Неважко перевірити, що $u_m(x,t)$ – розв"язок задачі

$$Lu_m = f_m(x,t), \quad (x,t)\in Q_T,$$

$$u_m(x,0)=0, \quad u_{mt}(x,0)=0.$$

Крім того, аналогічно як і оцінку /6/, можна одержати нерівність

$$\|u_m^{\varepsilon_k}(x,t)\|_{H^{4,2}(Q_T)} \leqslant C_4 \|f_m\|_{2,2}.$$

Перейдемо у цій нерівності до границі, коли $\varepsilon_k \to 0$, $m \to \infty$. Тоді дістаємо, що гранична функція $u(x,t)$ є розв"язком задачі /I/, /2/ і задовольняє оцінку /3/.

Якщо $\gamma_0 \leqslant 1$, то для будь-якого розв"язку задачі /I/, /2/, що належить класу $H^{2,1}(Q_T)$, можна одержати оцінку

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q_T)} \leqslant C_5 \|f\|_{L_2(Q_T)},$$

з якої випливає єдиність розв"язку задачі /I/, /2/.

I. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983. 2. Уроев В.М. О гладкости решений нестационарных уравнений типа колебания пластины // Диф. уравнения. 1980. Т.16. № 10. С. 1835-1842.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.87

УДК 681.5I

В.М.Кирилич

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ БІОПОПУЛЯЦІЙ

Пропонуємо метод розв"язування однієї нелокальної задачі, яка виникає при вивченні динаміки біопопуляцій [2, 4]:

$$\frac{du}{dt}+\frac{du}{dx} = f(x,t,u(x,t),z(t)), \quad (0<x<l,\ t>0), \qquad /1/$$

$$u(0,t)=\int_0^l \alpha(x,t)u(x,t)\,dx, \quad t>0, \qquad /2/$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \qquad /3/$$

$$z'(t)=\int_0^l q(x,t,u(x,t),z(t))\,dx, \quad t>0, \qquad /4/$$

$$z(0)=z_0. \qquad /5/$$

Тут $u(x,t)$, $z(t)$, $\alpha(x,t)$, $\varphi(x)$ – стандартні біологічні параметри [2, 4]; $u(x,t)$, $z(t)$ – шукані функції.

Використаний нами підхід базується на методі характеристик [1] і методиці редукції задач з нелокальними умовами для гіперболічних рівнянь до еквівалентних інтегральних рівнянь типу Вольтерра [3].

Всі розглядувані функції дійснозначні.

Теорема. Нехай:

1/ функції $f(x,t,u(x,t),z(t)), q(x,t,u(x,t),z(t)) \in C([0,l]\times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ і задовольняють локальну умову Ліпшиця по змінних u і z ;

2/ коефіцієнт $\alpha(x,t) \in C([0,l]\times \mathbb{R}_+)$;

3/ функція $\varphi(x) \in C([0,l])$;

4/ виконується умова узгодження $\varphi(0)=\int\limits_0^l \alpha(x,0)\varphi(x)dx$.

Тоді існує єдиний неперервний узагальнений $(z(t),u(x,t)) \in C(\mathbb{R}^2)$ розв"язок задачі /1/ - /5/.

Доведення. Введемо позначення

$$u(0,t)=\nu(t), \quad t \geqslant 0. \qquad /6/$$

Інтегруючи рівняння /1/ вздовж характеристик і враховуючи /6/, одержуємо

$$\underset{x<t}{u(x,t)}=\nu(t-x)+\int\limits_{t-x}^{t} f(\tau+x-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau, \qquad /7/$$

$$\underset{x>t}{u(x,t)}=\varphi(x-t)+\int\limits_{0}^{t} f(\tau+x-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau. \qquad /8/$$

Умову /2/ переписуємо у вигляді

$$\nu(t)=\int\limits_0^t \alpha(x,t)u(x,t)dx+\int\limits_t^0 \alpha(x,t)u(x,t)dx.$$

Підставивши сюди $u(x,t)$ з /7/ - /8/, маємо

$$\nu(t)=\int\limits_0^t \alpha(x,t)\nu(t-x)dx+\int\limits_0^t\Big(\int\limits_{t-x}^t f(\tau+x-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau\Big)dx+$$

$$+\int\limits_t \alpha(x,t)\varphi(t-x)dx+\int\limits_t^l\Big(\int\limits_0^t f(\tau+x-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau\Big)dx.$$

Отже, для $\nu(t)$ одержуємо інтегральне рівняння типу Вольтерра другого роду

$$\nu(t)=\int\limits_0^t \alpha(x,t)\nu(t-x)dx+L(t,u,z),$$

або

$$\nu(t)=\int\limits_0^t \alpha(\tau+t,t)\nu(\tau)d\tau+L(t,u,z). \qquad /9/$$

Звідси

$$v(t)=L(t,u,z)+\int_0^t R(t,\tau)L(\tau,u,z)d\tau, \qquad /10/$$

де $R(t,\tau)$ – резольвента ядра $\alpha(\tau,+t,t)$.

Тоді /7/ з врахуванням /10/ перепишемо у вигляді

$$u(x,t)=L(t-x,u,z)+\int_0^{t-x} R(t,\tau)L(\tau,u;z)d\tau+\int_{t-x}^{t} f(\tau+x- \qquad /11/$$

$$-t,\tau,u(\tau+x-t,\tau),z(\tau))d\tau.$$

Нехай

$$u(x,t)=U(x,t,z(t)) - \qquad /12/$$

розв"язок системи /8/, /11/, який знаходимо методом послідовних наближень. Неперервність функції $u(x,t)$ при переході через характеристику $x=t$ досягається умовою 4. Залежність $U(x,t,z(t))$ задовольняє умову Ліпшиця по z.

Підставивши /12/ в /4/ і проінтегрувавши одержаний вираз по t, дістанемо

$z(t)=z_0+\int_0^t G(\tau,z(\tau))d\tau$, $G(\tau,z(\tau))$ – відомий інтегральний оператор.

Останнє рівняння однозначно розв"язується для малих t методом ітерацій. Теорема доведена.

Зауваження. Якщо f і g лінійні відносно u і z, то теорема справедлива при всіх $t>0$.

1. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. 1958. Т.20. Вып. 3. С. 87-104. 2. Б у л а н ж е Е.Н. Исследование модели динамики развития лесной популяции под воздействием вредителей // Вестн. Москов. ун-та. Сер. 15. 1984. № 4. С. 34-39. 3. М е л ь н и к З.О. Задача с интегральными ограничениями для общих двумерных гиперболических уравнений и систем // Диф. уравнения. 1985. Т.21. № 2. С. 246-253. 4. Н а х у ш е в А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Диф.уравнения. 1983. Т.19. № 1. С.86-94.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.87