УДК 517.956

В.Г.Костенко, Л.О.Губаль

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ"ЯЗОК ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДВОВИМІРНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Користуючись відомою схемою* та застосовуючи інтегральне перетворення у скінченних межах, знайдено наближений розв"язок змішаної задачі для двовимірної системи рівнянь параболічного типу зі сталими коефіцієнтами

$$(\partial u/\partial t)=D(\partial^2 u/\partial x^2)+A(\partial^2 u/\partial y^2)+L(\partial u/\partial x)+B(\partial u/\partial y)+Cu-f(t,x,y), \quad /1/$$

$$0<x<x_0,\ 0<y<y_0,\ t>0$$

з початковими

$$u\big|_{t=0}=\psi(x,y) \qquad /2/$$

та крайовими

$$\left(D\frac{du}{dx}-Lu\right)\bigg|_{x=0}=\left(D\frac{du}{dx}+Lu\right)\bigg|_{x=x_0}=0,\ \left(A\frac{du}{dy}-Bu\right)\bigg|_{y=0}=0,\ u\big|_{y=y_0}=0 \quad /3/$$

умовами. Тут $u(t,x,y)$ – стовпець невідомих функцій, матриці коефіцієнтів $A=\|a_{ij}\|$, $D=\|d_{ij}\|$, $B=\|b_{ij}\|$, $L=\|l_{ij}\|$, $C=\|c_{ij}\|$, $i,j=\overline{1,p}$ і стовпці $f(t,x,y)$, $\psi(x,y)$ вважаємо заданими.

Легко переконатись, що коли

$$d_{ij}=d_{ji}=l_{ij}=l_{ji}=0, \quad (d_{ii}/l_{ii})=\mu,\ i=\overline{1,p}, \qquad /4/$$

то до задачі /1/-/3/ можна застосувати інтегральне перетворення

$$\bar{u}_n(t,y)=\int_0^{x_0}K(x,s_n)\,u(t,x,y)\,dx \qquad /5/$$

з ядром $\bar{K}(x,s_n)=(1/c_n)\rho(x)\bar{K}(x,s_n)$,

де $\bar{K}(x,S_n)=\exp(-(l_{11}/d_{11})x)((2S_n d_{11}/3l_{11})\cos S_n x+\sin S_n x);$ /6/

$$\rho(x)=\exp\left(\frac{l_{11}}{d_{11}}\,x\right); \quad c_n^2=\int_0^{x_0}\left(\frac{2S_n d_{11}}{3l_{11}}\cos S_n x+\sin S_n x\right)^2 dx;$$

S_n – послідовність коренів рівняння $\mathrm{ctg}\, S x_0=\dfrac{d_{11}}{2l_{11}}S-\dfrac{3l_{11}}{8d_{11}S}$.

---

* Костенко В.Б., Губаль Л.О. Наближений розв"язок змішаної задачі для параболічної системи рівнянь // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1986. Вип. 25. С. 28-31.

Після застосування /4/ до /1/ - /3/ дістаємо

$$(\partial\bar{u}_n/\partial t)=A(\partial^2\bar{u}_n/\partial y^2)+B(\partial\bar{u}_n/\partial y)+(c-\lambda_n^2)\bar{u}_n-\bar{f}_n(t,y), \qquad /1'/$$

$$\bar{u}_n\Big|_{t=0}=\bar{\varphi}_n(y), \qquad /2'/$$

$$\left(A(\partial\bar{u}_n/\partial y)-B\bar{u}_n\right)\Big|_{y=0}=0,\quad \bar{u}_n\Big|_{y=y_0}=0, \qquad /3'/$$

причому $S_n=(1/2d_{11})\sqrt{4d_{11}\lambda_n^2-l_{11}^2}$.

Розв"язок $\bar{u}_{n,k}(y)$ задачі /1'/ - /3'/ на відрізках прямих $0<y<y_0,\ t=t_k=k\tau,\ k=1,2,\dots$ знаходимо за формулами

$$\bar{u}_{n,k}(y)=\int_0^{y_0}G^{(n)}(y,\xi)\left[\bar{f}_{n,k}(\xi)-(1/\tau)\bar{u}_{n,k-1}(\xi)\right]d\xi\ , \qquad /7/$$

де $G^{(n)}(y,\xi)=\|G_{ij}^{(n)}(y,\xi)\|_{i,j=\overline{1,p}}$ - матриця Гріна задачі /1'/-/3'/, яку практично можна визначити в явній формі. Наприклад, для випадку $p=2$ вона має вигляд

$$G_{im}^{(n)}(y,\ )=(2/\Delta\Delta^*)\Big\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}\sum_{j=3,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{2j}e^{\alpha_1 y}+$$

$$+A_{j1}e^{\alpha_2 y}+A_{12}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}\sum_{j=2,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j3}e^{\alpha_1 y}+$$

$$+A_{1j}e^{\alpha_3 y}+A_{31}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\sum_{j=2,3}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}e^{\alpha_1 y}+$$

