УДК 517.954

С.П.Лавренюк

ІСНУВАННЯ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ПОПЕРЕЧНИХ КОЛИВАНЬ СТЕРЖНЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Розглянемо задачу Коші

$$Lu \equiv p(x,t)u_{tt}+(a_0(x,t)u_{xx})_{xx}+a_1(x,t)u_{xx}+a_2(x,t)u_{xt}+$$

$$+a_3(x,t)u_x+a_4(x,t)u_t+a_5(x,t)u=f(x,t), \qquad /1/$$

$$(x,t)\in Q_T=\{x\in\mathbb{R},\ 0<t<T\},$$

$$u(x,0)=0, \qquad u_t(x,0)=0. \qquad /2/$$

Припускаємо, що $\dfrac{\partial^{k+l+1}a_0}{\partial t^{k+1}\partial x^l}$, $\dfrac{\partial^{k+l}a_i}{\partial t^k\partial x^l}$, $(i=1,\dots,5;\ l+2k\leqslant 6)$ неперервні й обмежені в $\overline{Q}_T$. Крім того, нехай у $\overline{Q}_T$ виконуються нерівності $p(x,t)>0$ при $t>0$; $p(x,t)\geqslant \mu_1 t$ при $t\geqslant 0$;

$$\left|\frac{\partial^{k+l}p}{\partial t^k\partial x^l}\right|\leqslant C_1,\quad 2k+l\leqslant 6;\ a_0(x,t)\geqslant A>0.$$

Позначимо через Φ_2^2 простір функцій $f(x,t)$, для яких величина

$$B_2^2=F^2(\gamma_0,3)+F_1^1(\gamma_0,1)+F_2(\gamma_0,-1)$$

скінченна. Тут

$$F_k^l(\gamma_0,s)=\sup_{t\in[0,T]}\int_{D_t}\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\partial^{k+i}f(x,t)}{\partial t^k\partial x^i}\right)^2 t^{-\gamma_0-\delta_0-s}\,dx,$$

$$D_t=\{x\in\mathbb{R},\ t=const\},\ \delta_0>0,$$

$$\gamma_0=(1/\mu_1)\max\{0;\sup_{Q_{\tau_0}}(p_t+a_{2x}-2a_4)+\delta_0;\sup_{Q_{\tau_0}}(3p_t+a_{2x}-2a_4)+\delta_0\}.$$

Число τ_0 $(0<\tau_0\leqslant 1)$ обираємо так, щоб γ_0 було найменшим. Введемо у просторі Φ_2^2 норму згідно з формулою

$$\|f\|_{2,2}=\sqrt{B_2^2}\,.$$

Розглянемо простір функцій $H^{2m,m}(Q_T)$ з нормою

$$\|u\|_{H^{2m,m}(Q_T)}=\Big(\int_{Q_T}\sum_{2k+l\leq 2m}\big((\partial^{k+l}u(x,t))/(\partial t^k\partial x^l)\big)^2 dx\,dt\Big)^{1/2}.$$

Теорема. Якщо $f(x,t)\in\Phi_2^2$ і виконуються всі наведені умови для коефіцієнтів /1/, то задача /1/, /2/ має розв"язок $u(x,t)\in H^{4,2}(Q_T)$ і для нього справедлива нерівність

$$\|u\|_{H^{4,2}(Q_T)}\leq C_2\|f\|_{2,2}. \qquad /3/$$

Якщо, крім того, $\gamma_0\leq 1$, то розв"язок задачі /1/, /2/ єдиний.

Доведення. Нехай $\varepsilon>0$ достатньо мале число. Виберемо послідовність функцій $f_m(x,t)$ таких, що

$$B^6_{m,4}=F^6_m(\gamma_0,7)+F^4_{m,1}(\gamma_0,5)+F^2_{m,2}(\gamma_0,3)+F_{m,3}(\gamma_0,1)+$$
$$+F_{m,4}(\gamma_0,-1)<\infty$$

і $f_m(x,t)$ збігається до $f(x,t)$ у просторі Φ_2^2 при $m\to\infty$. Розглянемо задачі

$$Lu^\varepsilon_m=f_m(x,t),\quad (x,t)\in Q_{\varepsilon T}, \qquad /4/$$

$$u^\varepsilon_m(x,\varepsilon)=0,\quad u^\varepsilon_{mt}(x,\varepsilon)=0, \qquad /5/$$

де $Q_{\varepsilon T}=\{x\in\mathbb{R},\ \varepsilon<t<T\}$.

