулы полного выделения особенностей плотностей μ и M с помощью выражения их через дифференцируемые функции.

Полученные результаты применяются к обоснованию предлагаемых методов приближенного решения задачи Дирихле на плоскости и в осесимметричном пространстве трех измерений со щелями.

УДК 517.55

Мажоранты и диаграммы Ньютона функций многих переменных. Кардаш А. И., Костовский А. Н., Чулик И. Н. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 98—117.

В данной работе строится аппарат мажорант и диаграмм Ньютона для целой рациональной функции двух комплексных переменных, исследуются их общие свойства. Вводится понятие числовых наклонов и отклонений в направлении координатных осей, а также понятие ребристости диаграммы Ньютона. Предлагаются формулы для определения основных характеристик диаграммы и мажоранты Ньютона.

В качестве приложения полученных результатов строятся полицилиндры, в которых целая рациональная функция не может принимать нулевых значений.

УДК 513.491

О конструктивной мощности плоскографа. Пилипович А. И. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 118—122.

Рассматривается вопрос о решении конструктивных задач в пространстве с помощью плоскографа, если в пространстве построена сфера или некоторая ее часть и отмечен центр сферы.

Доказываются соответствующие теоремы, аналогичные теоремам Штейнера и М.-Болтовского, путем решения некоторых вспомогательных и основных задач.

УДК 517.9

Об одном приближенном способе решения дифференциального уравнения Ламе. Галазюк В. А. Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1967 г., вып. 3, 123—125.

В работе предлагается приближенный способ решения дифференциального уравнения Ламе при произвольных комплексных значениях входящих в него параметров. Показано, что в определенных интервалах изменения независимой переменной дифференциальное уравнение Ламе может быть приближенно приведено к дифференциальному уравнению Матье или к дифференциальному уравнению присоединенных функций Лежандра.

67 коп.