$$+A_{j1}e^{\alpha_4 y}+A_{14}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{3j}e^{\alpha_2 y}+$$

$$+A_{j2}e^{\alpha_3 y}+A_{23}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1,3}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j4}e^{\alpha_2 y}+$$

$$+A_{2j}e^{\alpha_4 y}+A_{42}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}\sum_{j=1,2}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}e^{\alpha_3 y}+$$

$$+A_{j3}e^{\alpha_4 y}+A_{34}e^{\alpha_j y})\Big\}$$

$$0\leq y\leq\xi\ ,\quad m=1,2,$$

$$G_{1m}^{(n)}(y,\xi)=(2/\Delta\Delta^*)\Big\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{2j}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}e^{\alpha_2 y})+$$

$$+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j3}e^{\alpha_1 y}+A_{1j}e^{\alpha_3 y})+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}e^{\alpha_4 y})+$$

$$+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{3j}e^{\alpha_2 y}+A_{j2}e^{\alpha_3 y})+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j4}e^{\alpha_2 y}+A_{2j}e^{\alpha_4 y})+$$

$$+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}e^{\alpha_3 y}+A_{j3}e^{\alpha_4 y})\Big\}$$

$$\xi\leqslant y\leqslant y_0,\quad m=1,2;$$

$$G_{2m}^{(n)}(y,\xi)=(2/\Delta\Delta^*)\Big\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}\sum_{j=3,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{2j}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+$$

$$+A_{12}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}\sum_{j=2,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j3}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{1j}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}+$$

$$+A_{31}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\sum_{j=2,3}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y}+$$

$$+A_{14}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1,4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{3j}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+A_{j2}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}+$$

$$+A_{23}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1,3}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}(A_{j4}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+A_{2j}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y}+$$

$$+A_{42}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}\sum_{j=1,2}\Delta_j^{(m)}\cdot$$

$$\cdot e^{-\alpha_j\xi}(A_{4j}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}+A_{j3}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y}+A_{34}\gamma_{2j}e^{\alpha_j y})\Big\}$$

$$0\leqslant y\leqslant\xi\qquad m=1,2,$$

$$G_{2m}^{(m)}(y,\xi) = (2/\Delta\Delta^*)\Big\{(\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}\left(A_{2j}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}\right)+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}\left(A_{j3}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{1j}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}\right)+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}\left(A_{4j}\gamma_{21}e^{\alpha_1 y}+A_{j1}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y}\right)+$$

$$+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}\left(A_{3j}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+A_{j2}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}\right)+$$

$$+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}\left(A_{j4}\gamma_{22}e^{\alpha_2 y}+A_{2j}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y}\right)+$$

$$+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}\sum_{j=1}^{4}\Delta_j^{(m)}e^{-\alpha_j\xi}\left(A_{4j}\gamma_{23}e^{\alpha_3 y}+A_{j3}\gamma_{24}e^{\alpha_4 y}\right)\Big\}$$

$$\xi < y < y_0, \quad m = 1,2.$$

де

$$\Delta = (\gamma_{24}-\gamma_{23})e^{(\alpha_3+\alpha_4)y_0}A_{12}+(\gamma_{24}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_4)y_0}A_{31}+(\gamma_{23}-\gamma_{22})e^{(\alpha_2+\alpha_3)y_0}\cdot$$

$$\cdot A_{14}+(\gamma_{24}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_4)y_0}A_{23}+(\gamma_{23}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_3)y_0}A_{42}+(\gamma_{22}-\gamma_{21})e^{(\alpha_1+\alpha_2)y_0}A_{34};$$

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_i(a_{11}+\gamma_{2i}a_{12})+b_{11}+\gamma_{2i}b_{12} & \alpha_j(a_{11}+\gamma_{2j}a_{12})+b_{11}+\gamma_{2j}b_{12} \\ \alpha_i(a_{21}+\gamma_{2i}a_{22})+b_{21}+\gamma_{2i}b_{22} & \alpha_j(a_{21}+\gamma_{2j}a_{22})+b_{21}-\gamma_{2j}b_{22} \end{vmatrix}, \quad i,j=\overline{1,4}$$

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{24} & \gamma_{22}-\gamma_{24} & \gamma_{23}-\gamma_{24} \\ \alpha_1-\alpha_4 & \alpha_2-\alpha_4 & \alpha_3-\alpha_4 \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_2\gamma_{22}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_4\gamma_{24} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1^{(1)}=\begin{vmatrix} 0 & \gamma_{22}-\gamma_{24} & \gamma_{23}-\gamma_{24} \\ \frac{-a_{22}}{2\det A} & \alpha_2-\alpha_4 & \alpha_3-\alpha_4 \\ \frac{a_{21}}{2\det A} & \alpha_2\gamma_{22}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_4\gamma_{24} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^{(1)}=\begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{24} & 0 & \gamma_{23}-\gamma_{24} \\ \alpha_1-\alpha_4 & \frac{-a_{22}}{2\det A} & \alpha_3-\alpha_4 \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_4\gamma_{24} & \frac{a_{21}}{2\det A} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_4\gamma_{24} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3^{(1)}=\begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{24} & \gamma_{22}-\gamma_{24} & 0 \\ \alpha_1-\alpha_4 & \alpha_2-\alpha_4 & \frac{-a_{22}}{2\det A} \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_4\gamma_{24} & \alpha_2\gamma_{22}-\alpha_4\gamma_{24} & \frac{a_{21}}{2\det A} \end{vmatrix}, \quad \Delta_4^{(1)}=\begin{vmatrix} \gamma_{21}-\gamma_{22} & \gamma_{23}-\gamma_{22} & 0 \\ \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_3-\alpha_2 & \frac{-a_{22}}{2\det A} \\ \alpha_1\gamma_{21}-\alpha_2\gamma_{22} & \alpha_3\gamma_{23}-\alpha_2\gamma_{22} & \frac{a_{21}}{2\det A} \end{vmatrix},$$

