Зауваження. Цей алгоритм можна застосувати і тоді, коли матриці коефіцієнтів A, B, C залежать від t, а також і для випадку неоднорідних крайових умов вигляду /3/.

Стаття надійшла до редколегії 09.03.87

УДК 517.946

М.І.Іванчов

ПРО ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВІДНОСТІ

Задача знаходження невідомого коефіцієнта температуропровідності при різних припущеннях розглядалась у багатьох працях [1-3, 5, 6]. Розглянемо необхідну умову існування коефіцієнта температуропровідності, що залежить від часу, або сталий, коли додаткова умова є стандартною крайовою умовою, і знайдемо цей коефіцієнт.

Розглянемо задачу знаходження невідомих функцій $\{a(t), u(x,t)\}$, що задовольняють умови

$$u_t = a(t)u_{xx}, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \qquad /1/$$

$$u(x,0) = 0, \quad x > 0, \qquad /2/$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \leqslant t < T. \qquad /3/$$

Додаткову умову задамо у вигляді

$$u_x(0,t) = \nu(t), \quad 0 \leqslant t < T. \qquad /4/$$

Припускаємо, що функції $\mu(t)$, $\nu(t)$ і $\mu'(t)$ неперервні на $[0,T]$, $\mu(0) = \nu(0) = 0$.

За допомогою заміни

$$\theta = \alpha(t),$$

де

$$\alpha(\tau) = \int_0^\tau a(\sigma)\,d\sigma, \qquad /5/$$

рівняння /1/ зводимо до вигляду

$$u_\theta = u_{xx}, \qquad /6/$$

що дає змогу скористатись відомою формулою для розв"язку першої крайової задачі для рівняння теплопровідності в напівобмеженому стержні. Повертаючись до змінної t, одержуємо розв"язок задачі /1/ – /3/:

$$u(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)\,a(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\, e^{-\frac{x^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}}\, d\tau. \qquad /7/$$

Звідси за допомогою елементарних перетворень знаходимо

$$u_x(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\, e^{-\frac{x^2}{4(\alpha(t)-\alpha(\tau))}}\, d\tau. \qquad /8/$$

Підставляючи /8/ в умову /4/, приходимо до інтегрального рівняння Вольтерра першого роду відносно невідомої $(\alpha(t)-\alpha(\tau))^{-1/2}$:

$$\nu(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\alpha(t)-\alpha(\tau)}}\,. \qquad /9/$$

Рівняння /9/ можна розв"язати одним з методів, розглянутих у [4].

Представляючи різницю $\alpha(t)-\alpha(\tau)$ у вигляді

$$\alpha(t)-\alpha(\tau) = A(t,\tau)(t-\tau),$$

де

$$A(t,\tau) = \int_0^1 a(\tau+\sigma(t-\tau))\,d\sigma,$$

отримуємо з /15/ необхідну умову існування розв"язку оберненої задачі /1/–/4/ для $a(t)$ таких, що $C_0 < a(t) < C_1$, C_0, C_1 – додатні сталі:

$$0 < C_2 \leq -\frac{1}{\nu(t)} \int_0^t \frac{\mu'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} < C_3\,, \qquad /10/$$

де C_2, C_3 – деякі сталі.

Зауважимо, що інший варіант необхідної умови існування розв"язку оберненої задачі /1/–/4/ можна знайти у [6].

Припустимо тепер, що при $0 \leq t < T_0$ функції $\mu(t)$ і $\nu(t)$ розкладаються у рівномірно збіжні ряди

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n t^n, \qquad /11/$$

$$\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu_n t^{n-\frac{1}{2}}. \qquad /12/$$

Якщо $\mu_1 \neq 0$, $\nu_0 \neq 0$, то необхідна умова /10/ для таких функцій виконується. Припускаємо, що функція $a(t)$ також розкладається у рівномірно збіжний ряд

$$a(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad \text{де} \quad a_0 > 0 . \qquad /13/$$