Внаслідок зроблених припущень розв"язок задачі /4/, /5/ існує [2] для довільного $\varepsilon>0$ і $m=1,2,\ldots$, причому $u^\varepsilon_m(x,t)\in H^{6,3}(Q_T)$. Використовуючи методику праці [2], одержуємо оцінку розв"язку $u^\varepsilon_m(x,t)$:

$$\|u^\varepsilon_m\|^2_{H^{6,3}(Q_{\varepsilon T})}\leq C_3 B^6_{m,4}. \qquad /6/$$

Тут стала C_3 не залежить від ε, m і функції $f_m(x,t)$.

Продовжуємо функцію $u^\varepsilon_m(x,t)$ в область $\{x\in\mathbb{R}, -T+2\varepsilon<t<\varepsilon\}$, використовуючи відомий метод [1]. Для продовженої функції, яку позначимо $u^\varepsilon_m(x,t)$, справедлива оцінка /6/ в області Q_T. Оскільки обмежена в $H^{6,3}(Q_T)$ множина функцій $\{u^\varepsilon_m(x,t)\}$ /при кожному фіксованому m / є компактною в $H^{4,2}(Q_T)$, то існує послідовність

$$\{u^{\varepsilon_k}_m(x,t)\}\subset\{u^\varepsilon_m(x,t)\},$$

збіжна до деякої функції $u_m(x,t)\in H^{4,2}(Q_T)$ при $\varepsilon_k\to 0$.

Неважко перевірити, що $u_m(x,t)$ – розв"язок задачі

$$Lu_m = f_m(x,t), \quad (x,t)\in Q_T,$$

$$u_m(x,0)=0, \quad u_{mt}(x,0)=0.$$

Крім того, аналогічно як і оцінку /6/, можна одержати нерівність

$$\|u_m^{\varepsilon_K}(x,t)\|_{H^{4,2}(Q_T)} \leq C_4 \|f_m\|_{2,2}.$$

Перейдемо у цій нерівності до границі, коли $\varepsilon_K \to 0$, $m\to\infty$. Тоді дістаємо, що гранична функція $u(x,t)$ є розв"язком задачі /I/, /2/ і задовольняє оцінку /3/.

Якщо $\gamma_0 \leq 1$, то для будь-якого розв"язку задачі /I/, /2/, що належить класу $H^{2,1}(Q_T)$, можна одержати оцінку

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q_T)} \leq C_5 \|f\|_{L_2(Q_T)},$$

з якої випливає єдиність розв"язку задачі /I/, /2/.

I. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983. 2. Уроев В.М. О гладкости решений нестационарных уравнений типа колебания пластины // Диф. уравнения. 1980. Т.16. № 10. С. 1835-1842.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.87

УДК 681.51

В.М.Кирилич

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ БІОПОПУЛЯЦІЙ

Пропонуємо метод розв"язування однієї нелокальної задачі, яка виникає при вивченні динаміки біопопуляцій [2, 4]:

$$\frac{du}{dt}+\frac{du}{dx} = f(x,t,u(x,t),z(t)), \quad (0<x<l, \ t>0), \qquad /1/$$

$$u(0,t)=\int_0^l \alpha(x,t)u(x,t)dx, \ t>0, \qquad /2/$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leq x\leq l, \qquad /3/$$

$$z'(t)=\int_0^l q(x,t,u(x,t),z(t))dx, \ t>0, \qquad /4/$$

$$z(0)=z_0. \qquad /5/$$

Тут $u(x,t)$, $z(t)$, $\alpha(x,t)$, $\varphi(x)$ – стандартні біологічні параметри [2, 4]; $u(x,t)$, $z(t)$ – шукані функції.