$\alpha_1=\alpha_1^{(n)}, \alpha_2=\alpha_2^{(n)}, \alpha_3=\alpha_3^{(n)}, \alpha_4=\alpha_4^{(n)}$ - дійсні прості корені рівняння

$$\det(A\alpha^2+B\alpha+C-(\lambda_n^2+(1/\tau)E)=0,$$

$$\gamma_{2j}=\gamma_{2j}^{(n)}=-\frac{a_{11}\alpha_j^{(n)2}+b_{11}\alpha_j^{(n)}+c_{11}-\lambda_n^2-(1/\tau)}{a_{12}\alpha_j^{(n)2}+b_{12}\alpha_j^{(n)}+c_{12}}, \quad j=\overline{1,4}, \quad n=1,2,\dots .$$

Визначники $\Delta_i^{(2)}$ одержуємо з $\Delta_i^{(1)}$, $i=\overline{1,4}$ відповідно заміною в останньому стовпця з елементами $0, (-a_{22}/2\det A), (a_{21}/2\det A)$ стовпцем з елементами $0, (a_{12}/2\det A), (-a_{11}/2\det A)$.

Зауважимо, що при цьому задовольняються співвідношення

$$\sum_{i=1}^{4}\Delta_i^{(1)}=0,\ \sum_{i=1}^{4}\gamma_{2i}^{(n)}\Delta_i^{(1)}=0,\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i^{(n)}\Delta_i^{(1)}=(-a_{22}/2\det A)\Delta^*,\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i^{(n)}\gamma_{2i}^{(n)}\Delta_i^{(1)}=\frac{a_{21}}{2\det A}\Delta^*;$$

$$\sum_{i=1}^{4}\Delta_i^{(2)}=0,\ \sum_{i=1}^{4}\gamma_{2i}^{(n)}\Delta_i^{(2)}=0,\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i^{(n)}\Delta_i^{(2)}=(a_{12}/2\det A)\Delta^*,\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_i^{(n)}\gamma_{2i}^{(n)}\Delta_i^{(2)}=\frac{-a_{11}}{2\det A}\Delta^*.$$

Наближений розв"язок задачі /1/-/3/ за умов /4/ у прямокутних областях $0\leq x\leq x_0$, $0\leq y\leq y_0$, $t=t_k=k\tau$, $k=1,2,\dots$ набуває вигляду:

$$u_k(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{u}_{n,k}(y)\overline{K}(x,S_n),$$

де $\overline{u}_{n,k}(y)$ і $\overline{K}(x,S_n)$ зображені відповідно формулами /7/ і /6/.

Зауваження. Цей алгоритм можна застосувати і тоді, коли матриці коефіцієнтів A, B, C залежать від t, а також і для випадку неоднорідних крайових умов вигляду /3/.

Стаття надійшла до редколегії 09.03.87

УДК 517.946

М.І.Іванчов

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВІДНОСТІ

Задача знаходження невідомого коефіцієнта температуропровідності при різних припущеннях розглядалась у багатьох працях [1–3, 5, 6]. Розглянемо необхідну умову існування коефіцієнта температуропровідності, що залежить від часу, або сталий, коли додаткова умова є стандартною крайовою умовою, і знайдемо цей коефіцієнт.

Розглянемо задачу знаходження невідомих функцій $\{a(t), u(x,t)\}$, що задовольняють умови

$$u_t = a(t)u_{xx}, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \qquad /1/$$

$$u(x,0) = 0, \quad x > 0, \qquad /2/$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \qquad /3/$$

Додаткову умову задамо у вигляді

$$u_x(0,t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \qquad /4/$$

Припускаємо, що функції $\mu(t)$, $\nu(t)$ і $\mu'(t)$ неперервні на $[0,T]$, $\mu(0) = \nu(0) = 0$.

За допомогою заміни

$$\theta = \alpha(t),$$

де

$$\alpha(\tau) = \int_0^\tau a(\sigma)\,d\sigma, \qquad /5/$$

рівняння /1/ зводимо до вигляду

$$u_\theta = u_{xx}, \qquad /6/$$

що дає змогу скористатись відомою формулою для розв"язку першої