Тоді

$$\alpha(t)-\alpha(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n/n+1\right)\left(t^{n+1}-\tau^{n+1}\right), \qquad /14/$$

$$\left(\alpha(t)-\alpha(\tau)\right)^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{a_0(t-\tau)}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\left(t^{n+1}-\tau^{n+1}\right)}{a_0(n+1)(t-\tau)}\right)^k \qquad /15/$$

Підставляючи /11/, /12/ і /15/ в /9/ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, знаходимо

$$\sqrt{a_0}=-\left(\mu_1/\nu_0\sqrt{\pi}\right),$$

$$a_1=\left(3a_0/\mu_1\right)\left(\nu_1\sqrt{\pi a_0}+(4/3)\mu_2\right),$$

$$a_2=\frac{20a_0}{11\mu_1}\left(-\nu_2\sqrt{\pi a_0}-\frac{8}{5}\mu_3+\frac{3\mu_2 a_1}{5a_0}-\frac{43\mu_1 a_1^2}{160a_0^2}\right) \quad \text{і т.д.}$$

Зупинимось на випадку, коли $a(t)=a_0>0$, де a_0 – стала. Добре видно, що тоді необхідна умова /10/ набуде вигляду

$$-\frac{1}{\nu(t)}\int_0^t\frac{\mu'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}=C_4>0, \qquad /16/$$

де C_4 – деяка стала, а коефіцієнт температуропровідності знаходимо за формулою

$$\sqrt{a_0}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\nu(t)}\int_0^t\frac{\mu'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} . \qquad /17/$$

Взагалі кажучи, коли коефіцієнт температуропровідності сталий, то доцільно змінити постановку оберненої задачі /1/–/4/ замінивши умову /4/ на умову

$$u_x(0,t_0)=\nu_0, \quad \nu_0-const, \quad 0<t_0\leq T . \qquad /4'/$$

Тоді розв"язок задачі /1/–/3/, /4'/ при виконанні умови

$$\nu_0\int_0^{t_0}\left(\mu'(\tau)d\tau\right)/\sqrt{t-\tau}<0$$

дається формулою

$$\sqrt{a_0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\nu_0}\int_0^{t_0}\frac{\mu'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

і /7/ з заміною $\alpha(t)$ на $a_0(t)$.

1. Безнощенко Н.Я. Достаточные условия существования решения задач определения коэффициентов при старших производных параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1908-1915. 2. Искендеров А.Д. Многомерные обратные задачи для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 5. С. 1005-1008. 3. Ратыни А.К. Об определении постоянного коэффициента уравнения теплопроводности // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1928-1937. 4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., 1986. 5. Dümmel S. Inverse problems for the heat equation // Probl. und Meth. math. Phys. 8 Tag. Karl-Marx-Stadt, 20-24 Juni. 1984. P. 21-26. 6. Lorenzi A. Determination of a timedependent coefficient in a quasi-linear parabolic equation // Ric. Mat. 1983. Vol. 32. № 2. P. 263-284.

Стаття надійшла до редколегії 29.06.87

УДК 517.956

Г.М.Закопець

УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ У ПІВПРОСТОРІ $(n > 3)$

Розглядаємо задачу Діріхле для бігармонічного рівняння у півпросторі, коли граничні значення - узагальнені функції. Виконання граничних умов розуміємо в сенсі [1]. У класичній постановці задача досліджена в [3].

Нехай $D(\mathbb{R}^{n-1})$ - простір фінітних нескінченно-диференційовних функцій на $\mathbb{R}^{n-1}$, $D'(\mathbb{R}^{n-1})$ - простір лінійних неперервних функціоналів на $D(\mathbb{R}^{n-1})$, $E'(\mathbb{R}^{n-1})$ - простір узагальнених функцій з $D'(\mathbb{R}^{n-1})$ і компактними носіями. Дію узагальненої функції F на основну φ позначаємо (F, φ) [2].

<u>Постановка задачі</u>. Нехай $F, G \in D'(\mathbb{R}^{n-1})$. Знайти розв"язок рівняння

$$\Delta^2 u(x) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n_+ = \{x : x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_n > 0\}, \quad /1/$$